



Principi di bioingegneria

Lezione 1

Introduzione e analisi dimensionale

Gabriele Maria Fortunato

gabriele.fortunato@unipi.it



Docenti di riferimento

- Gabriele Maria Fortunato



gabriele.fortunato@unipi.it

- Vincenzo Catrambone



vincenzo.catrambone@unipi.it

Ricevimento su appuntamento su
piattaforma Microsoft Teams



Research Center E. Piaggio
University of Pisa

Obiettivi del corso

Obiettivo del corso è mostrare, attraverso esempi e mediante l'uso di supporti informatici quali Matlab e Simulink, come gli strumenti metodologici della Bioingegneria possano essere impiegati per comprendere, valutare funzionalmente e riprodurre sistemi biologici o parti di essi.

Outline del corso

- Introduzione alla bioingegneria e ruolo dell'ingegnere biomedico
- Cenni di biochimica (biomolecole, cellule e tessuti)
- Proprietà dei materiali e dei tessuti biologici
 - Proprietà meccaniche, elettriche, ottiche, elettromagnetiche
- Principi di misure, errori di misura, unità di misura e analisi dimensionale
- Acquisizione e analisi di biosegnali
- Acquisizione e analisi di bioimmagini
- Modellazione di processi e strutture fisiologiche
- Utilizzo del software Matlab

Orario delle lezioni

- Martedì 14:00-16:00
 - Aula C11
- Giovedì 11:30-14:30
 - Aula Si1

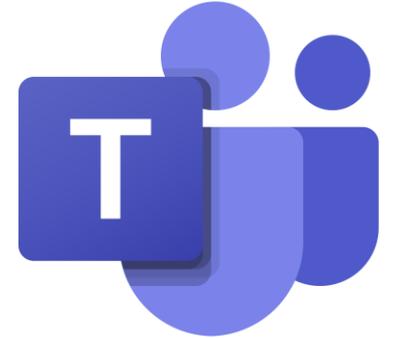
Modalità d'esame

- Prova scritta
 - Quesiti a risposta multipla + risposta aperta
- Prova orale
 - Consegna esercitazioni Matlab svolte durante il corso con domande sul software
 - Domande sul programma del corso

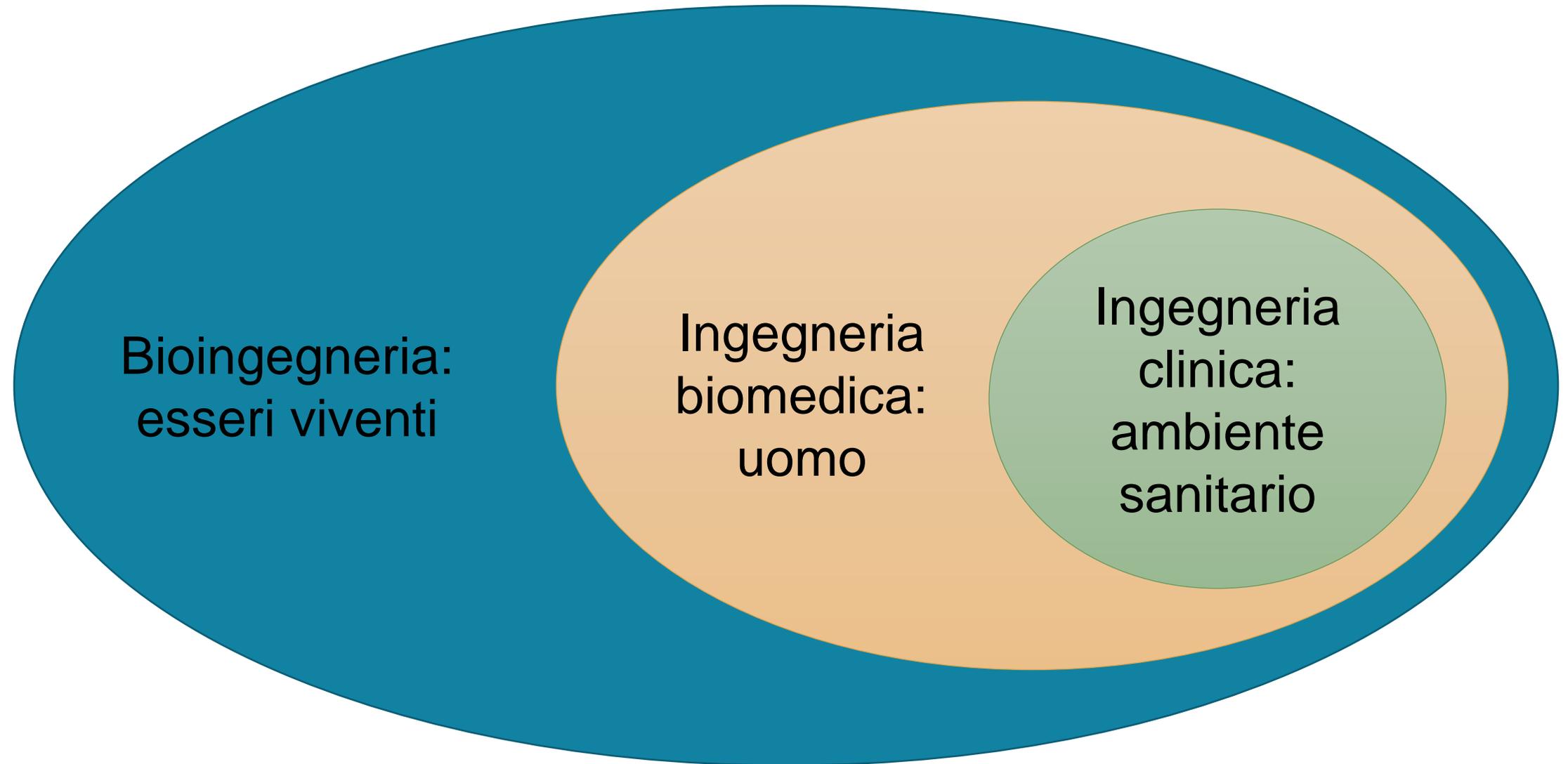
Materiale del corso

- Slide + materiale aggiuntivo

https://teams.microsoft.com/l/team/19%3a_XrhNXPTQvFmW_IGav9IHeC8m5CN-xPRaBJSOILR2sU1%40thread.tacv2/conversations?groupId=c0cbf8de-80a8-4637-9475-47d25c8f02eb&tenantId=c7456b31-a220-47f5-be52-473828670aa1



Ingegneria biomedica e bioingegneria



Ingegneria biomedica

- L'applicazione di concetti e tecnologie ingegneristiche alle indagini scientifiche sui fenomeni biologici come base per migliorare la comprensione dei sistemi biologici e delle pratiche mediche.
- L'utilizzo di concetti e tecnologie ingegneristiche nello sviluppo di materiali per la strumentazione, dispositivi diagnostici e terapeutici, organi artificiali e altri costrutti per applicazioni in biologia e medicina.
- L'applicazione dei concetti ingegneristici, della metodologia e della tecnologia al miglioramento dei sistemi di erogazione dei servizi sanitari nell'ampio contesto di istituzioni interconnesse, ospedali, cliniche, unità governative, università, industrie, ecc. e nei confini specifici dei singoli componenti del sistema sanitario.

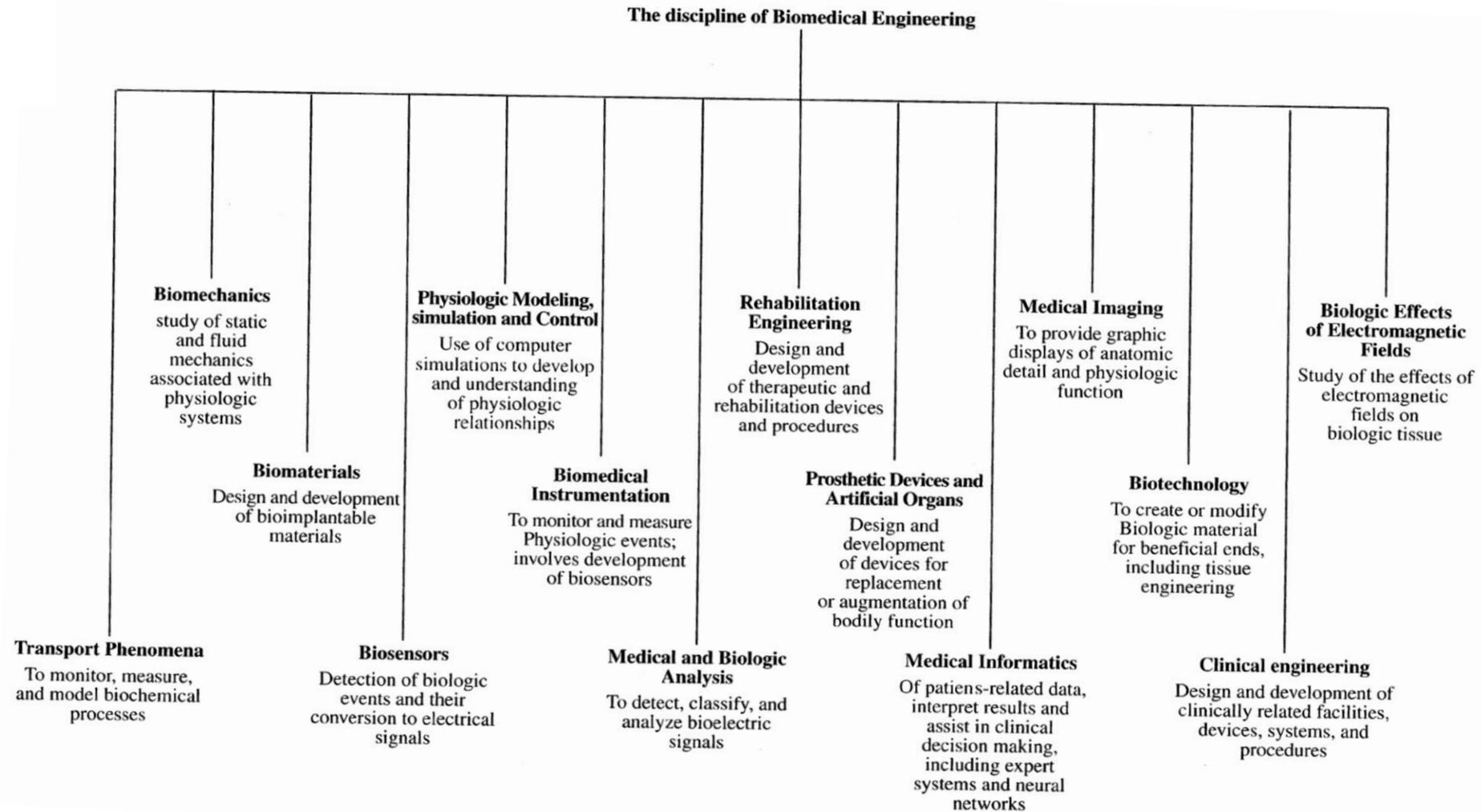
National Academy of Engineering (CIEBM, Report, 1971)

Ingegneria biomedica

- Gli ingegneri biomedici applicano i principi dell'ingegneria elettrica, meccanica, chimica, ottica e di altro tipo per comprendere, modificare o controllare i sistemi biologici (cioè umani e animali), nonché per progettare e fabbricare prodotti in grado di monitorare le funzioni fisiologiche e assistere nella diagnosi e nel trattamento dei pazienti. Quando gli ingegneri biomedici lavorano in un ospedale o in una clinica, sono più propriamente chiamati ingegneri clinici.

Bronzino, J.D. (Editor) Handbook of Biomedical Engineering

Ingegneria biomedica



Storia della Bioingegneria, a cura di E. Biondi, C. Cobelli,
Collana di Ingegneria Biomedica

Modelli in bioingegneria

- Hanno lo scopo di descrivere i fenomeni sotto osservazione e possono includere un livello più o meno alto di informazione sulla fisiologia
- Possono essere usati per controllo ma anche per interpretare il funzionamento di un sistema biologico

Mario Ursino, Uso dei Modelli interpretativi nell'elaborazione dei segnali biologici, in Metodi avanzati di elaborazione di segnali Biomedici, Sergio Cerutti, Carlo Marchesi, Patron Editore

Modelli matematici – Modelli descrittivi

- Vengono utilizzati per descrivere i segnali e in genere le misure che vengono prelevate dal sistema
- Creano una rappresentazione matematica del segnale prescindendo dalle caratteristiche del processo che ha generato
- Sono algoritmi universali, nel senso che possono essere applicati a tutti i segnali indipendentemente dalla loro origine

Modelli matematici – Modelli descrittivi

- Esempio: Trasformata di Fourier

$$X(k) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{N_0}} \quad 0 \leq k \leq N_0 - 1$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} X(k) e^{\frac{j2\pi kn}{N_0}} \quad 0 \leq n \leq N_0 - 1$$

- Limiti:
 - Si limitano a descrivere il segnale, rappresentandolo in un altro dominio. Non si fa nessuna ipotesi *a priori* sulla genesi del segnale.
 - Non possiedono la capacità di predire l'evoluzione del sistema

Modelli matematici – Modelli a scatola nera

- Cercano di creare una legge matematica con un numero minimo di parametri per descrivere un sistema
- Possono essere visti come sistemi ingresso-uscita con ingresso...
 - non legato ad un eventuale ingresso del sistema (rumore bianco, ovvero che contiene tutte le frequenze)
 - segnale misurato effettivamente presente all'ingresso del sistema
- In effetti in alcuni casi non è disponibile o accessibile un ingresso al sistema per cui si utilizza la strategia di avere un ingresso fittizio

Modelli matematici – Modelli a scatola nera

- Esempio: Modelli ARMA (Auto-Regressive Moving Average)

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) + \sum_{k=0}^q b(k)u(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(n-k)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^q b(k)z^{-k}}{\sum_{k=0}^p a(k)z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- Limiti:
 - La rappresentazione può essere complessa
 - Può essere complicato trovare il numero giusto di parametri (rischio di overfitting)
 - Non diretto legame tra struttura, parametri, e misura fisiologica

Modelli matematici – Modelli interpretativi

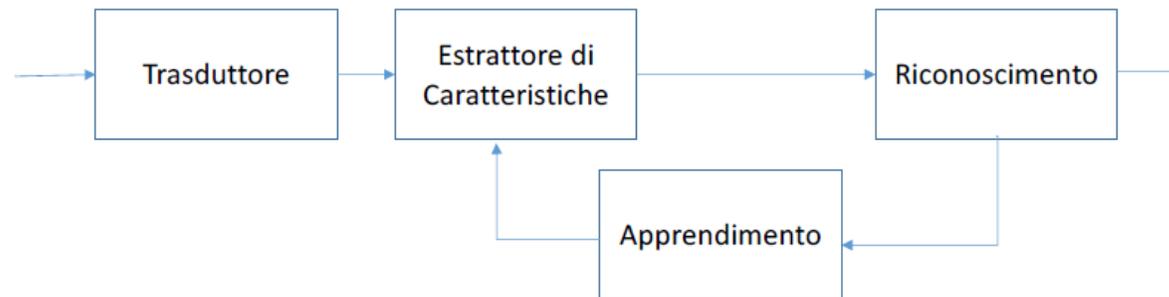
- Integrano la conoscenza su struttura e funzioni dei sistemi in esame.
- I modelli Anatomico-Fisiologici presentano una corrispondenza completa con i parametri anatomico-fisiologici del sistema sotto studio.
- Le equazioni che vengono utilizzate sono particolari, specifiche per il sistema sotto studio.
- I parametri di tale modello sono specificabili in termini anatomici o di proprietà fisico-chimiche direttamente misurabili

Mario Ursino, Uso dei Modelli interpretativi nell'elaborazione dei segnali biologici, in Metodi avanzati di elaborazione di segnali Biomedici, Sergio Cerutti, Carlo Marchesi, Patron Editore
Luigi Landini, Fondamenti di analisi di segnali biomedici, Plus Editore

Modelli matematici – Modelli interpretativi

- Modelli artificiali

- Questo modello matematico descrive apparati che hanno un funzionamento simile al sistema biologico sotto studio.
- Il modello anatomo funzionale viene tradotto in blocchi dei quali si conoscono le funzioni, analoghe a quelle del sistema biologico.
- Il funzionamento di ciascun blocco può essere derivato da ripetute misure sui sistemi che si vogliono riprodurre.



Luigi Landini, Fondamenti di analisi di segnali biomedici, Plus Editore

Modelli matematici – Modelli interpretativi

- Possibilità:
 - overfitting viene limitato dall'uso della conoscenza a priori
 - si conosce quindi il significato dei parametri
 - possibilità predittive anche nel singolo soggetto
 - interpretazione di sistemi complessi
- Limiti:
 - difficoltà di realizzazione per le limitate conoscenze delle proprietà chimico fisiche del sistema sotto studio
 - limiti nelle misure ad esempio legate al rumore
 - presenze di componenti che non sono state inserite nel modello
- Uso dei modelli per l'estrazione di informazioni dalle misure se il rapporto segnale/rumore è basso; se si cerca di aumentarlo aumentano la conoscenza sia del processo di misura che del sistema sottostante

Mario Ursino, Uso dei Modelli interpretativi nell'elaborazione dei segnali biologici, in Metodi avanzati di elaborazione di segnali Biomedici, Sergio Cerutti, Carlo Marchesi, Patron Editore
Luigi Landini, Fondamenti di analisi di segnali biomedici, Plus Editore

Grandezze fisiche

- Le grandezze fisiche sono grandezze **misurabili**.
 - Lunghezza, forza, volume ... (misurabili)
 - Depressione, aggressività, stanchezza ... (non misurabili)
- Le grandezze fisiche presuppongono una **unità di misura**.
 - Lunghezza ... **metro**
 - Massa ... **chilogrammo**

Misura di una grandezza

- La misura di una grandezza è il **rapporto** fra un'unità di misura e la grandezza stessa.
- Un ponte è lungo 30 metri perché è 30 volte più lungo del metro.
- Lo stesso ponte potrà essere misurato in centimetri e risulterà lungo 3000 cm. La lunghezza è la stessa quello che cambia è l'unità di misura.

Grandezze fondamentali

- Esistono tantissime unità di misura. In genere si sceglie di usare solo unità di misura che appartengono al **Sistema Internazionale (SI)**.
- Il SI è basato su **7 grandezze fondamentali** e sulle loro unità di misura

Grandezza fisica	Simbolo della grandezza	Nome dell'unità di misura	Simbolo dell'unità di misura
lunghezza	l	metro	m
massa	m	kilogrammo	kg
tempo	t	secondo	s
corrente elettrica	I	ampere	A
temperatura	T	kelvin	K
quantità di sostanza	n	mole	mol
intensità luminosa	iv	candela	cd

Grandezze derivate

- Tutte le altre grandezze sono dette **grandezze derivate**.
- Le unità di misura delle grandezze derivate possono essere ottenute come **prodotto o divisione** delle unità di misura fondamentali.

Grandezza fisica	Simbolo della grandezza	Nome dell'unità di misura	Simbolo dell'unità di misura
lunghezza	l	metro	m
massa	m	kilogrammo	kg
tempo	t	secondo	s
corrente elettrica	I	ampere	A
temperatura	T	kelvin	K
quantità di sostanza	n	mole	mol
intensità luminosa	iv	candela	cd

GRANDEZZE DERIVATE	
volume	m^3
densità	$kg\ m^{-3}$
forza	$kg\ m\ s^{-2}$ (newton)
velocità	$m\ s^{-1}$
pressione	$newton\ m^{-2}$ (pascal)
lavoro, energia, calore	$kg\ m^2\ s^{-2}$ (joule)
carica elettrica	$s \cdot ampere$ (coulomb)

Sistemi di unità di misura

- Nella pratica quotidiana esistono altri sistemi di unità di misura.
- Quando si eseguono dei **calcoli** bisogna utilizzare unità di misura dello stesso sistema di misura.

TABELLA 1.1 Esempi di unità in diversi sistemi di unità di misura

GRANDEZZE FONDAMENTALI	S.I.	C.G.S.	SISTEMI PRATICI
massa	chilogrammo	grammo	grammomolecola
lunghezza	metro	centimetro	angstrom
tempo	secondo	secondo	minuto, ora
corrente elettrica	ampere		

Sistema Internazionale delle Unità di misura (SI)

- L'attuale sistema di unità di misura è stato stabilito dalla 11° Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure nel 1960 che ha costituito il Sistema Internazionale delle Unità di misura (SI)
- Esistono altri sistemi, utilizzati per vari scopi, tra i quali:
 - le unità di misura CGS (centimetro-grammo-secondo) [Gauss–Elettrodinamica, fine '800]
 - le unità di misura MKS (metro-kilogrammo-secondo)
 - le unità di misura di Planck
 - il sistema consuetudinario USA
 - il sistema imperiale britannico
 - altri sistemi locali attuali e obsoleti:
 - le unità di misura cinesi
 - le unità di misura giapponesi
 - le unità di misura norvegesi
 - le unità di misura turche tradizionali



Stati Uniti di America, Liberia,
Birmania

Grandezze fondamentali

- Intervallo di tempo

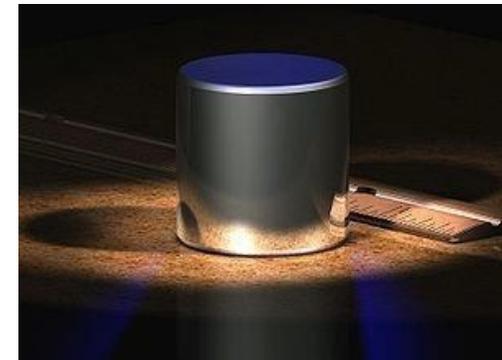
Il secondo è la durata di 9.192.631.770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione fra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo del cesio 133.

- Lunghezza

Il metro è la lunghezza del tragitto percorso dalla luce nel vuoto in un intervallo di $1/299\,792\,458$ di secondo. La velocità di propagazione della luce nel vuoto è una costante fondamentale della Fisica. Con la definizione del metro introdotta nel 1983, il suo valore è assunto come esatto (cioè privo di incertezza) e immodificabile: $c = 299\,792\,458$ m/s.

- Massa

Il kilogrammo è l'unità di massa; esso è pari alla massa del prototipo internazionale del kilogrammo. È l'unica unità fondamentale del SI basata su un campione artificiale. L'unità fondamentale di massa, contrassegnato con un K gotico, è un cilindro di platino-iridio di 38 mm di diametro e di altezza, custodito al Pavillon de Breteuil (Sevres, Francia) in una tripla teca sotto vuoto insieme ad altre 6 copie di riscontro. La precisione relativa del campione è dell'ordine di 10^{-9} .



Grandezze fondamentali

- **Temperatura**

Il kelvin , unità di temperatura termodinamica, è la frazione $1/273,15$ della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua. Lo stato termodinamico in cui sono in equilibrio le tre fasi di una sostanza, liquida, solida e gassosa, si dice punto triplo di quella sostanza. Il punto triplo dell'acqua si verifica ad una pressione di 610 Pa e ad una temperatura pari a $0,01 \text{ }^\circ\text{C}$. La precisione della determinazione della temperatura del punto triplo dell'acqua è di circa 1×10^{-6} .

$$1^\circ\text{C} = 274,15 \text{ K} \quad T=t+273,15 \quad t=\text{temperatura Celsius} \quad T=\text{temperatura Kelvin}$$

- **Quantità di sostanza**

La mole è la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in $0,012 \text{ kg}$ di carbonio 12 . Quando si usa la mole, le entità elementari devono essere specificate; esse possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, altre particelle, oppure raggruppamenti specificati di tali particelle.

Il Numero di Avogadro, il cui valore approssimato è $N_A = 6,022 \times 10^{23}$, è il numero di entità elementari che costituiscono 1 mole .

Grandezze fondamentali

- Intensità di corrente elettrica

L'ampere è l'intensità di una corrente elettrica costante che, mantenuta in due conduttori paralleli rettilinei di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile, posti alla distanza di un metro l'uno dall'altro nel vuoto, produrrebbe fra questi conduttori una forza eguale a 2×10^{-7} newton su ogni metro di lunghezza.

- Intensità luminosa

La candela è l'intensità luminosa, in una determinata direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza 540×10^{12} hertz e la cui intensità energetica in tale direzione è $1/683$ watt allo steradiante.

L'intensità luminosa è la grandezza fondamentale della fotometria.

- Angoli

Il radiante è l'angolo compreso tra due raggi di un cerchio i quali delimitano, sulla circonferenza del cerchio, un arco di lunghezza pari a quella del raggio.

$$\alpha^{(r)}(l = r) = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57,29578^\circ \approx 57^\circ 17' 44,8'' = 1 \text{ rad}$$

Grandezze derivate

- Le unità di misura delle grandezze derivate si ottengono mediante semplici operazioni aritmetiche a partire dalle unità di misura delle grandezze fondamentali.

Grandezze definite in meccanica

Grandezza	Unità	Simbolo	Espressione
Frequenza	hertz	Hz	$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$
Forza	newton	N	$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$
Pressione	pascal	Pa	$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$
Lavoro, energia	joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ N m}$
Potenza	watt	W	$1 \text{ W} = 1 \text{ J s}^{-1}$

Grandezze derivate

Grandezze definite in elettromagnetismo

Grandezza	Unità	Simbolo	Conversione
Carica elettrica	coulomb	C	$1 \text{ C} = 1 \text{ s A}$
Differenza di potenziale elettrico	volt	V	$1 \text{ V} = 1 \text{ W A}^{-1}$
Capacità elettrica	farad	F	$1 \text{ F} = 1 \text{ C V}^{-1}$
Resistenza elettrica	ohm	W	$1 \text{ W} = 1 \text{ V A}^{-1}$
Conduttanza elettrica	siemens	S	$1 \text{ S} = 1 \text{ W}^{-1}$
Flusso d'induzione magnetica	weber	Wb	$1 \text{ Wb} = 1 \text{ V s}$
Induzione magnetica	tesla	T	$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb m}^{-2}$
Induttanza	henry	H	$1 \text{ H} = 1 \text{ Wb A}^{-1}$

Grandezze definite in fotometria

Grandezza	Unità	Simbolo	Conversione
Flusso luminoso	lumen	lm	$1 \text{ lm} = 1 \text{ cd sr}$
Illuminamento	lux	lx	$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm m}^{-2}$

Unità di Misura e Sistema Internazionale Prefissi

- La stessa conferenza internazionale ha adottato dei prefissi per indicare i multipli e i sottomultipli dell'unità di misura (campione), cosa molto utile quando l'intervallo di valori che le diverse grandezze possono assumere è piuttosto ampio.
- Come appare dalla tabella che segue i multipli e sottomultipli differiscono di fattori 10, il Sistema Internazionale è quindi un sistema metrico decimale.

<u>Multipli</u>			<u>Sottomultipli</u>		
deca	10	da	deci	10^{-1}	d
etto	10^2	h	centi	10^{-2}	c
kilo	10^3	k	milli	10^{-3}	m
Mega	10^6	M	micro	10^{-6}	μ
Giga	10^9	G	nano	10^{-9}	n
Tera	10^{12}	T	pico	10^{-12}	p
Peta	10^{15}	P	femto	10^{-15}	f
Esa	10^{18}	E	atto	10^{-18}	a

Dimensioni ed analisi dimensionale

- Le dimensioni di una grandezza fisica sono associate con simboli, come M, L, e T che rappresentano massa, lunghezza e tempo, ciascuna elevata a un esponente razionale. Nell'ambito del Sistema internazionale di unità di misura (SI), sono state definite delle "unità fondamentali", ognuna associata ad una grandezza fisica, che oltre la massa, la lunghezza e il tempo, comprendono: l'intensità di corrente, la temperatura assoluta, la quantità di sostanza e l'intensità luminosa.
- Tutte le unità di misura sono riconducibili a queste unità fondamentali: per ogni grandezza fisica esiste un'equazione dimensionale che esprime la relativa unità di misura come prodotto delle potenze delle grandezze fisiche anzidette. Nell'analisi dimensionale le unità fondamentali vengono espresse dentro parentesi quadre. Riportiamo adesso alcune formule tipiche

Dimensioni ed analisi dimensionale

Quantità	Dimensione	Problema Verifica che è dimensionalmente consistente la formula: $x = x_0 + vt$ $[L] = [L] + [L T^{-1}][T]$ $[L] = [L] + [L T^{-1} T]$ $[L] = [L] + [L] \rightarrow \text{OK}$
Distanza	[L]	
Area	[L ²]	
Volume	[L ³]	
Tempo	[T]	
Velocità	[L T ⁻¹]	

Equazione dimensionale

- Non si possono sommare o eguagliare fra loro grandezze diverse. Si possono però moltiplicare fra loro due grandezze e sommarle ad una terza se il prodotto delle prime due ha la stessa unità di misura della terza.
- Per verificare l'unità di misura di una grandezza si usa l'equazione dimensionale. Ovvero si scompone la grandezza derivata in un prodotto delle grandezze fondamentali.

$$[X] = [M^a][L^b][t^c][I^d],$$

Esempi di analisi dimensionale

<i>Formula Fisica</i>	<i>Significato</i>	<i>Analisi dimensionale</i>
$v = \frac{s}{t}$	velocità	$[v] = \frac{[L]}{[T]}$
$a = \frac{v}{t}$	accelerazione	$[a] = \frac{[L]}{[T^2]}$
$F = ma$	forza	$[F] = [M][L][T^{-2}]$
$L = Fs$	lavoro	$[L] = [M][L^2][T^{-2}]$

Grandezza	Simbolo	Dimensione	Unità di misura
Superficie	S	$[L]^2$	metro quadrato(m ²)
Volume	V	$[L]^3$	metro cubo (m ³)
Densità	ρ	$[M][L]^{-3}$	kilogrammi su metri cubi (kg/m ³)
Velocità	v	$[L][t]^{-1}$	metri al secondo (ms ⁻¹)
Accelerazione	a	$[L][t]^{-2}$	metri al secondo quadrato (ms ⁻²)
Forza massa per accelerazione	F	$[M][L][T]^{-2}$	Newton (N)
Pressione forza su superficie	p	$[M][L]^{-1}[t]^{-2}$	Pascal (Pa)
Lavoro/Energia Forza per spostamento	L/E	$[M][L]^2[t]^{-2}$	Joule (J)
Potenza Lavoro o energia nell'unità di tempo	W	$[M][L]^2[t]^{-3}$	Watt (W)

Costanti in Fisica

- La Fisica è caratterizzata anche dall'esistenza di grandezze costanti (fisse). Queste costanti si dividono in costanti adimensionali e costanti dimensionali.
- Esempio di costante **adimensionale** è il numero $\pi = 3.1415\dots$ il rapporto fra la lunghezza della circonferenza di un cerchio ed il suo diametro.
- Esempio di costante **dimensionale** è la velocità della luce.

Costanti fondamentali

- Esistono poi delle costanti particolarmente importanti che si chiamano costanti fondamentali che compaiono nelle leggi più generali.

TABELLA 1.3 Costanti fondamentali della Fisica

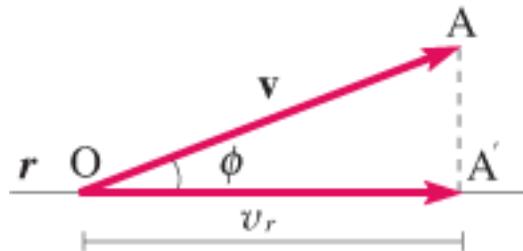
velocità della luce nel vuoto	$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
carica elettrica dell'elettrone	$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
massa dell'elettrone	$m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
massa del protone	$M = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
costante di Planck	$h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
numero di Avogadro	$N_o = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mole}^{-1}$
costante dei gas perfetti	$R = 8.3 \text{ J K}^{-1} \text{ mole}^{-1} = 0.082 \text{ litri atm K}^{-1}$
costante di Boltzmann	$k = R/N_o = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
costante di Faraday	$F = N_o e = 96\,487 \text{ C mole}^{-1}$
costante dielettrica del vuoto	$\epsilon_o = 8.86 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
costante gravitazionale	$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
permeabilità magnetica del vuoto	$\mu_o = 1.256 \cdot 10^{-6} \text{ kg m C}^{-2}$
costante di Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ watt m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
costante di Wien	$b = 2.897 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$
equivalente meccanico della caloria	$J = 4.18 \text{ joule/caloria}$

Grandezze scalari e vettoriali

- Una divisione fondamentale fra le grandezze è quella fra grandezze scalari e vettoriali.
- La massa è una grandezza scalare poiché è sufficiente un solo numero per caratterizzarla completamente.
- La velocità è una grandezza vettoriale poiché per definirla occorre anche dare la direzione ed il verso della grandezza. Le grandezze vettoriali si rappresentano con un vettore che ha la stessa direzione e verso della grandezza e una lunghezza proporzionale all'intensità (modulo) della grandezza.
- In alcuni casi (le forze) è importante definire anche il punto di applicazione del vettore ovvero la sua localizzazione.

Componente di un vettore

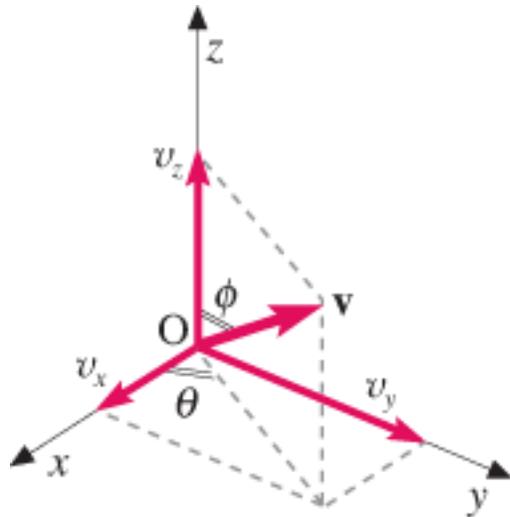
- Le grandezze vettoriali per distinguerle da quelle scalari sono indicate con lettere in grassetto V . La lunghezza del vettore (detto modulo) si indica con $|V|$ oppure semplicemente con v .
- La componente di un vettore V in una direzione r è la lunghezza della proiezione del vettore V nella direzione r . La lunghezza della componente è data dalla formula:



$$v_r = v \cos \phi$$

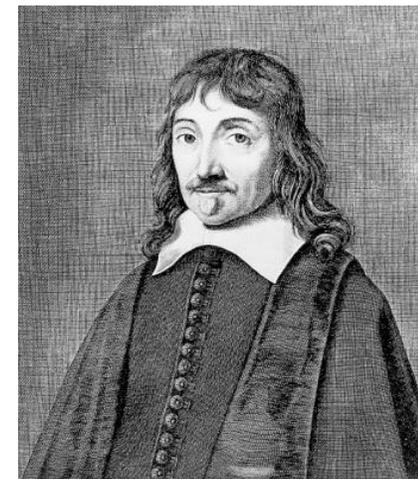
Componenti cartesiane

- Tre assi ortogonali fra loro sono detti **assi cartesiani**. Normalmente questi assi sono indicati con le lettere x,y,z. È possibile definire tre componenti di un vettore V rispetto ai tre assi mediate le seguenti relazioni.
- Specificando le **componenti cartesiane** di un vettore V rispetto ad un sistema di riferimento noto possiamo indicarne la direzione il verso e il modulo (lunghezza). In particolare il modulo non è altro che la radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti cartesiane del vettore



$$\begin{aligned}v_x &= |\mathbf{v}| \cos \theta \sin \phi \\v_y &= |\mathbf{v}| \sin \theta \sin \phi \\v_z &= |\mathbf{v}| \cos \phi\end{aligned}$$

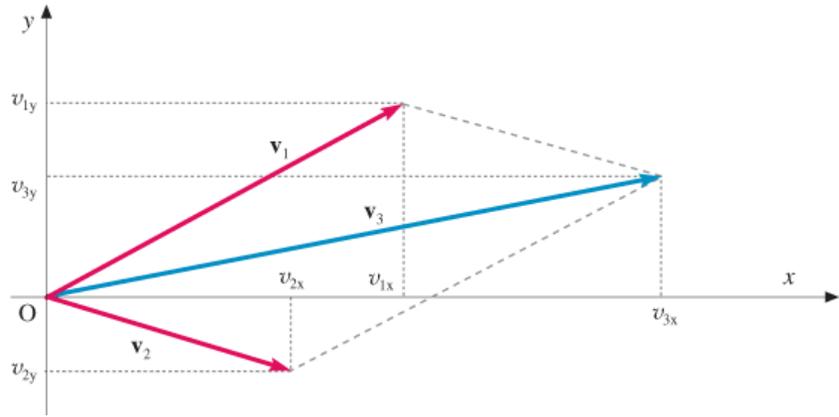
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$



Cartesio 1596-1650

Somma di vettori

- Il metodo delle componenti cartesiane permette in modo semplice di calcolare la **somma** e la **differenza** di vettori.

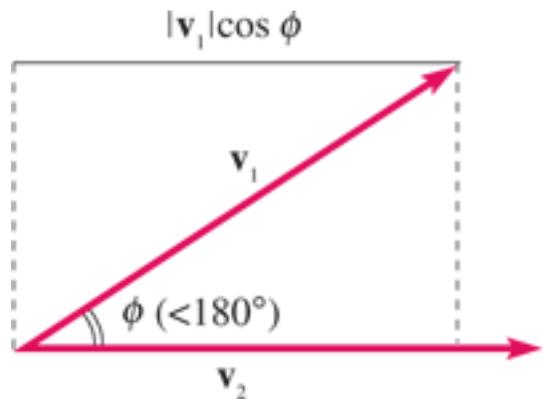


$$\begin{cases} v_{3x} = v_{1x} + v_{2x} \\ v_{3y} = v_{1y} + v_{2y} \\ v_{3z} = v_{1z} + v_{2z} \end{cases}$$

- Il vettore somma di due vettori ha come componenti la somma delle componenti dei vettori addendi.
- In pratica per sommare dei vettori basta **sommare** le loro **componenti**. Analogamente per la differenza di vettori.

Prodotto scalare di due vettori

- Il prodotto **scalare** di due vettori è una operazione che definisce un numero nella seguente maniera:



$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_1 v_2 \cos \phi.$$

- Il prodotto scalare può essere calcolato usando le componenti cartesiane semplicemente:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z}.$$

- Due vettori il cui prodotto scalare è **nullo** sono **ortogonali** fra loro.

Proprietà del prodotto scalare

- Il prodotto scalare gode delle proprietà **commutativa** e **distributiva**:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3$$

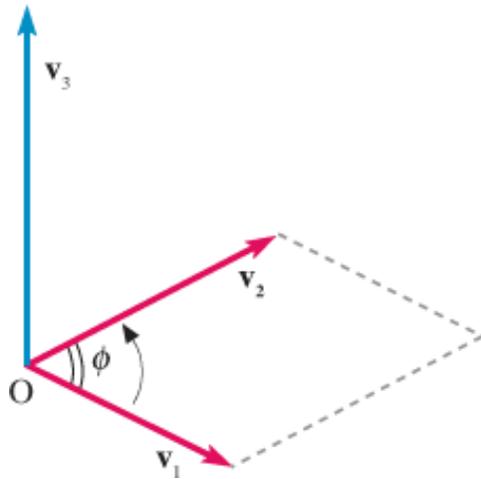
- Un esempio di utilizzo del prodotto scalare in Fisica è il calcolo del lavoro fatto da una forza:

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$$

- In questo caso il prodotto di **due grandezze vettoriali** ne genera una terza **scalare**.

Prodotto vettoriale di due vettori

- Il prodotto vettoriale di due vettori è una operazione che definisce un vettore **ortogonale** ai primi due con modulo definito nella seguente maniera:



$$|\mathbf{v}_3| = v_1 v_2 \sin \phi,$$

- Il prodotto vettoriale si indica con una \wedge rovesciata, o in alcuni testi con una \times .

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3.$$

- Il prodotto vettoriale può essere calcolato usando le componenti cartesiane usando la tabella:

$$\mathbf{v}_{3x} = \mathbf{v}_{1y} \mathbf{v}_{2z} - \mathbf{v}_{1z} \mathbf{v}_{2y}$$

$$\mathbf{v}_{3y} = \mathbf{v}_{1z} \mathbf{v}_{2x} - \mathbf{v}_{1x} \mathbf{v}_{2z}$$

$$\mathbf{v}_{3z} = \mathbf{v}_{1x} \mathbf{v}_{2y} - \mathbf{v}_{1y} \mathbf{v}_{2x}$$

Proprietà del prodotto vettoriale

- Il prodotto vettoriale è **anti-commutativo** e **distributivo**:

$$\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2.$$

$$\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3).$$

- Due vettori **paralleli** hanno il prodotto vettoriale **nullo**.
- Un esempio di utilizzo del prodotto vettoriale in Fisica è il calcolo della Forza di Lorentz:

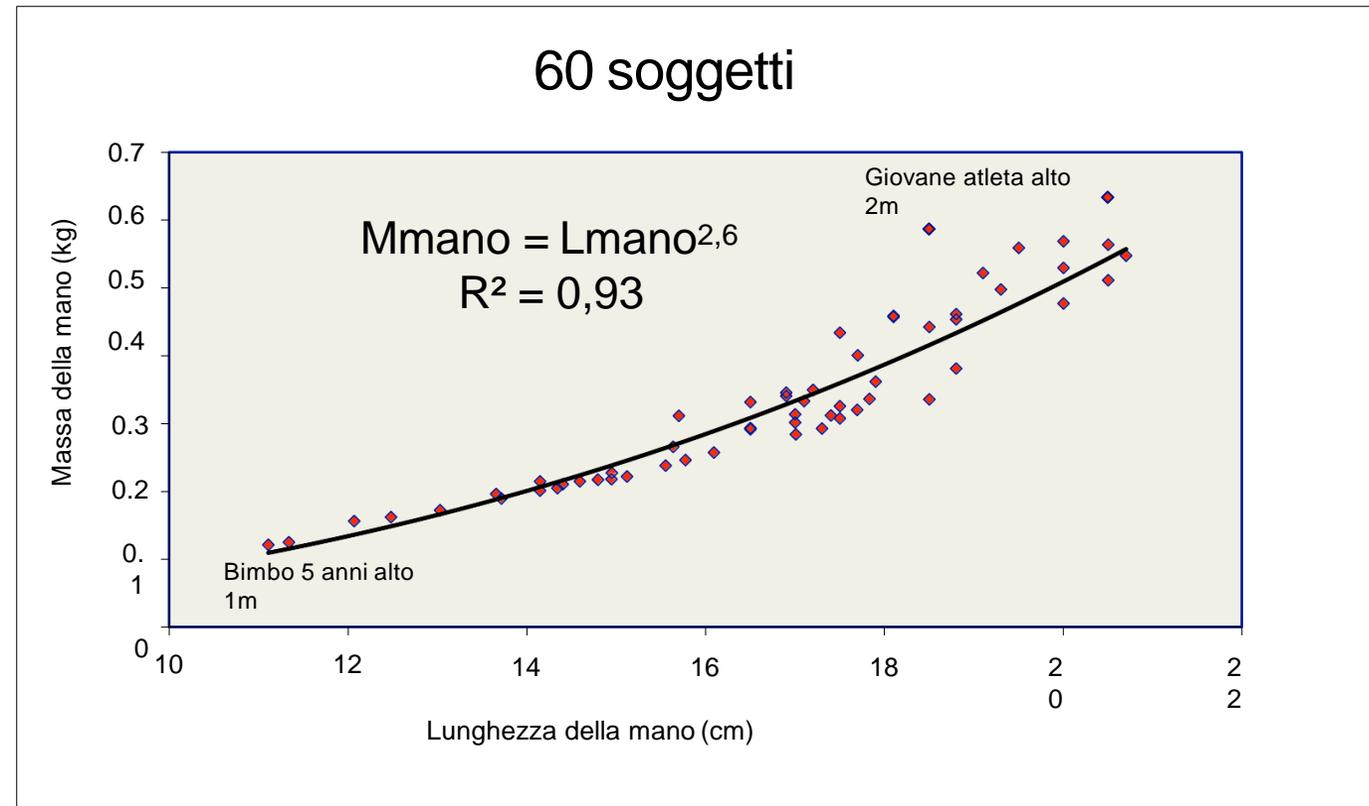
$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- In questo caso il prodotto di due grandezze vettoriali ne genera una terza vettoriale.

Il corpo umano

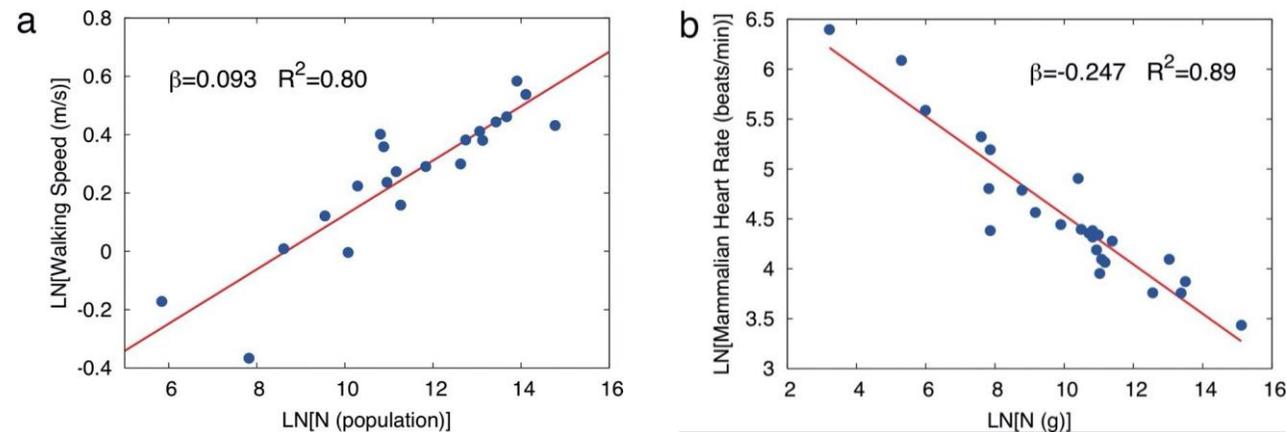
- Come sono correlate le dimensioni al corpo umano?
 - Definiscono le loro dimensioni e le capacità che possono esprimere

Mani geometricamente simili?
 $M=L^3$



Il corpo umano

- La cadenza del passo aumenta all'aumentare della grandezza della città in contrasto con la vita biologica dove la velocità (esempio battito cardiaco) diminuisce all'aumentare della grandezza dell'organismo



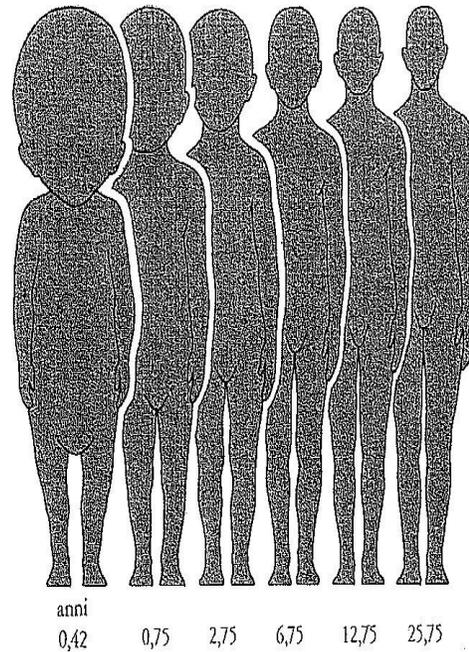
©2007 by National Academy of Sciences

Bettencourt L M A et al. PNAS 2007;104:7301-7306

PNAS

Relazione allometrica

Lo sviluppo umano indica un cambiamento della forma corporea con il passare degli anni.



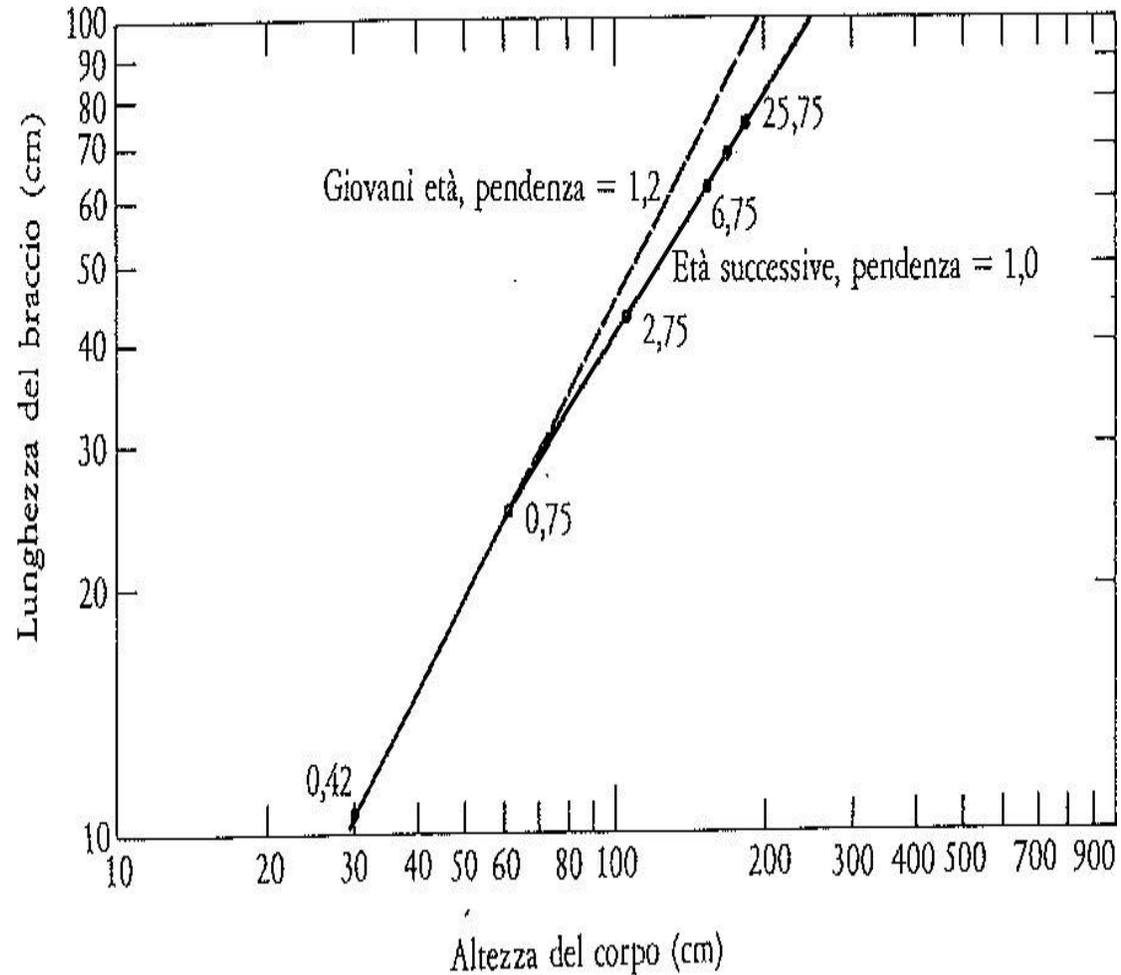
L'allometria studia spesso le differenze di forma in termini di rapporti delle dimensioni degli oggetti. Due oggetti di dimensioni diverse, ma di forma comune, avranno le loro dimensioni nello stesso rapporto.

Relazioni allometriche

- Equazioni allometriche: “misure diverse”
- Supponiamo che le dimensioni di due parti di un organismo, x e y , siano legate da una certa relazione:
 $Y = bx^a$ dove a e b sono costanti

Relazione allometrica

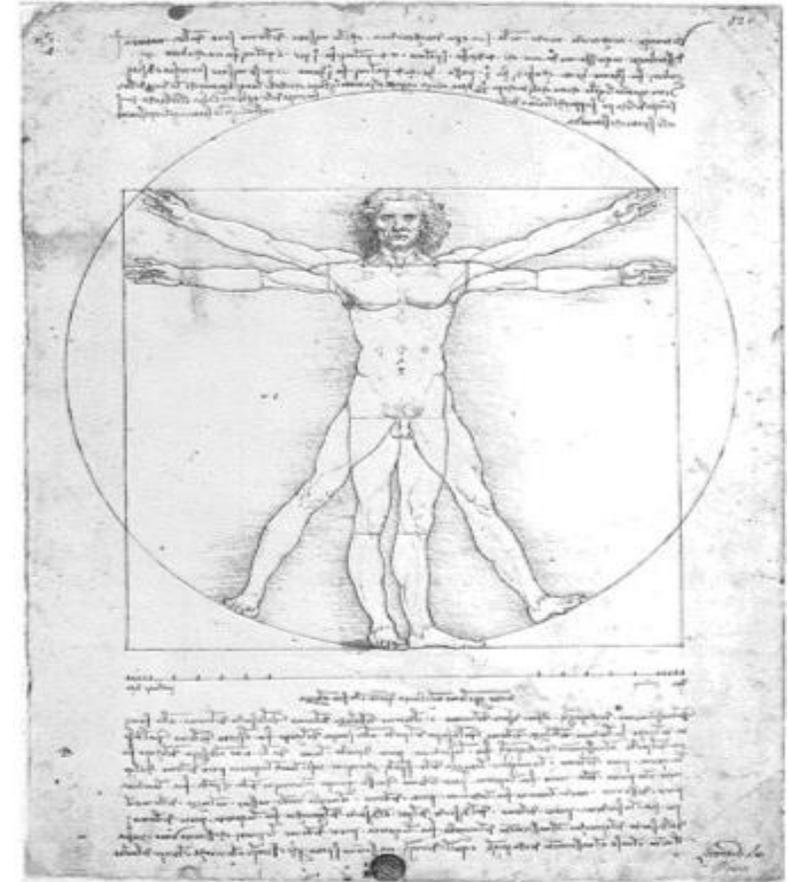
Lunghezza del braccio rispetto all'altezza del corpo, su un grafico allometrico. I punti, ripresi dall'illustrazione qui sopra, rappresentano le sei fasi dello sviluppo umano. Ai primi stadi corrisponde una retta con pendenza 1,2, più tardi la pendenza diventa 1,0. I numeri accanto ai punti si riferiscono all'età in anni.



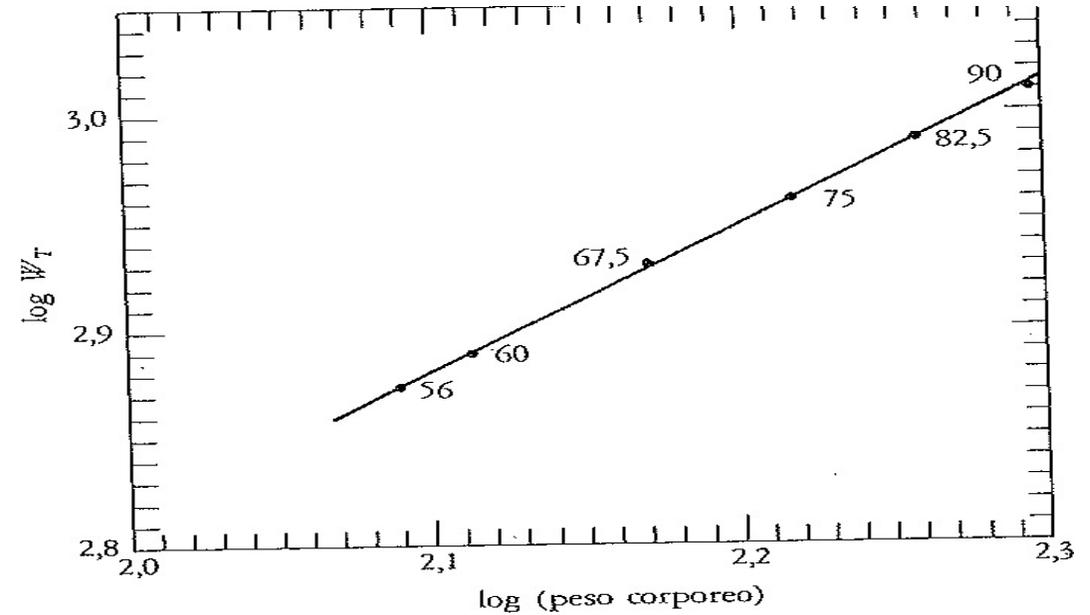
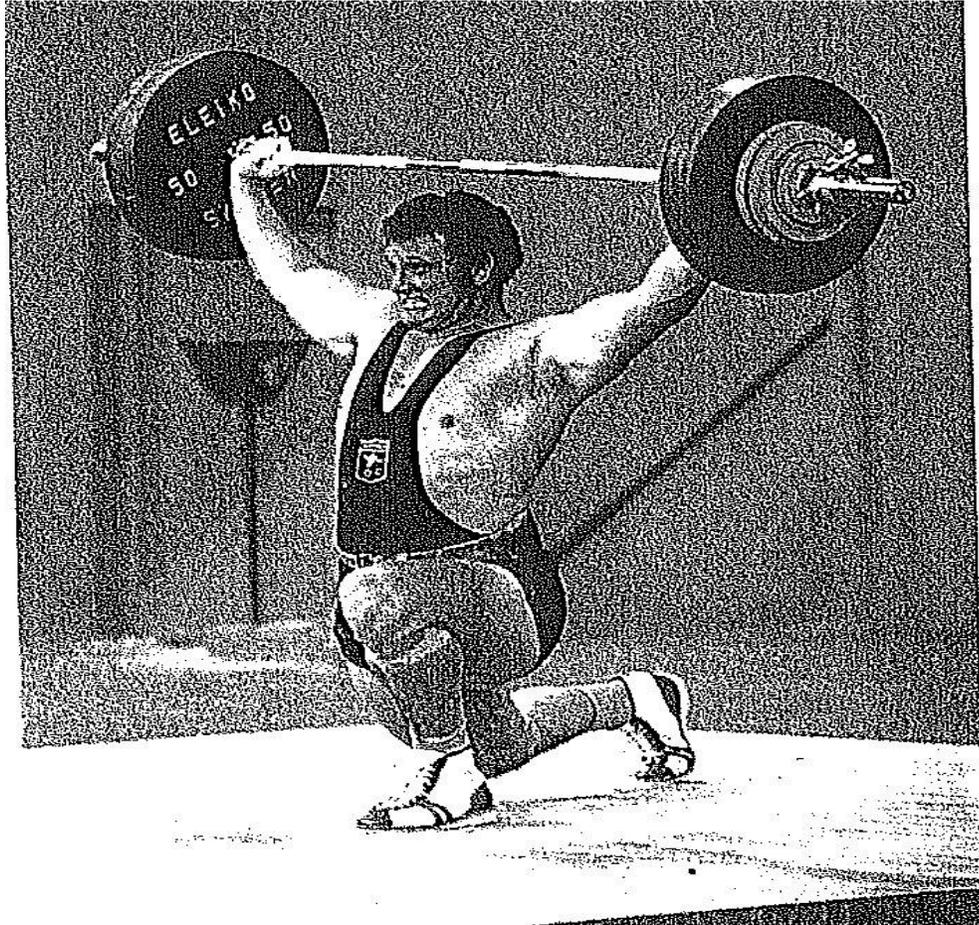
Proporzioni e dimensioni

- Equazioni isometriche: con misure uguali.
Quando l'esponente=1
- Si supponga che:
y=apertura delle braccia
X= altezza degli umani adulti
Y=X con a=1

In questo caso l'apertura delle braccia è direttamente
proporzionale all'altezza del soggetto



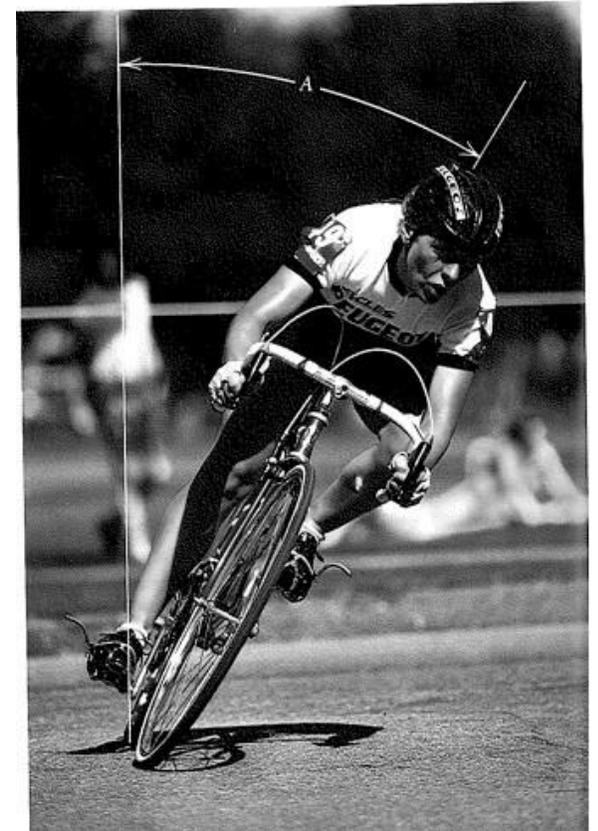
Analisi dimensionale nello sport



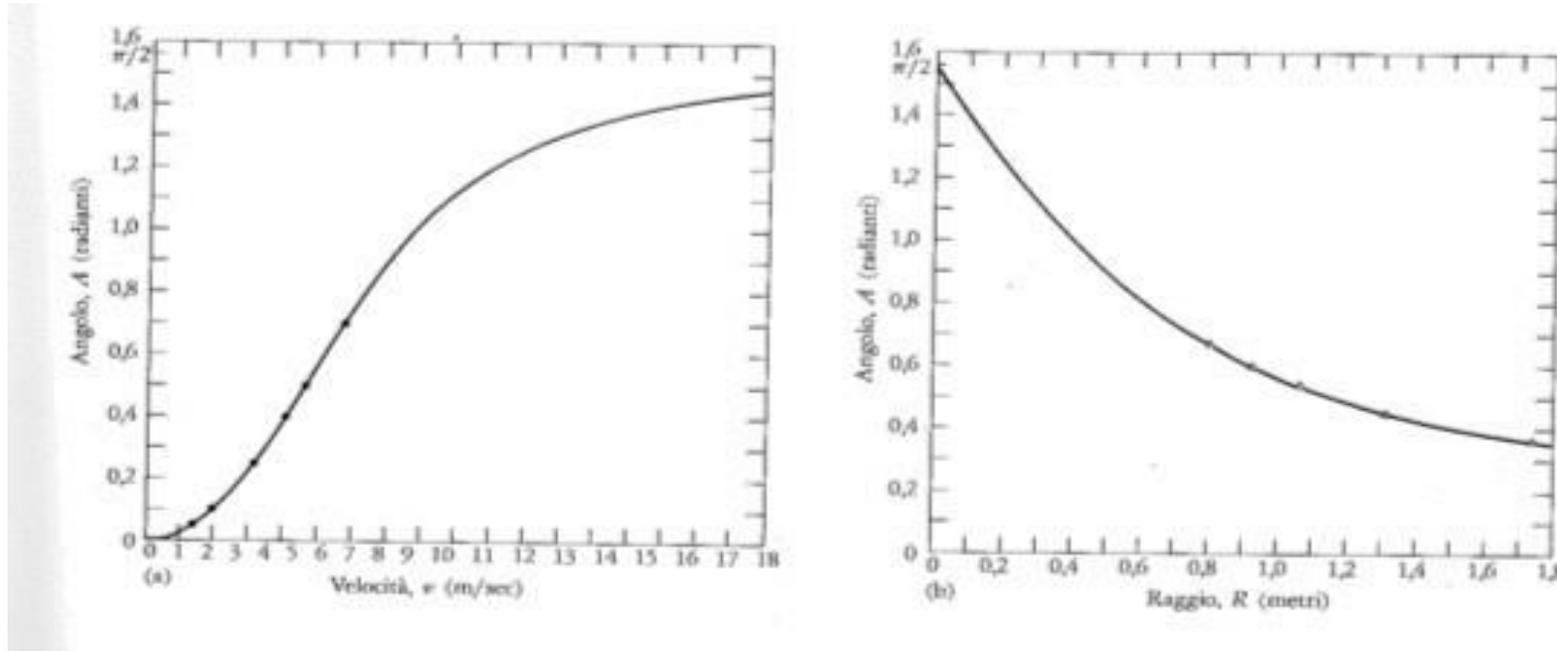
I record mondiali di sollevamento pesi, rappresentati da $\log W_T$, in funzione del logaritmo del peso corporeo. Qui W_T è il peso globale sollevato in tre prove: distensione, slancio e strappo. I numeri accanto a ogni punto indicano la categoria (espressa in kg).

Analisi dimensionale nello sport

- Ma a che cosa ci può servire oltre che a capire relazioni fra funzioni e grandezze?
- Mentre giriamo su di un cerchio di raggio R ad una velocità costante v la bicicletta si inclina di un angolo A
- Possiamo:
 1. mantenere R costante e variare v
 2. mantenere costante v e cambiare R
- Dopo diverse misurazioni abbiamo due curve:
 - In una l'angolo A aumenta con v , nell'altra A diminuisce all'aumentare di R

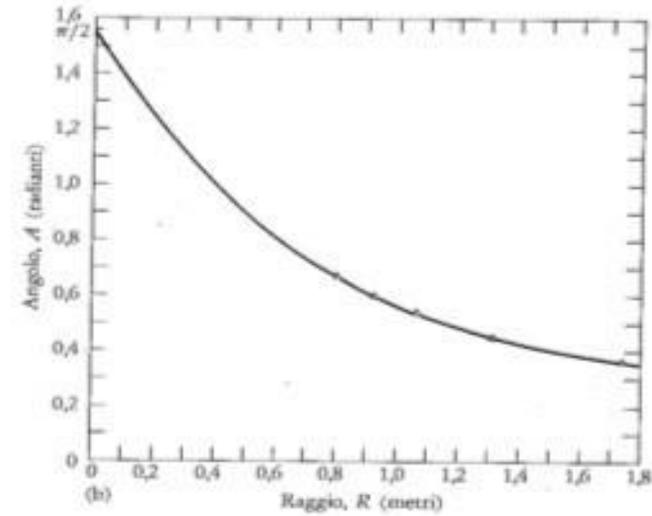
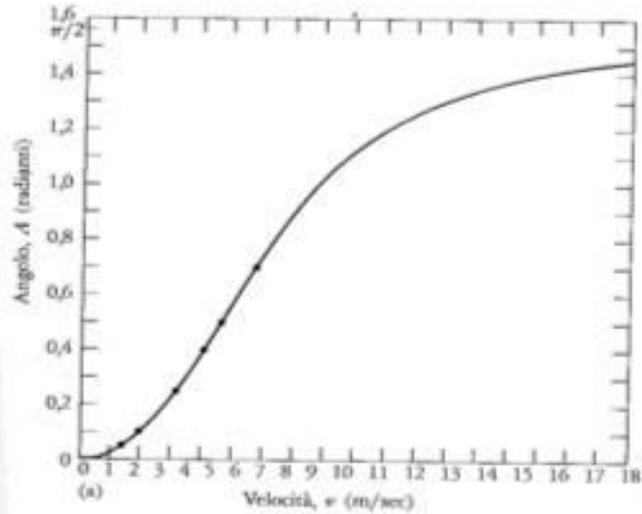


Analisi dimensionale nello sport



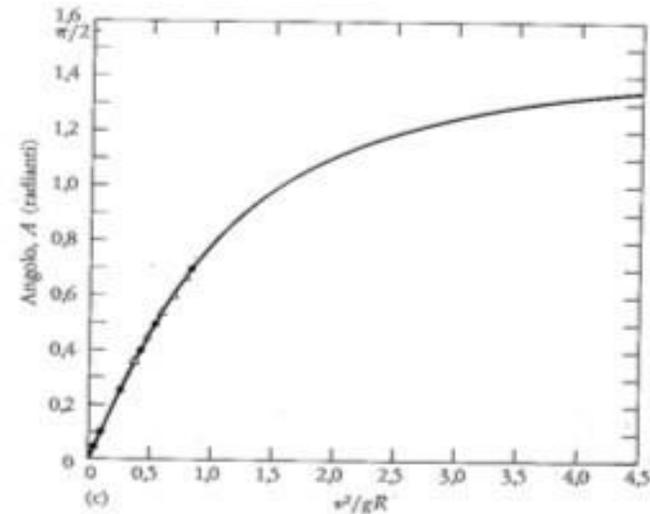
- Come fare per calcolare A in funzione di v e di R?
- Si dovrebbero fare un infinito numero di misure per ottenere un certo numero di curve e poi interpolarle fra loro!!!
- Troppo dispendioso!
- L'analisi dimensionale può risolvere il problema.

Analisi dimensionale nello sport



Schemi dei risultati ottenuti con gli esperimenti sulle biciclette: (a) angolo A riportato in funzione di v per R costante; (b) angolo A riportato rispetto a R per v costante; (c) angolo A riportato rispetto al gruppo adimensionale v^2/gR , in cui tutti i dati si dispongono su un'unica curva.

$$\frac{v^2}{gR}$$



Relazione a-dimensionale

- Numero puro: V^2/gR

- $V^2 = (L/T)^2$

- $g = L/T^2$

- $R = L$

$$\frac{V^2}{gR}$$

Tutte le dimensioni si elidono!

Quale la sua utilità?

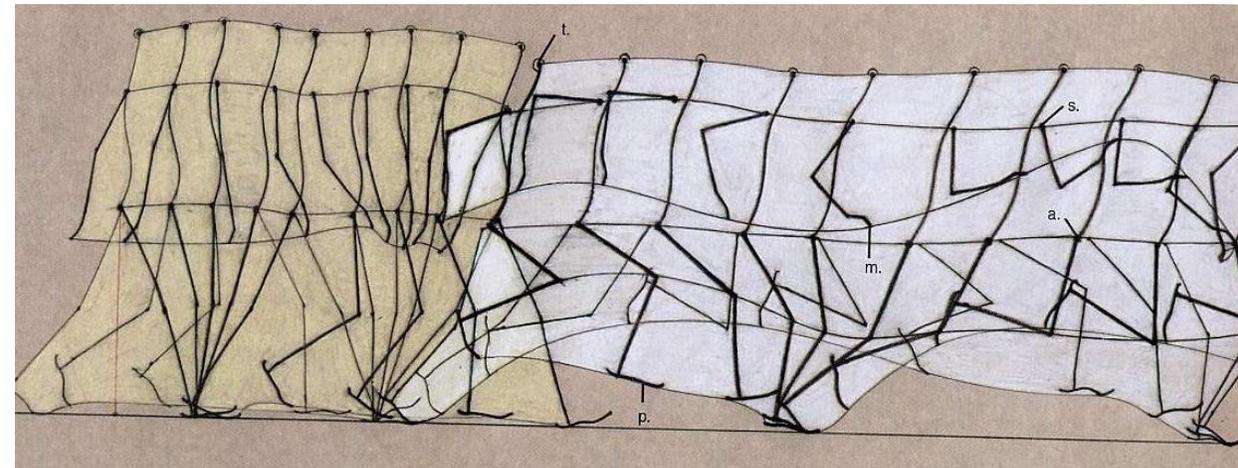
- Ora possiamo stabilire a caso i valori di v e R utilizzare la formula e dedurre A dal grafico
- Non siamo più costretti a fare un gran numero di esperimenti
- Inoltre abbiamo inserito g che ci permetterebbe di calcolare la relazione anche sulla luna!

Esempio

- Perché ad una certa velocità anziché camminare corriamo?
 - Variabili importanti:
 - Velocità (v)
 - g (gravità)
 - L (lunghezza arto inferiore)
- Perché dobbiamo correre anziché camminare più velocemente?
 - I vincoli meccanici non ce lo permettono!
 - Se camminando velocemente arriviamo ad una certa velocità, siamo costretti a correre

$$\frac{v^2}{gL}$$

- Adulto arto inferiore 0.8 m (L)
 - cambia camminata a corsa a 2,8 m/s
- Bambino arto inferiore 0.5m (L)
 - cambia camminata a corsa a 2,2 m/s



Implicazioni teoriche

- Dall'analisi dimensionale emerge che:
 - Parametri corporei e velocità scalano
 - Il movimento può essere definito da vincoli meccanici ed energetici