

Controllo di formazioni

In questa parte del corso ci occupiamo del problema di descrivere cosa sono le formazioni di robot, di definire delle strategie di controllo che consentono ad un insieme di robot di raggiungere una data formazione e infine il problema di definire leggi di controllo che consentono di mantenere la formazione una volta raggiunta e quindi di muovere la formazione.

La formazione può essere descritta fornendone la forma (cioè le distanze relative tra gli agenti) o le configurazioni desiderate.

Specifiche di formazione

Sia D un insieme di distanze che si desiderano mantenere tra i robot:

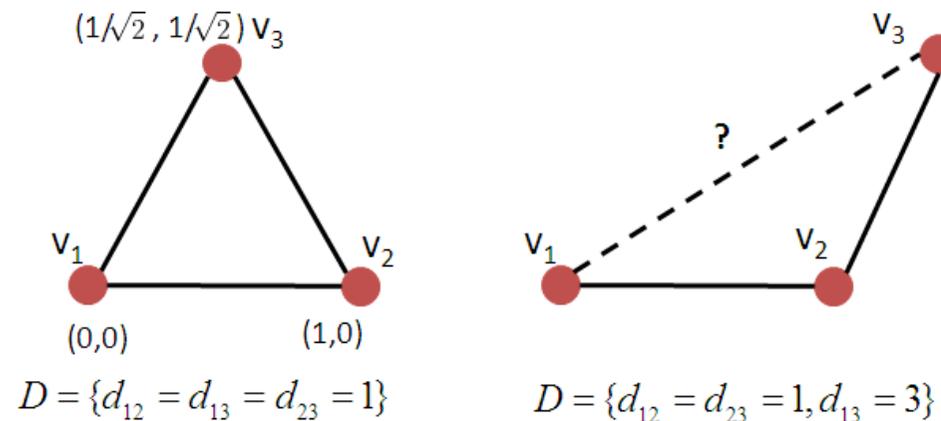
$$D = \{d_{ij} \in \mathbb{R} \mid d_{ij} > 0, i, j = 1, \dots, n, i \neq j, d_{ij} = d_{ji}\}.$$

Si suppone che l'insieme delle distanze D corrisponda ad una formazione ammissibile

Più formalmente si ha che

Definizione 24. Una formazione caratterizzata dall'insieme D è ammissibile se esistono dei punti $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^p$ (con $p = 2, 3$) tali che

$$\|z_i - z_j\| = d_{ij}, \text{ per tutti gli indici } i, j = 1, \dots, n, i \neq j.$$



Nella figura, sono riportate due formazioni: a sinistra una formazione ammissibile a destra una non ammissibile.

Definizione 25. Data una formazione D , ogni altra formazione D' per la quale esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $D' = \alpha D$ è scale-invariant.

Si consideri $\Xi = \{z_1, \dots, z_n | z_i \in \mathbb{R}^p, i = 1, \dots, n\}$ tale che $\|z_i - z_j\| = d_{ij}$ per tutte le coppie di punti in Ξ .

Definizione 26. Ogni insieme di punti $x_i \in \mathbb{R}^p$ con $i = 1 \dots, n$ e $p = 2, 3$, tali che $x_i = z_i + \tau$ per ogni $i = 1 \dots, n$, rappresentano una formazione translational-invariant per un arbitrario $\tau \in \mathbb{R}^p$.

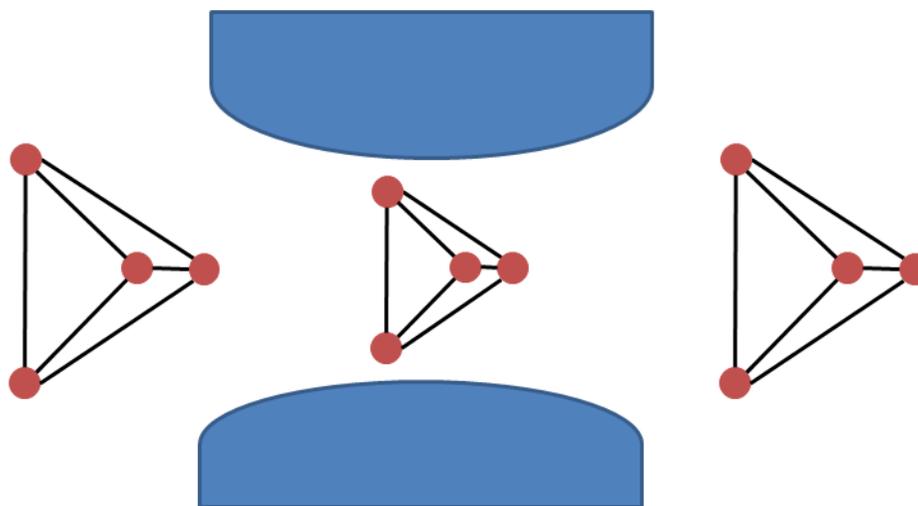


Figura 19: Esempio di formazioni scale-invariant (prima e seconda formazione) e translational-invariant (prima e terza formazione).

Una formazione può essere descritta da un grafo $G_f(V, E_f, w)$ dove V è l'insieme dei nodi che rappresentano i robot, E_f è l'insieme di archi che specificano le distanze che vanno mantenute nella formazione e la funzione peso $w : E_f \rightarrow \mathbb{R}^+$ specifica la distanza d_{ij} da mantenere tra i nodi v_i e v_j : $w(v_i, v_j) = d_{ij}$. In generale, non è consigliato descrivere una formazione specificando le distanze desiderate tra tutte le coppie di robot. Infatti, imporre di mantenere una data distanza implica che il robot deve raggiungere e poi mantenere la distanza prefissata e questo richiede un costo computazionale. E' quindi meglio minimizzare il numero di archi che descrive la formazione.

In alcuni casi inoltre, data una formazione è necessario assegnare ad ogni agente il proprio posto previsto nella formazione.

Formazioni Rigide

Si consideri un grafo $G_f(V, E_f, w)$ che rappresenta una formazione ammissibile e un insieme di punti $\Xi = \{z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^p\}$ tali che $\|z_i - z_j\| = d_{ij}$ tali che $(v_i, v_j) \in E_f$. Si considera la **struttura** $\mathcal{G}(\Xi) = (\Xi, G_f)$ come il grafo e un insieme di punti che ne verificano l'ammissibilità.

Definizione 27. Una **traiettoria** di $\mathcal{G}(\Xi)$ è un'insieme di stati continuo $x_1(t), \dots, x_n(t)$ tali che $x_i(0) = z_i$.

Tale traiettoria rappresenta il moto di una rete di robot che all'istante iniziale era in formazione.

Definizione 28. La traiettoria (e quindi il moto) di una rete di robot è **consistente con gli archi** se $\|x_i(t) - x_j(t)\|$ è costante per tutti i $(v_i, v_j) \in E_f$.

Definizione 29. La traiettoria (e quindi il moto) di una rete di robot è **rigida** se $\|x_i(t) - x_j(t)\|$ è costante per tutti gli indici i e j .

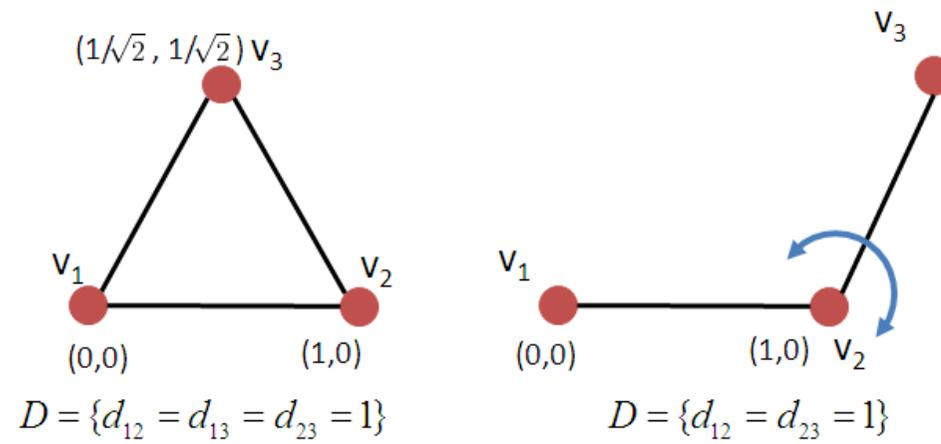


Figura 20: Sinistra: grafo rigido, Destra: grafo non rigido

Definizione 30. Una struttura è **rigida** se e soltanto se tutte le traiettorie consistenti con gli archi sono traiettorie rigide, altrimenti è **flessibile**.

Ovviamente, una struttura rigida rappresenta una formazione rigida e cioè una formazione la cui forma può essere mantenuta rigidamente con la semplice imposizione di mantenere costanti delle distanze.

Una traiettoria consistente con gli archi è tale che $\|x_i(t) - x_j(t)\|^2$ è costante per tutti i $(v_i, v_j) \in E_f$. Si ha quindi che

$$(\dot{x}_i(t) - \dot{x}_j(t))(x_i(t) - x_j(t)) = 0$$

per tutti i $(v_i, v_j) \in E_f$.

L'assegnamento di velocità infinitesimali costanti $\dot{x}_i = u_i$ che verificano, per $t = 0$, l'equazione precedente corrisponde a un **moto infinitesimale** della struttura. Dato $u = (u_1^T, \dots, u_n^T)^T$ si ha che i moti infinitesimali corrispondono alla soluzione del sistema lineare

$$R(\mathcal{G}(\Xi))u = 0,$$

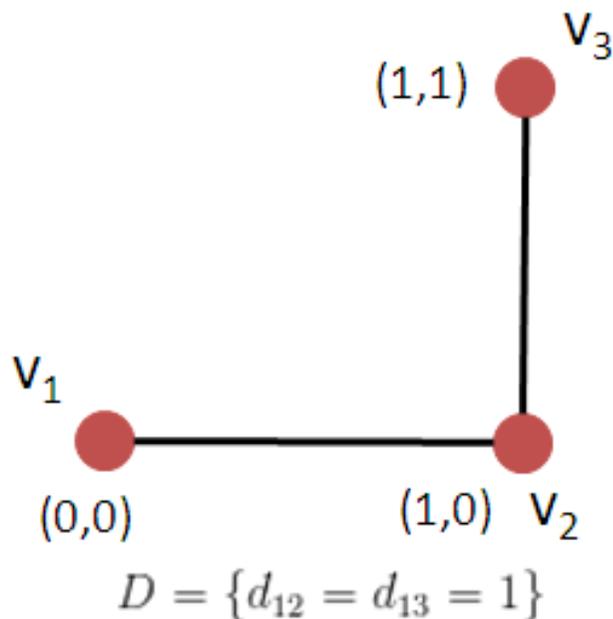
e $R(\mathcal{G}(\Xi))$ è detta **matrice di rigidezza** che consiste in $|E_f|$ righe e pn colonne.

Definizione 31. Una struttura è infinitesimalmente rigida se $R(\mathcal{G}(\Xi))u = 0$ per ogni moto infinitesimale u .

Teorema 19. Una struttura con $n \geq 2$ robot in \mathbb{R}^2 è infinitesimalmente rigida se e soltanto se $\text{rank}(R(\mathcal{G}(\Xi))) = 2n - 3$.

Teorema 20. Una struttura infinitesimalmente rigida è rigida.

Esempio 16. Si consideri il caso di tre robot planari ($n = 3$ e $p = 2$) le cui condizioni iniziali siano $q = (x_1(0)^T, x_2(0)^T, x_3(0)^T)^T = (0, 0, 1, 0, 1, 1)^T$.



Per il mantenimento della formazione

si hanno i seguenti vincoli:

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)^T (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \\ (x_2 - x_3)^T (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = 0 \end{cases}$$

La matrice di rigidità risulta

$$\begin{pmatrix} (x_1 - x_2)^T & (x_2 - x_1)^T & 0 \\ 0 & (x_2 - x_3)^T & (x_3 - x_2)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = 0.$$

In particolare per $t = 0$ si ha

$$R(\mathcal{G}(\Xi(0))) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha $\text{rank}(R) = 2 < 2n - 3$ e pertanto la struttura non è infinitesimalmente rigida.

Si noti che il concetto di struttura infinitesimalmente rigida $\mathcal{G}(\Xi) = (\Xi, G_f)$ dipende sia dalla topologia del grafo G_f che dalla configurazione Ξ .

Dato un grafo di formazione G_f , una struttura $\mathcal{G}(\Xi) = (\Xi, G_f)$ può essere vista come una particolare realizzazione di G_f .

Definizione 32. *Un grafo è genericamente rigido se ha una realizzazione infinitesimalmente rigida.*

Tale concetto è indipendente dalla particolare struttura e ci si riferisce più comunemente al grafo genericamente rigido come grafo rigido.

Lemma 3. *Se G_f è un grafo genericamente rigido, l'insieme di tutte le configurazioni generiche di G_f formano un sottoinsieme denso di \mathbb{R}^{pn} .*

Chiaramente l'aggiunta di archi in grafi rigidi non ne modifica la rigidità. Ha senso quindi chiedersi quale sia il numero minimo di archi per garantire che il grafo sia rigido.

Definizione 33. *Un grafo è minimamente rigido è rigido ma perde la rigidità se un qualsiasi arco viene eliminato..*

Nel caso planare si ha

Teorema 21. *Un grafo con $n \geq 2$ vertici in \mathbb{R}^2 è minimamente rigido se e soltanto se*

- ▶ *ha $2n - 3$ archi e*
- ▶ *ogni sottografo indotto con $n' \leq n$ vertici ha non più di $2n' - 3$ archi.*

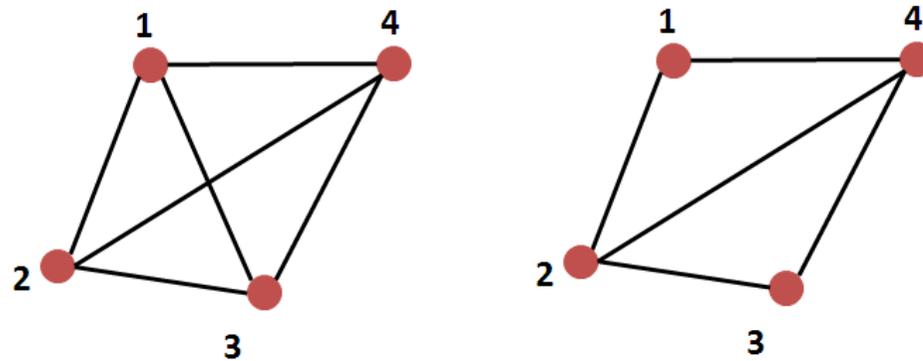


Figura 21: Sinistra: grafo non minimamente rigido, Destra: grafo minimamente rigido

Strutture persistenti

Se un arco corrisponde alla distanza da mantenere tra due agenti, il compito di mantenimento della distanza desiderata può essere delegato ad uno dei due agenti. Questo corrisponde con l'assegnare una orientazione all'arco e quindi al grafo.

Definizione 34. Una struttura orientata $\mathcal{D}(\Xi) = (\Xi, \mathcal{D}_f)$ dove \mathcal{D}_f è il grafo orientato che rappresenta la formazione. L'arco $(i, j) \in E_f$ rappresenta che è responsabilità di i mantenere la distanza d_{ij} e quindi rappresenta un vincolo per il moto di i .

Definizione 35. Una struttura è consistente con i vincoli se lungo tutte le traiettorie della struttura gli agenti verificano i rispettivi vincoli.

Definizione 36. Una struttura è persistente se è consistente con i vincoli e la corrispondente struttura non orientata è rigida.

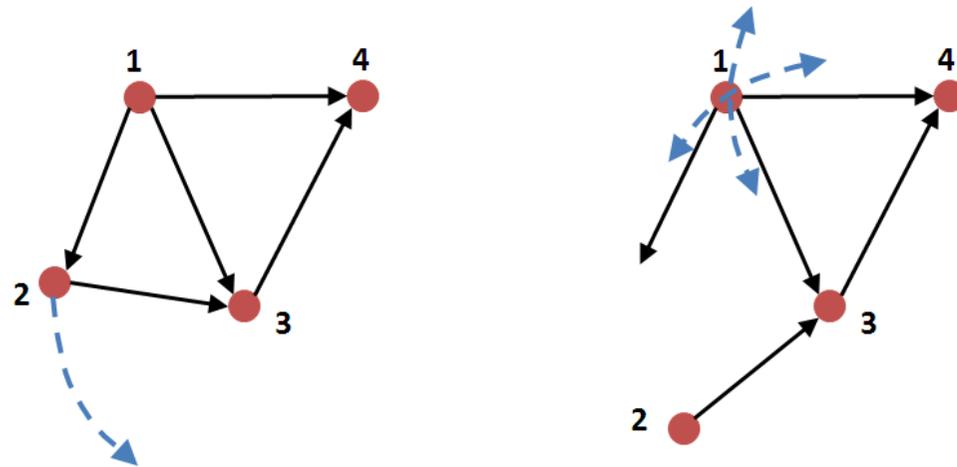


Figura 22: Esempio di formazione non persistente: l'agente 1 non è in grado di seguire l'agente 2 mantenendo la distanza desiderata con 3 e 4.

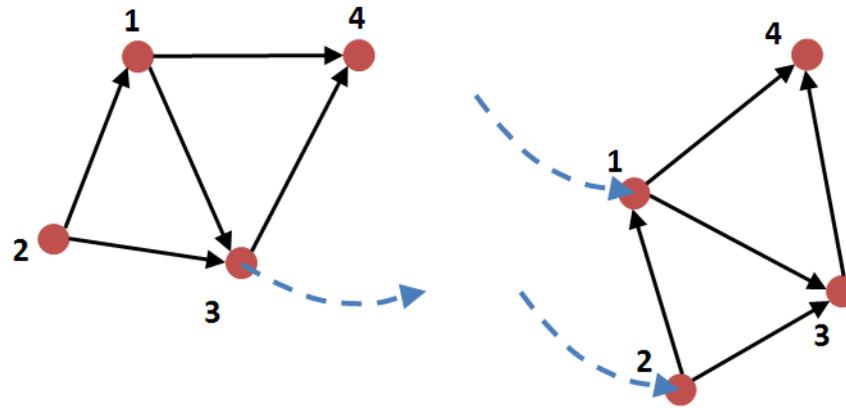


Figura 23: Esempio di formazione persistente: dato un movimento ammissibile dell'agente 3, gli agenti 1 e 2 possono mantenere la distanza desiderata con gli altri agenti.

Configurazioni relative

Una alternativa a fornire le distanze, che si desidera far raggiungere o mantenere agli agenti, è quella di fornire delle configurazioni relative.

Ad esempio dati tre agenti che si muovono in \mathbb{R}^3 si ha $x_i \in \mathbb{R}^3$ e la specifica della formazione può essere data attraverso il vettore delle configurazioni relative

$$z(t) = [(x_1(t) - x_2(t))^T (x_2(t) - x_3(t))^T]^T,$$

dove $z(t) \in \mathbb{R}^6$. In questo caso la formazione è completamente specificata infatti le distanze tra tutte le coppie sono determinabili una volta noto $z(t)$:

$$x_1(t) - x_3(t) = (x_1(t) - x_2(t)) + (x_2(t) - x_3(t)).$$

Una formazione è quindi data una volta individuato il vettore $\bar{z} \in \mathbb{R}^6$ delle configurazioni relative desiderate.

Dato $x = [x_1^T \ x_2^T \ x_3^T]^T \in \mathbb{R}^9$ il vettore delle configurazioni relative z si può costruire a partire dalla conoscenza della matrice di incidenza del grafo associato:

$$z(t) = F^T x(t),$$

Dove

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes I_3,$$

I_3 è la matrice di identità 3×3 e \otimes rappresenta il prodotto di Kronecker.

Si ricorda che se A è una matrice $m \times n$ e B è una matrice $p \times q$, il prodotto di Kronecker $A \otimes B$ è una matrice $mp \times nq$ definita a blocchi:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Più in generale, dati n agenti in \mathbb{R}^p , per costruire una formazione è sufficiente prendere un albero di copertura orientato del grafo completo K_n e fornire un valore desiderato \bar{z} al vettore di configurazioni relative $z(t) = (D \otimes I_p)^T x(t)$ dove $x(t) = [x_1^T \dots x_n^T]^T \in \mathbb{R}^{np}$, D è la matrice di incidenza dell'albero di copertura e I_p è la matrice identità $p \otimes p$.

Ovviamente la stessa formazione può essere rappresentata tramite due diversi alberi di copertura per cui esistono delle matrici di trasformazione che trasformano una configurazione in un'altra equivalente.

Controllo lineare di formazioni: shape formation

Dopo esserci preoccupati di come specificare una formazione passiamo al problema di far raggiungere agli agenti una formazione desiderata.

In particolare, descriviamo ora come far muovere un insieme di agenti per raggiungere una formazione translational-invariant determinata da un grafo $G_f = (V, E_f)$ e un insieme di configurazioni finali Ξ .

In questo caso particolare siamo in grado di risolvere il problema (che risulta essere lineare) con le tecniche di consenso viste precedentemente.

Si consideri come stato x_i dell'agente i la posizione del robot, $x_i \in \mathbb{R}^p$ ($p = 1, 2, 3$). Si vuole un protocollo di formazione che garantisca che per un certo $\tau \in \mathbb{R}^p$ si ha $x_i = \xi_i + \tau$ per $i = 1, \dots, n$. Si consideri il grafo $G = (V, E)$ che rappresenta la rete degli agenti.

Si vuole guidare gli agenti in modo che valgano le due seguenti proprietà:

- ▶ $\|x_i(t) - x_j(t)\|$ converge asintoticamente a d_{ij} per tutti gli i e j tali che $(v_i, v_j) \in E$.
- ▶ Se il grafo G è dinamico ($G(t) = (V, E(t))$) deve convergere in tempo finito ad un grafo che ammette G_f come sottografo. Cioè si vuole che esista un $T > 0$ finito tale che $E_f \subset E(t)$ per ogni $t \geq T$.

Caso statico

Se il grafo è statico si assume che la seconda condizione sia verificata dal grafo G . E' necessario invece fare in modo che la prima condizione venga verificata. A tal fine si consideri τ_i l'errore rispetto alla configurazione $\xi_i \in \Xi$:

$$\tau_i(t) = x_i(t) - \xi_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Applicando il protocollo del consenso a τ_i si otterrebbe che a regime $x_i - \xi_i = \tau$ per un vettore costante τ e che quindi viene raggiunta una formazione translational-invariant.

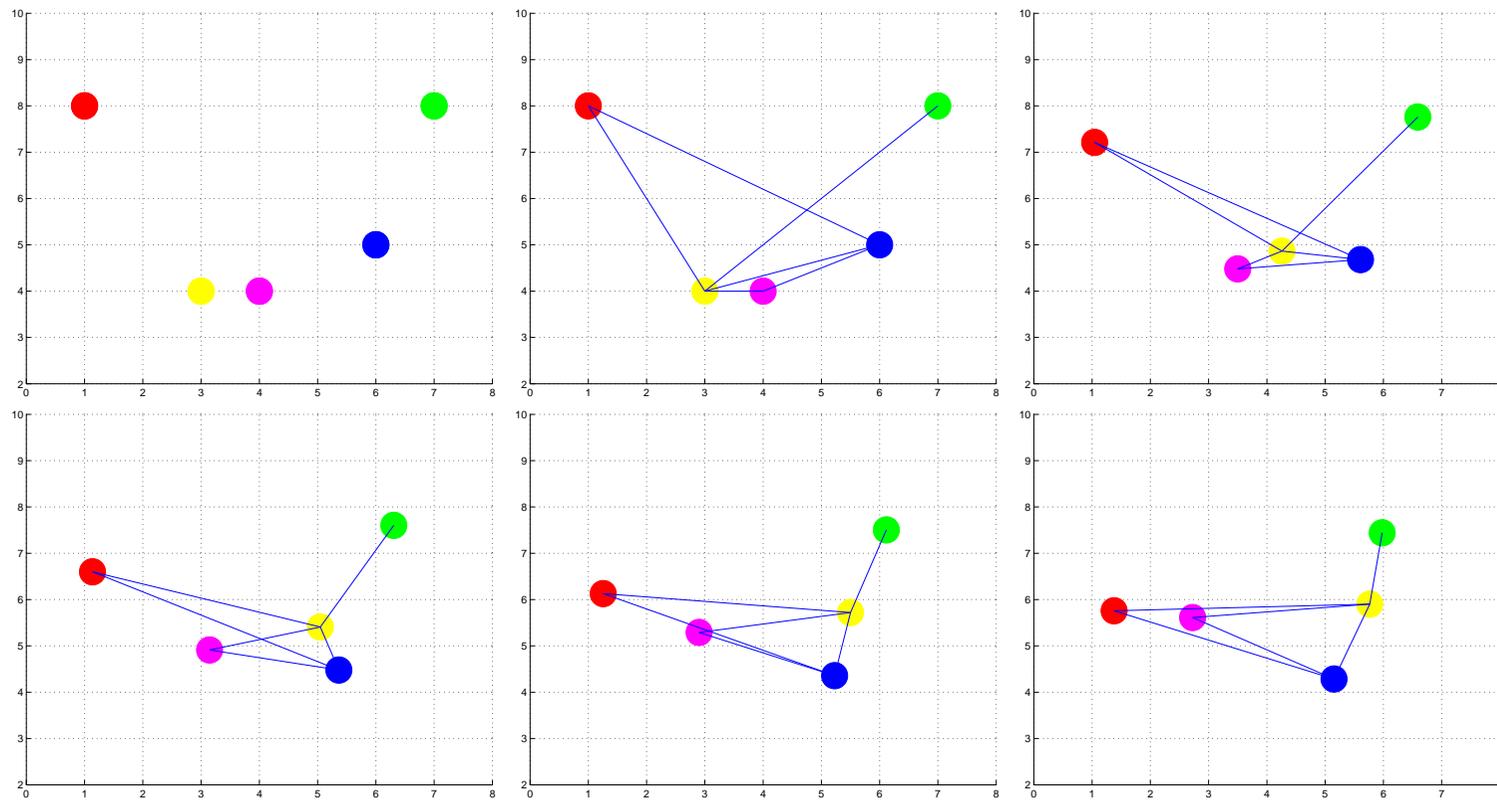
Si considera quindi $\dot{\tau}_i = - \sum_{j \in N_{f,i}} (\tau_i - \tau_j)$ dove $N_{f,i} = \{j \in \{1, \dots, n\} | (v_i, v_j) \in E_f\}$.

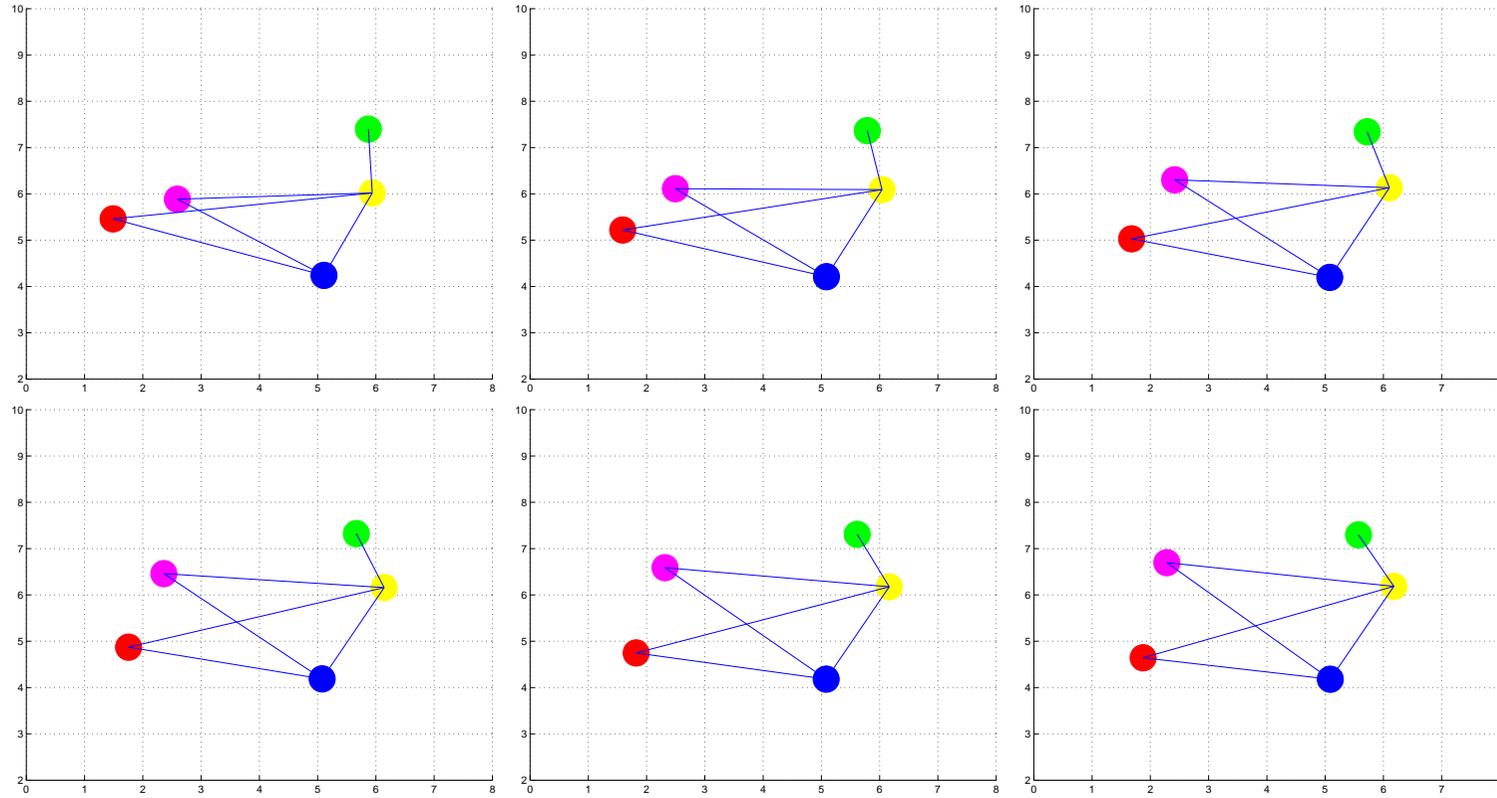
Data la scelta di τ_i si ha che $\dot{x}_i = \dot{\tau}_i$ e $\tau_i - \tau_j = x_i - x_j - (\xi_i - \xi_j)$ quindi una legge di controllo decentralizzato e lineare per la formazione è:

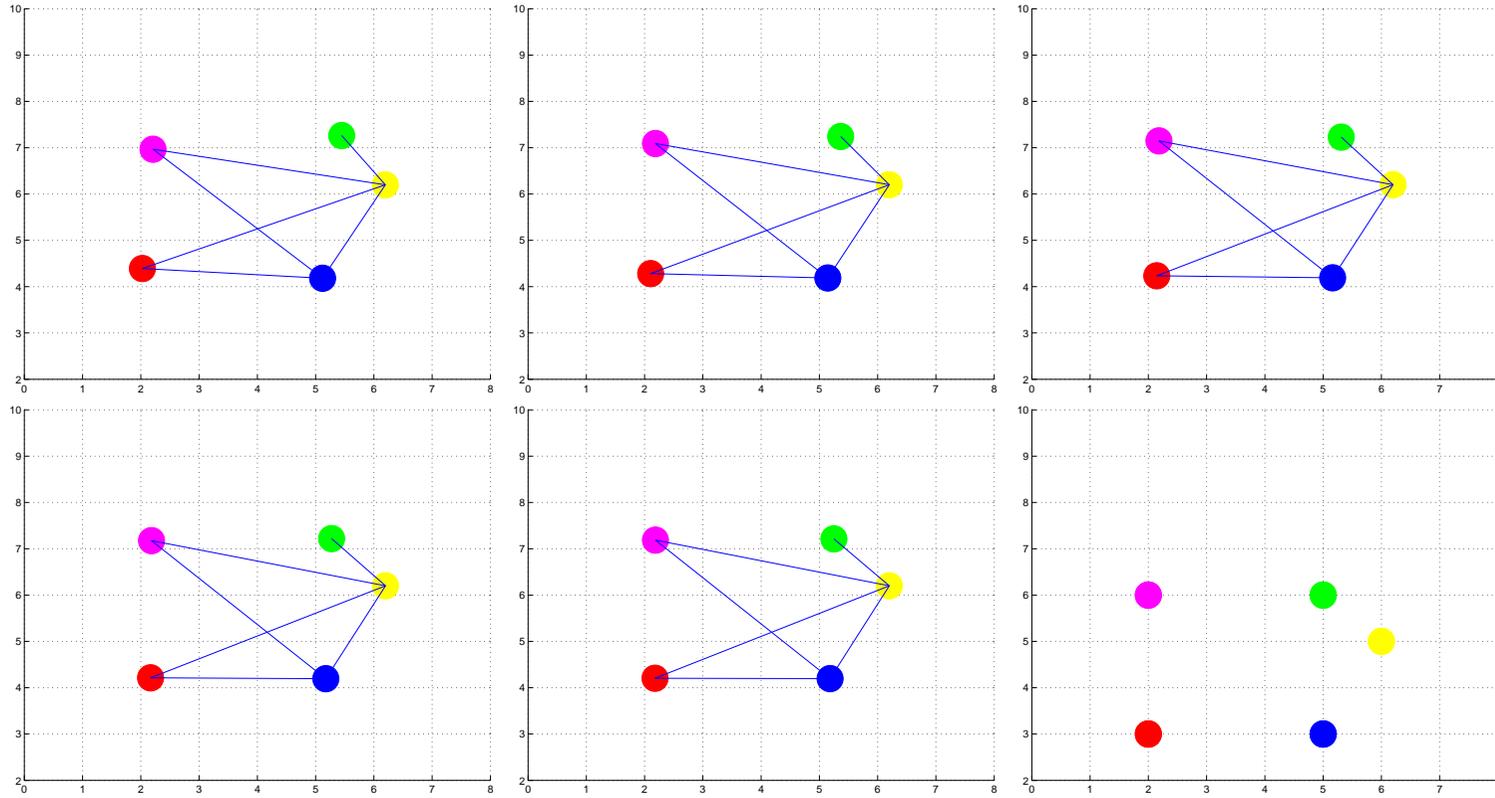
$$\dot{x}_i = - \sum_{j \in N_{f,i}} (x_i - x_j - (\xi_i - \xi_j))$$

Grazie alle proprietà di convergenza del protocollo del consenso, se il grafo è connesso si converge ad una formazione translational-invariant rispetto alla formazione di riferimento. Con questo approccio si assegna anche una posizione nella formazione ad ogni singolo agente.

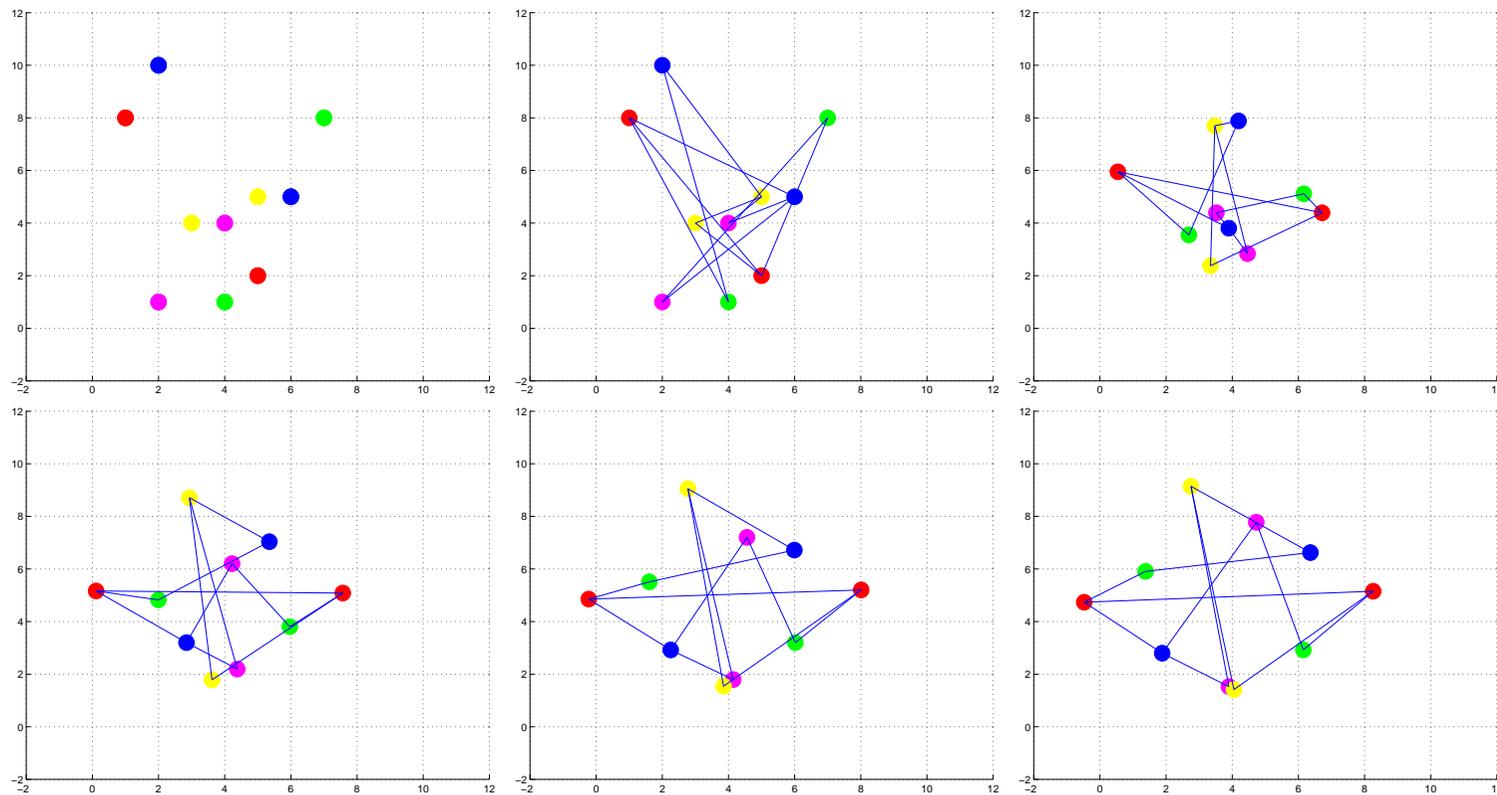
Esempio di raggiungimento della formazione con controllo lineare: prima e ultima immagine sono le condizioni iniziali e la formazione di riferimento. Caso con 5 agenti.

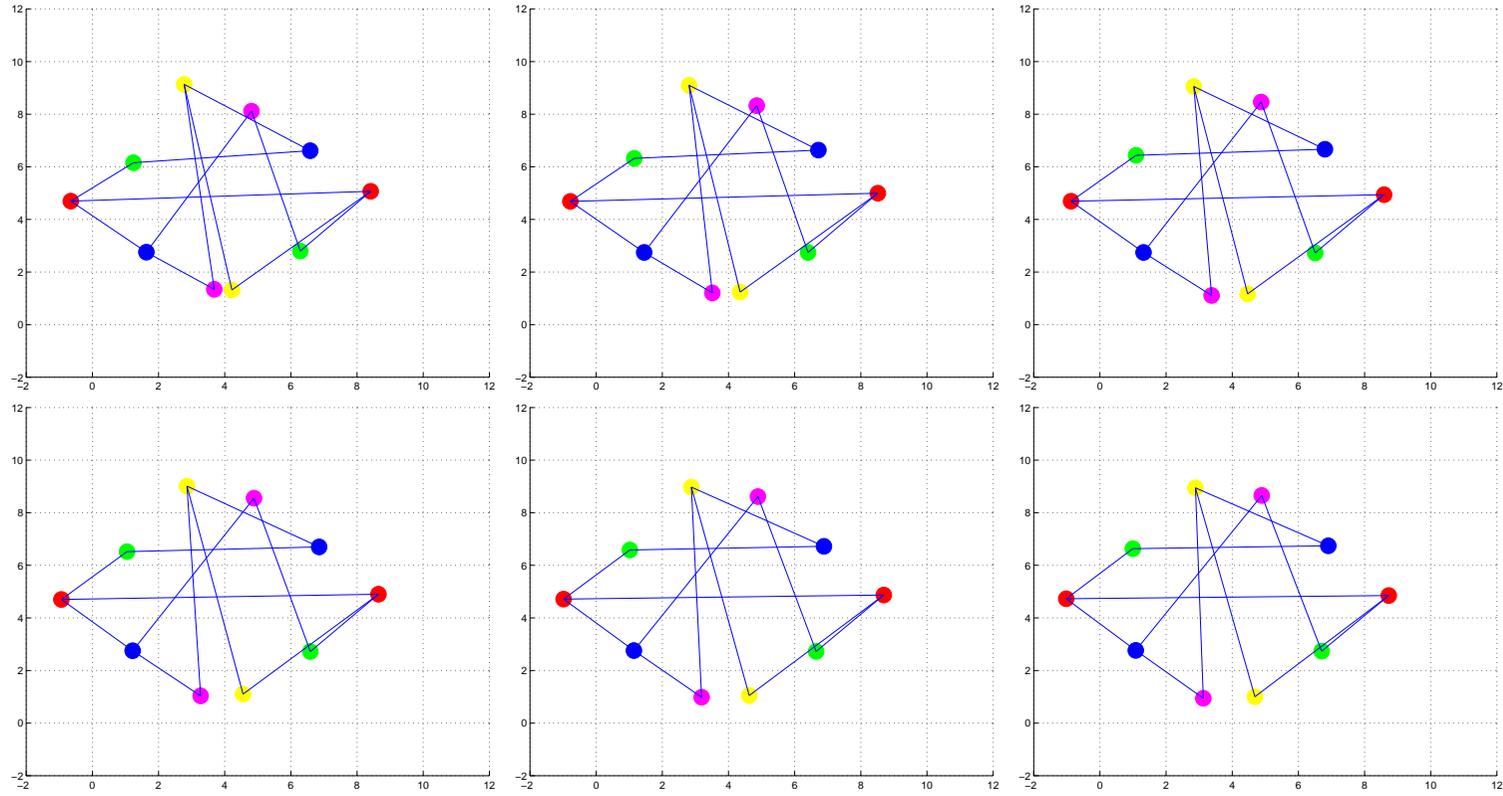


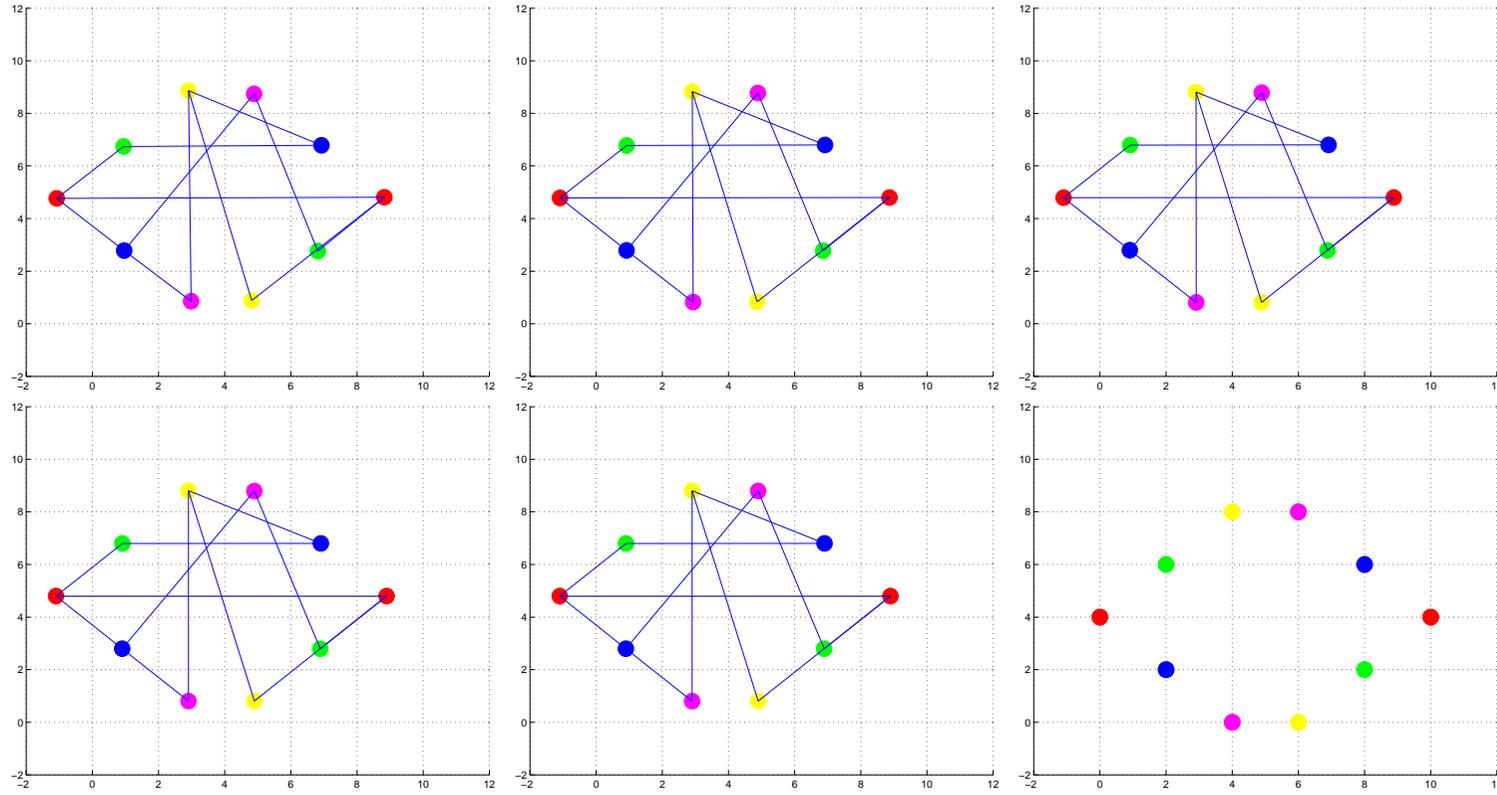




Esempio di raggiungimento della formazione con controllo lineare: prima e ultima immagine sono le condizioni iniziali e la formazione di riferimento. Caso con 10 agenti.







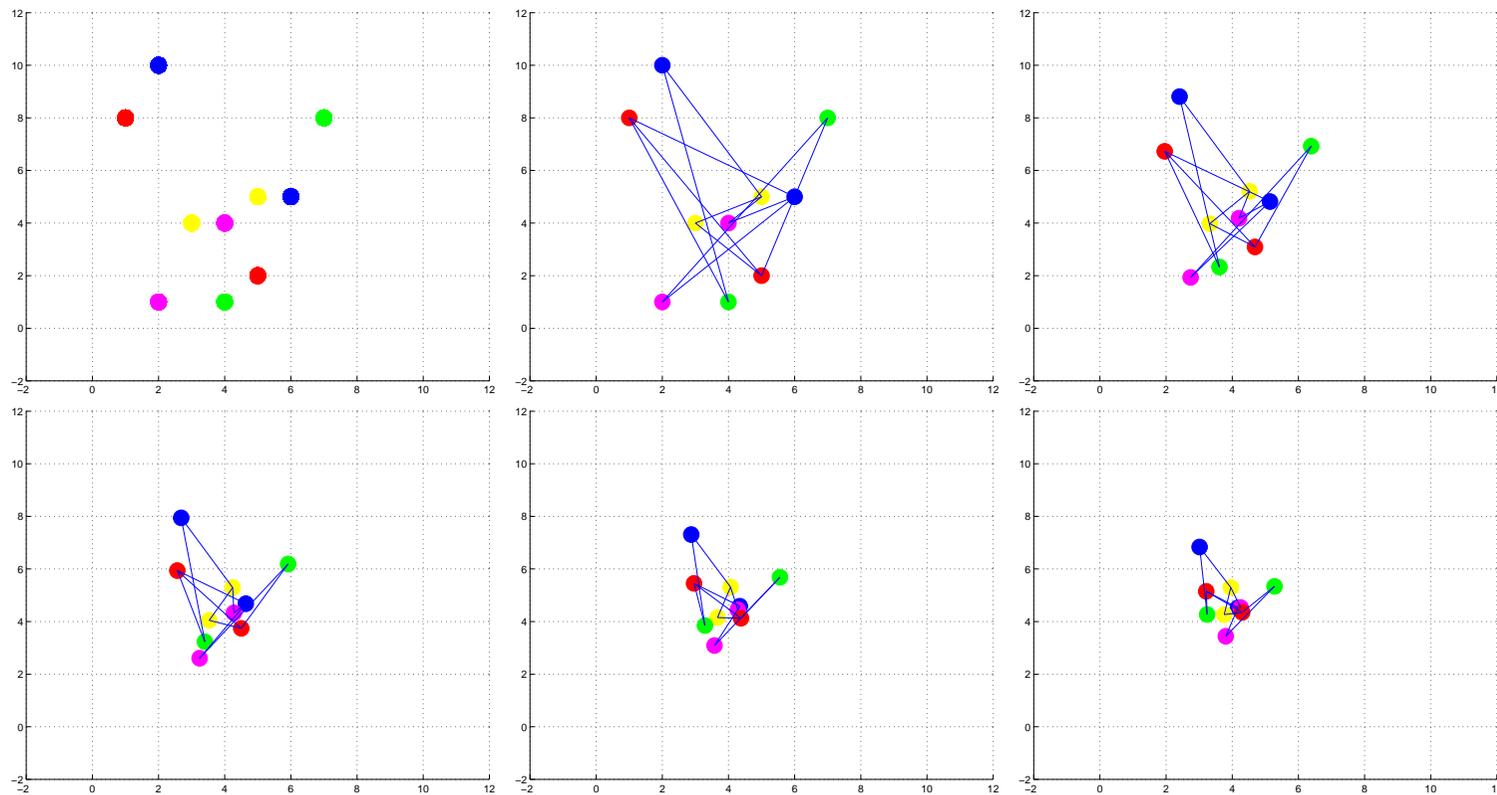
Caso dinamico

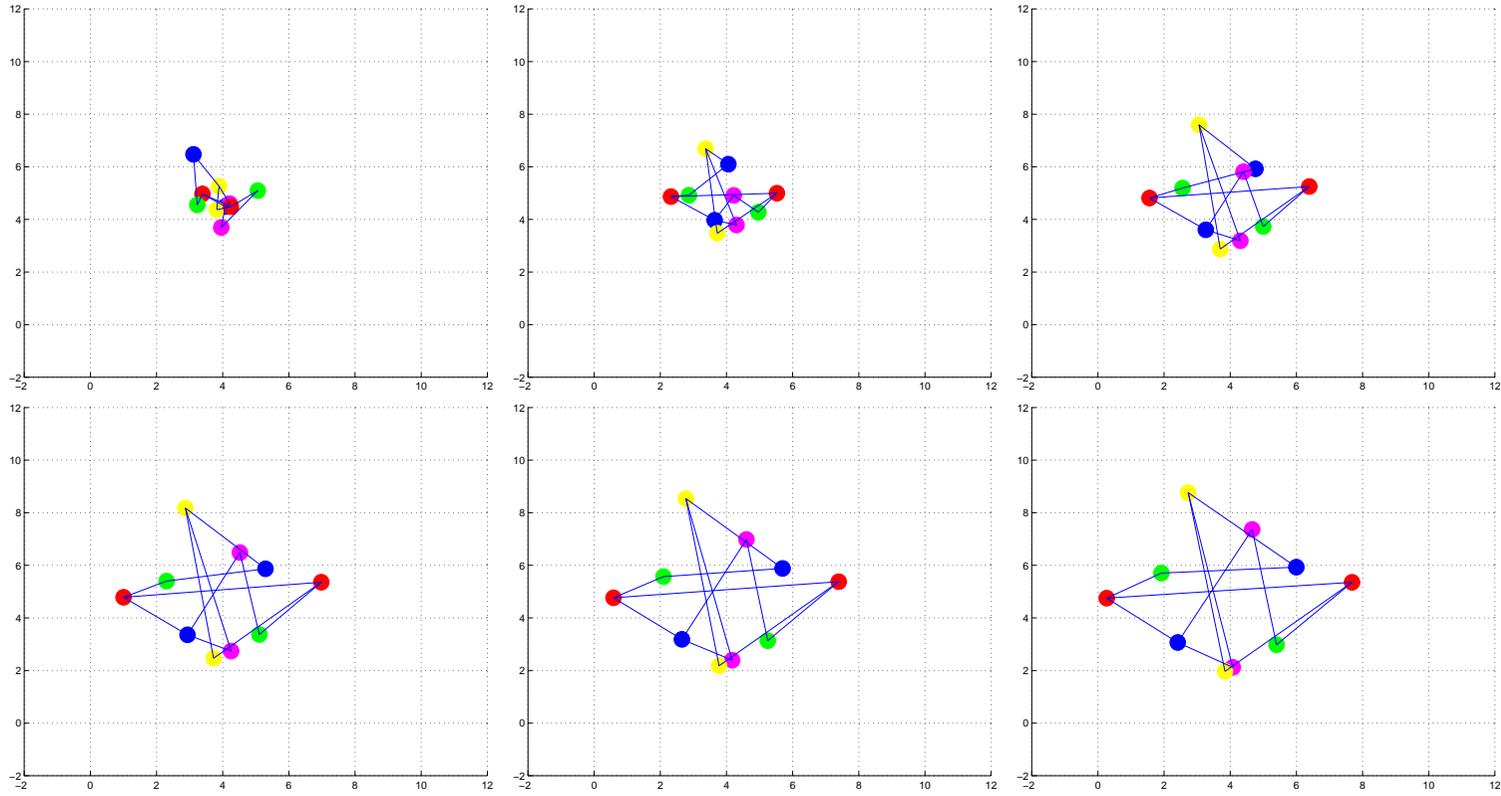
Se il grafo di interazione $G(t) = (V, E(t))$ è dinamico ma è tale da garantire che il grafo $G_f = (V, E_f)$ che rappresenta la formazione è tale che $E_f \subset E(t)$ per ogni $t \geq 0$ allora il protocollo descritto nel caso statico continua a convergere e a fornire una formazione translational-invariant (sempre sotto le ipotesi di connettività dei grafi).

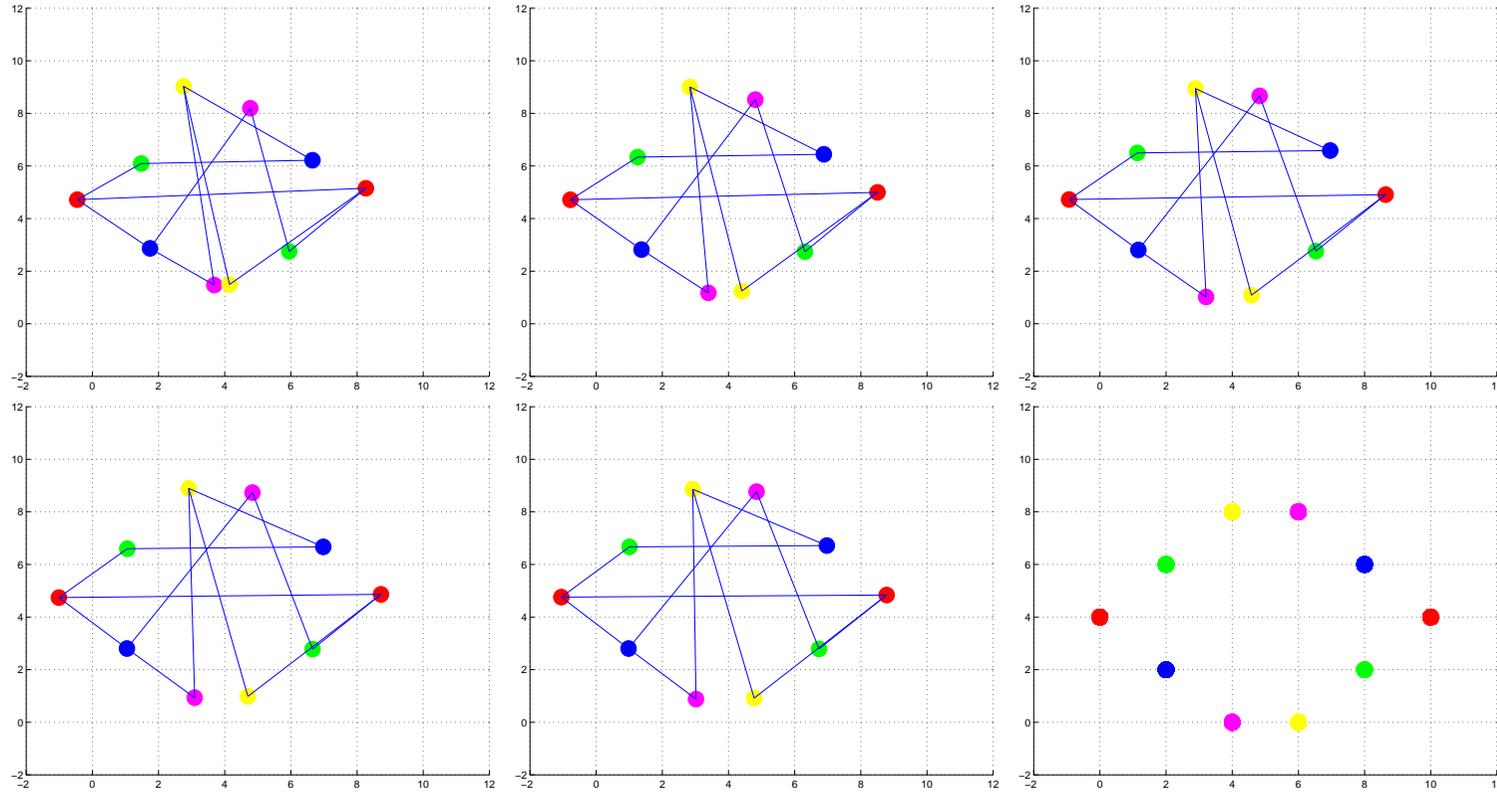
Per garantire che $E_f \subset E(t)$ per ogni $t \geq 0$ si possono utilizzare diverse strategie. Ad esempio si può fare un protocollo di rendezvous seguito da un protocollo di consenso lineare come quello descritto nel caso discreto. Si salta da un protocollo all'altro quando ogni agente ha $n - 1$ agenti adiacenti e questo è possibile tramite un classico algoritmo di esplorazione della rete in cui ogni agente invia un messaggio "ok" non appena riconosce che ha $n - 1$ agenti adiacenti e il protocollo del consenso parte non appena ogni agente riceve da tutti i propri nodi adiacenti il messaggio "ok".

In ogni caso è sempre necessario garantire che durante il protocollo del consenso si abbia $E_f \subset E(t)$ per ogni $t \geq 0$. Per fare questo è necessario utilizzare tecniche di controllo non lineare.

Esempio di raggiungimento della formazione con controllo lineare: prima e ultima immagine sono le condizioni iniziali e la formazione di riferimento. Caso con 10 agenti.







Controllo lineare di formazioni: configurazioni relative

Nel caso delle configurazioni relative si consideri l'albero di copertura orientato \mathcal{D} che rappresenta la formazione desiderata in termini di configurazioni relative. Sia D la matrice di incidenza associata al grafo \mathcal{D} .

Singolo integratore

Dato il modello del singolo integratore si ha $\dot{x}_i(t) = u_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ dove u_i rappresenta l'ingresso dell'agente i .

Sia $z(t) = D^T x(t)$ e z_{ref} le configurazioni relative desiderate. L'errore è dato da $e(t) = z_{ref} - z(t)$ e quindi

$$\dot{e}(t) = -D^T u(t).$$

Si consideri allora una retroazione degli stati della forma $u(t) = kDe(t)$ con $k > 0$. In questo caso u è un controllore proporzionale (P). Si noti che il controllo del singolo agente non dipende dall'errore di tutti gli altri agenti. Il sistema retroazionato risulta:

$$\dot{e}(t) = -D^T De(t).$$

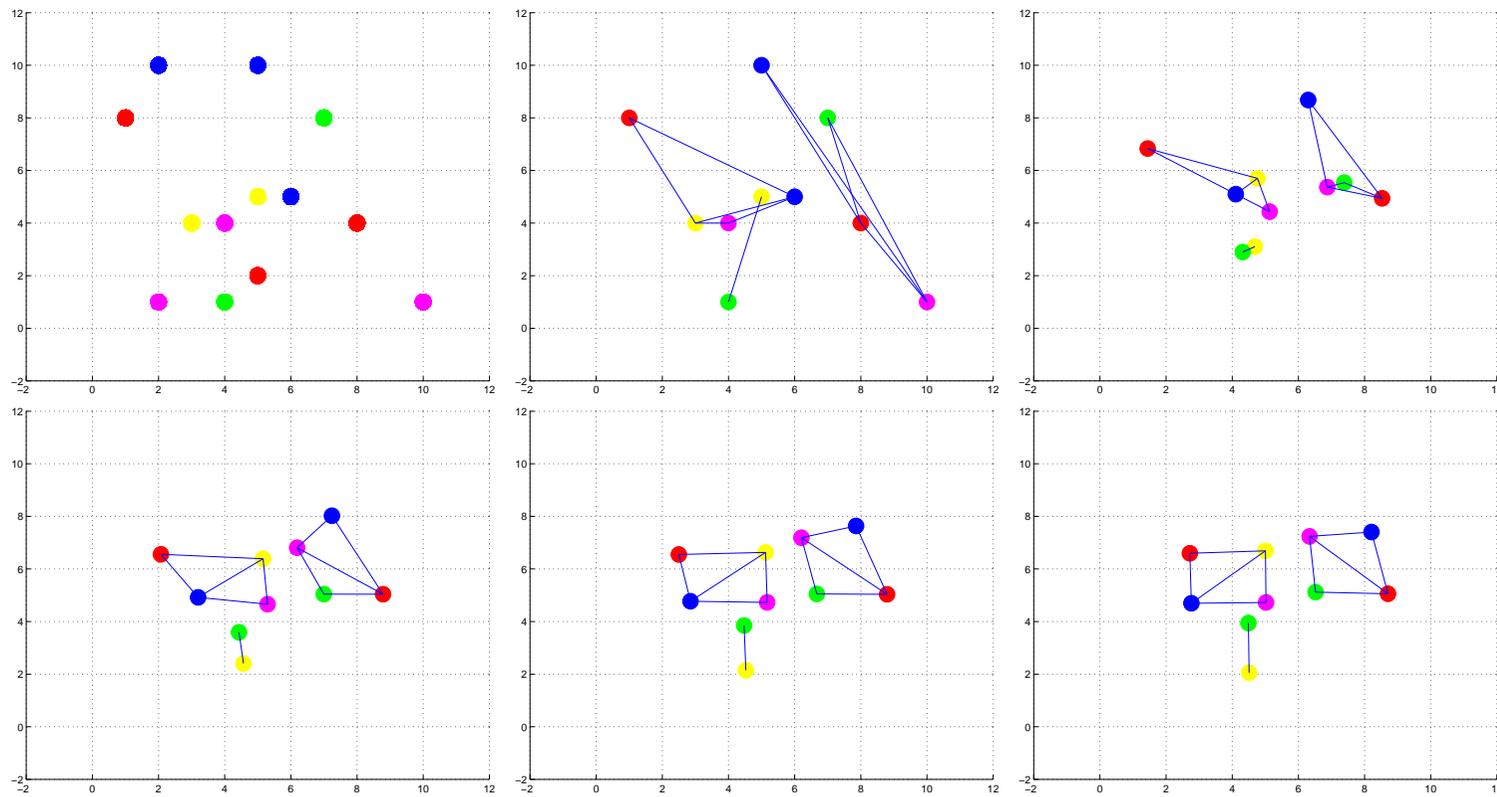
La matrice $L_e = D^T D$ è detta Laplaciano degli archi e risulta definita positiva per alberi di copertura orientati. Si ha quindi che la dinamica dell'errore è convergente esponenzialmente.

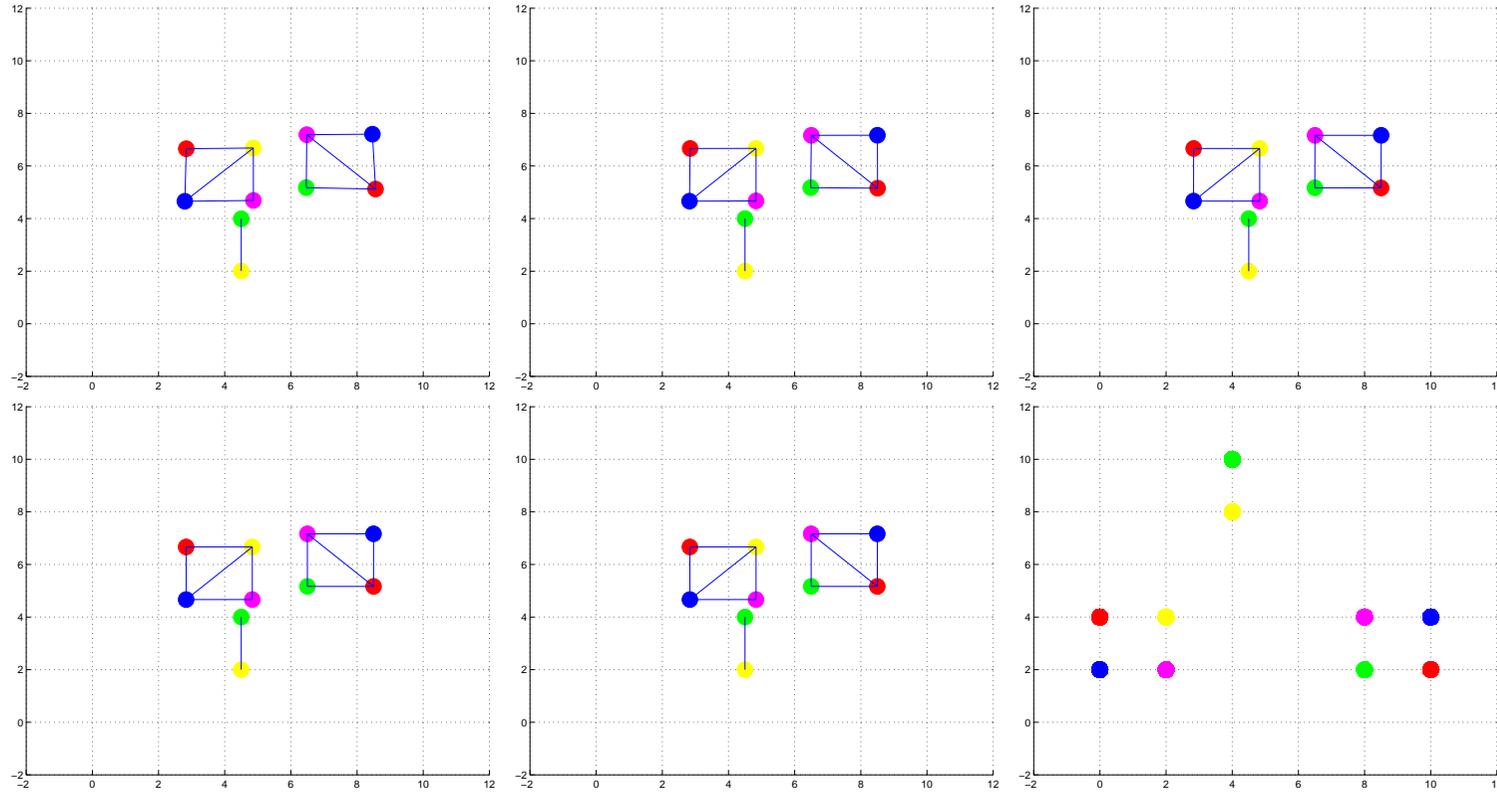
Il sistema controllato, rispetto alle coordinate $x = (x_1, \dots, x_n)$, risulta

$$\dot{x}(t) = -kLx(t) + kDz_{ref}.$$

Si noti che $z_{ref} = D^T x_{ref}$ e pertanto il sistema è equivalente a quello ottenuto nel controllo lineare di formazione basato sulle distanze.

Esempio di raggiungimento della formazione con controllo lineare: prima e ultima immagine sono le condizioni iniziali e la formazione di riferimento. Caso con 10 agenti.





Doppio integratore

Dato il modello del doppio integratore si ha $\ddot{x}_i(t) = u_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ dove u_i rappresenta l'ingresso dell'agente i .

Le configurazioni relative desiderate sono date in termini di un albero di copertura orientato \mathcal{D} e risultano essere $[z_{ref}(t)^T \dot{z}_{ref}(t)^T]^T$. Sia $e(t) = z_{ref} - D^T x(t)$ e supponendo che $\ddot{z}_{ref} = 0$ si ha

$$\ddot{e}(t) = -D^T u(t).$$

Si consideri la legge di controllo proporzionale-derivativa (PD) distribuita

$$u(t) = k(D \ D) \begin{pmatrix} e(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix}$$

Il sistema in anello chiuso risulta

$$\begin{pmatrix} \dot{e}(t) \\ \ddot{e}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -kD^T D & -kD^T D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix}.$$

Il fatto che $D^T D$ è definita positiva implica che la dinamica dell'errore è globalmente asintoticamente stabile per $k > 0$. Infatti gli autovalori λ_i della matrice dinamica in anello chiuso degli errori verificano

$$\det(\lambda I - A_{cl}) = \det(\lambda^2 I + (\lambda + 1)kL_e) = 0.$$

Visto che $\lambda = -1$ non verifica questa equazione non è autovalore di A_{cl} da cui segue che gli autovalori λ_i verificano

$$\det\left(\frac{\lambda^2}{\lambda + 1}I + kL_e\right) = 0.$$

Detto μ_i l' i -esimo autovalore di $-kL_e$ si ha $\mu_i = \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+1}$ da cui $\lambda_i = \frac{1}{2} \left(\mu_i \pm \sqrt{\mu_i^2 + 4\mu_i} \right)$. Per un albero di copertura L_e è definita positiva, pertanto per $k > 0$ si ha $\mu_i < 0$ e la matrice dinamica in anello chiuso A_{cl} è Hurwitz.

Il sistema controllato, rispetto alle coordinate $x = (x_1, \dots, x_n)$, risulta

$$\ddot{x}(t) = -kLx(t) - kL\dot{x}(t) + kDz_{ref}(t) + kD\dot{z}_{ref}(t).$$

Dinamica lineare

Nel caso in cui la dinamica degli agenti è lineare, $\dot{x}_i = ax_i + bu_i$ $i = 1, \dots, n$, è ancora possibile definire un controllo lineare. La dinamica delle configurazioni relative $z = D^T x$ risulta

$$\dot{z} = az + bD^T u,$$

scegliendo l'ingresso $u = kD(z_{ref} - z)$ (distribuito) si ottiene la dinamica in anello chiuso

$$\dot{z} = (aI - kbL_e)z + kbL_e z_{ref}.$$

Tale sistema è stabile se per ogni autovalore ν_i di L_e si ha $a - \nu_i Kb < 0$. Si noti che gli autovalori del Laplaciano per archi sono tutti gli autovalori non nulli del Laplaciano.

Controllo in formazione di unicicli

Consideriamo ora un insieme di n unicicli le cui equazioni dinamiche risultano:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i \cos \theta_i(t) \\ \dot{y}_i(t) = v_i \sin \theta_i(t) \\ \dot{\theta}_i(t) = \omega_i(t) \end{cases}$$

dove x_i, y_i sono le coordinate in \mathbb{R}^2 dell' i -esimo uniciclo, θ_i la sua direzione di moto, v_i la velocità lineare (supposta costante) e ω_i la velocità angolare considerata come l'ingresso dell'uniciclo u_i .

E' comodo considerare il moto dell'uniciclo in coordinate nel piano complesso:

$$r_i(t) = x_i(t) + jy_i(t),$$

dove j è l'unità immaginaria. In queste coordinate si ha che

$$\begin{cases} \dot{r}_i(t) = v_i e^{j\theta_i(t)} \\ \dot{\theta}_i(t) = u_i(t), \end{cases}$$

per $i = 1, \dots, n$.

Si consideri una velocità lineare costante e uguale per ogni uniciclo, senza perdere in generalità si può considerare $v_i = 1$ per $i = 1, \dots, n$. In questo modo la dinamica può essere studiata sulla circonferenza unitaria del piano complesso.

Per il sistema completo si considerino $\theta(t) = [\theta_1(t), \dots, \theta_n(t)]^T$, $u(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]$ e $e^{j\theta(t)} = [e^{j\theta_1(t)}, \dots, e^{j\theta_n(t)}]^T$. Il nostro scopo è quello di determinare delle regole locali di interazione che consentano un movimento coordinato degli unicicli. La dinamica dell'uniciclo offre diversi comportamenti che possono quindi essere coordinati: sincronizzazione delle direzioni di moto (stessa direzione di moto per ogni uniciclo), comportamento bilanciato (centro di massa dell'insieme di unicicli rimane costante) e spaziatura (i veicoli si muovono intorno ad un centro fissato).

Vediamo ora come questi comportamenti si possono ottenere a partire da regole locali di interazione.

Definizione 37. Sia $p_m(\theta) = \frac{1}{nm} \mathbf{1}^T e^{jm\theta}$, lo stato medio di ordine m , e $U_m : [0, 2\pi]^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, $U_m(\theta) = \frac{n}{2} |p_m(\theta)|^2 = \frac{1}{2nm^2} (e^{jm\theta})^* \mathbf{1} \mathbf{1}^T e^{jm\theta}$ il potenziale di ordine m . Si indichi con ψ_m l'angolo medio: $p_m(\theta) = |p_m(\theta)| e^{j\psi_m}$.

Nel caso $m = 1$ $p_1(\theta)$ è la velocità del centro di massa dell'insieme di unicicli e $U_1(\theta)$ è l'energia cinetica del centro di massa:

$$p_1(\theta) = \frac{1}{n} \mathbf{1}^T e^{j\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \dot{r}_i(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i(t) \right).$$

Lemma 4. *Per ogni intero $m \geq 0$ il minimo (unico!) del potenziale U_m corrisponde al caso $p_m(\theta) = 0$. Il massimo (unico!) di U_m corrisponde al caso in cui ogni uniciclo viaggia nella stessa direzione e quindi $\theta_i = \theta_k \bmod 2\pi/m$.*

Dimostrazione La derivata parziale dello stato medio di ordine m rispetto alla variabile θ_i risulta:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} p_m(\theta) = \frac{j}{n} e^{jm\theta_i}.$$

Di conseguenza la derivata parziale del potenziale di ordine m rispetto alla variabile θ_i risulta:

$$\frac{\partial U_m}{\partial \theta_i} = \frac{n}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \langle p_m(\theta), p_m(\theta) \rangle = n \langle p_m(\theta), \frac{\partial}{\partial \theta_i} p_m(\theta) \rangle = \quad (22)$$

$$= \langle p_m(\theta), j e^{jm\theta_i} \rangle = |p_m(\theta)| \langle e^{j\psi_m}, j e^{jm\theta_i} \rangle \quad (23)$$

Si noti che, nel piano complesso, moltiplicare un vettore per l'unità immaginaria equivale a ruotarlo di 90 gradi. Si ha quindi che la derivata del potenziale si annulla quando $p_m(\theta) = 0$ (che corrisponde ad un minimo in quanto $U_m(\theta) \geq 0$ e si annulla in $p_m(\theta) = 0$). Nel caso $p_m(\theta) \neq 0$ la derivata si annulla quando alcuni unicicli (ad esempio $n - r$, con $0 \leq r \leq n$) sono tali per cui $m\theta_i = \psi_m$ mentre gli altri (r) verificano $m\theta_i = \psi_m + \pi$. Calcolando lo stato medio di ordine m si ottiene che, per i punti critici della derivata del potenziale, si ha

$p_m(\theta) = \frac{n-2r}{nm} e^{j\psi_m}$ da cui segue che $m|p_m(\theta)| = 1 - 2\frac{r}{n}$. Il potenziale di ordine m in tali punti risulta quindi pari a $U_m(\theta) = \frac{n}{2}|p_m(\theta)|^2 = \frac{n}{2m^2} \left(1 - 2\frac{r}{n}\right)^2$ che risulta essere un polinomio in r che ammette massimo in $r = 0$ o $r = n$. Il caso $r = n$ è da escludere in quanto in questo caso l'angolo medio sarebbe $\psi_m + \pi$. Il caso $r = 0$ corrisponde a tutti gli unicicli con $m\theta_i = \psi_m \bmod 2\pi$ da cui segue la tesi. In tutti gli altri punti critici il potenziale di ordine m non ammette valore massimo o minimo.

Definizione 38. Il vettore di fase θ è una configurazione bilanciata quando

$$p_1(\theta) = 0 \quad (\theta \bmod 2\pi),$$

è una configurazione sincronizzata quando per qualche $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, $\theta = \theta_0 \mathbf{1}$.

Si noti che le configurazioni bilanciate e sincronizzate corrispondono alle configurazioni in cui il potenziale di primo ordine raggiunge rispettivamente minimo e massimo. E' quindi naturale considerare la legge di controllo di tipo gradiente della forma:

$$u_i(\theta) = -k \nabla_i U_1(\theta) = k \langle p_1(\theta), j e^{j\theta_i} \rangle = -\frac{k}{n} \sum_{j=1}^n \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Quando $k > 0$ la legge di controllo guida il gruppo di unicicli verso una configurazione bilanciata mentre se $k < 0$ guida il gruppo verso una configurazione sincronizzata.

In questo caso però la legge di controllo è centralizzata mentre siamo interessati a leggi di controllo basate su grafi non necessariamente completi. Si noti che nel caso di grafo completo K_n il Laplaciano risulta $L(K_n) = nI - \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ e quindi il potenziale di grado m può essere scritto nella forma

$$U_m(\theta) = \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2nm^2} (e^{jm\theta})^* L(K_n) e^{jm\theta},$$

questo suggerisce di considerare i punti critici della funzione

$$W_m(\theta) = \langle e^{jm\theta}, L(G)e^{jm\theta} \rangle$$

per progettare leggi di controllo che si basano su generici grafi connessi. Si noti che il segno di W_m è opposto rispetto a quello di U_m .

Il minimo del potenziale W_m corrisponde al caso $e^{jm\theta} = e^{jm\theta_0} \mathbf{1}$ per un certo $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ in quanto L ha autovettore destro pari a $\mathbf{1}$.

Ha quindi senso prendere come legge di controllo la seguente

$$u_i(t) = -k \frac{\partial W_m(\theta)}{\partial \theta_i} = km \sum_{j \in N(i)} \sin m(\theta_j - \theta_i),$$

quando $k > 0$ questa legge guida il gruppo di unicicli in una configurazione sincronizzata (in base al principio di invarianza di LaSalle). Purtroppo in generale non è vero che il massimo del potenziale W_m corrisponda alla configurazione bilanciata. Infatti non è più detto che esista un unico massimo ma ci possono essere massimi locali che non corrispondono a configurazioni bilanciate.

Si consideri una rete rappresentata da un grafo circolante. Un grafo con n vertici è circolante quando il nodo i è vicino al nodo $i - j \bmod n$ e al nodo $i + j \bmod n$ per ogni j in una lista l . Nel caso in cui $l = \{1\}$ il grafo circolante è un ciclo composto da n archi. Nel caso $l = \{1, 2, 3\}$ il grafo circolante con 7 nodi è il grafo completo K_7 .

Il Laplaciano di un grafo circolante è una matrice circolante e cioè della forma

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_2 \\ c_2 & c_1 & \cdots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_0 \end{bmatrix}$$

La matrice degli autovettori è la matrice di Fourier

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \dots & \zeta^{n-1} \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \dots & \zeta^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \zeta^{n-1} & \zeta^{n-2} & \dots & \zeta \end{bmatrix}$$

L'elemento $i + 1, j + 1$ della matrice di Fourier è ζ^{ij} con $0 \leq i, j \leq n - 1$ e ζ è una radice n -esima dell'unità. Infatti in posizione $i + 1 = 3, j + 1 = n$ si ha $\zeta^{2(n-1)} = \zeta^{n-1}$.

Nelle ipotesi di un grafo circolante $W_m(\theta)$ ammette un massimo globale quando $e^{jm\theta(t)}$ è l'autovettore corrispondente all'autovalore massimo del Laplaciano.

Quando questo è verificato si ha $\mathbf{1}^T e^{jm\theta(t)} = 0$ e quindi seguendo il gradiente sopra riportato con $k < 0$ gli unicicli raggiungono una configurazione bilanciata di ordine m .

Con i due approcci precedenti ci si è occupati di coordinare gli agenti tenendo in considerazione la loro fase. Se si vuole gestire il loro distanziamento (spacing) si consideri l'ingresso costante $u_i(t) = \omega_0 \neq 0$. In tal modo ogni uniciclo si allinea ad un cerchio centrato in

$$c_i(t) = r_i(t) + \frac{j}{\omega_0} e^{j\theta_i(t)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

con raggio $\rho_0 = \frac{1}{|\omega_0|}$.

Per ottenere un consenso sul centro di rotazione degli unicicli conviene introdurre la variabile $q_i(t) = -j\omega_0 c_i(t) = e^{j\theta_i(t)} - j\omega_0 r_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, che include sia l'orientazione attuale del veicolo che il centro di rotazione.

Nel caso di grafo di comunicazione connesso si considerino $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))^T$ e il potenziale

$$S(q(t)) = \frac{1}{2} \langle q(t), L(G)q(t) \rangle.$$

$S(q)$ ammette minimo globale in $q(t) = q_0 \mathbf{1}$ per qualche $q_0 \in \mathbb{C}$. Considerando il controllo $u_i = \omega_0 + k \langle [L(G)]_i q(t), e^{j\theta_i(t)} \rangle$ per $k < 0$ il gruppo di unicicli raggiunge un consenso sui centri di rotazione e sulle fasi (modulo 2π). Con $[L(G)]_i$ si indica la i -esima riga del Laplaciano.

Robotica mobile

Quando si considerano agenti mobili non è più possibile caratterizzare i movimenti dei robot solo da condizioni di interazione che diano combinatoriche. Un accoppiamento tra geometria e aspetti combinatorici deve essere preso in considerazione.

Per poter considerare protocolli tipo consenso basati sulla geometria dell'interazione è necessario cambiare leggermente il protocollo. Per semplicità si considerino robot caratterizzati da una dinamica di tipo singolo integratore. Si consideri un grafo di interazione statico, una legge di controllo decentralizzata, tempo invariante è la seguente

$$u_i = \sum_{j \in N_\sigma(i)} f(x_i - x_j),$$

$N_\sigma(i) \subset N_i$ dove σ è una funzione indice tale che $\sigma(i, j) = \sigma(j, i) \in \{0, 1\}$ e determina se l'informazione che corre sull'arco (i, j) deve essere preso o meno in considerazione:

$$j \in N_\sigma(i) \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E \wedge \sigma(i, j) = 1$$

La legge di controllo viene assunta antisimmetrica:

$$f(x_i - x_j) = -f(x_j - x_i), \forall (v_i, v_j) \in E$$

L'ipotesi che f dipenda dal valore relativo degli stati è dovuta al fatto che spesso le informazioni raccolte dai sensori a bordo del robot sono informazioni relative. Inoltre questa ipotesi ci consente anche di concludere (sotto l'ipotesi di connettività del grafo) che il centroide dei robot è statico.

Il protocollo del consenso è ovviamente un caso particolare di queste leggi di controllo. Infatti, il protocollo del consenso si ottiene ponendo:

$$\begin{aligned} \sigma(i, j) &= 1 \\ f(x_i - x_j) &= -(x_i - x_j) \end{aligned}$$

Data la matrice di incidenza D di una orientazione del grafo, il Laplaciano risulta $L = DD^T$. Quando però gli agenti hanno stati a dimensione maggiore di uno è necessario operare componente per componente: dato $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,p})$ per $i = 1, \dots, n$ si considera il vettore $x = (x_1^T, \dots, x_n^T)^T$ e l'operatore

$$c(x, j) = (x_{1,j}, \dots, x_{n,j})^T \in \mathbb{R}^n \text{ per } j = 1, \dots, p.$$

Con questo operatore il protocollo del consenso diventa

$$\frac{d}{dt}c(x, j) = -Lc(x, j) \text{ per } j = 1, \dots, p.$$

Se G è connesso il protocollo converge (per ogni componente) al vettore $\mathbf{1}$. Si noti che la funzione $c(x, j)^T c(x, j)$ è una funzione di Lyapunov che garantisce l'asintotica convergenza.

Applicare tali leggi di controllo nel caso di reti dinamiche è possibile se la connettività del grafo viene garantita (non dimostrabile).