Esercizio 1.

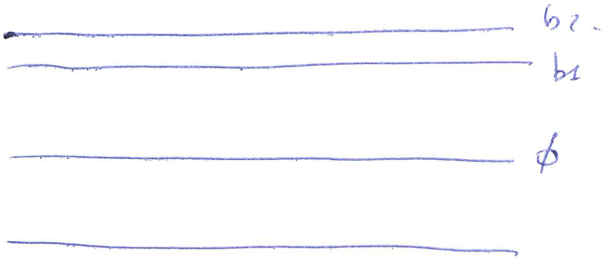
$$\begin{cases} \dfrac{\partial c'}{\partial t} = D_2 \dfrac{\partial^2 c'}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} = D_1 \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} + k'(y_0 - y) + k c y \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = D_{Hb} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + k'(y_0 - y) + k c y \end{cases}$$

Poiché l'ambiente è saturo di CO vuol dire che la quantità di CO che arriva in prossimità del globulo rosso è costante e pari a C_0

quindi $\dfrac{\partial c'}{\partial t} = \dfrac{\partial c}{\partial t} = \emptyset$

La reazione dei globuli rossi con il CO è irreversibile quindi $k' = \emptyset$

$D_{Hb} = \emptyset$



Il sistema diventa

$$\begin{cases} (1) \quad D_2 \dfrac{\partial^2 c'}{\partial x^2} = \emptyset \\ (2) \quad D_1 \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} = -k c y \\ (3) \quad \dfrac{\partial y}{\partial t} = -k c y \end{cases}$$

Risolvo prima equazione

$$D_1 \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} = \emptyset \Rightarrow \frac{\partial c'}{\partial x} = A \Rightarrow c' = Ax + b.$$

so che $c'(b_1+b_2, \phi) = c_0$

$c'(b_1, \phi) = \phi$

$c'(x,t) = \frac{c_0}{b_2}(x - b_1)$ tempo invariante come ci si aspettava.

So inoltre che

$D_2 \frac{\partial c'}{\partial x} = \alpha D_1 \frac{\partial c}{\partial x}$ $\forall t$ vuol dire che passa attraverso la membrana del globulo rosso

$\Rightarrow$ Derivando c' ottenuto ho

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{D_2}{\alpha D_1}\frac{c_0}{D_2} \Rightarrow c(x,t) = \frac{D_2 c_0}{D_1 \alpha b_2} x + B.$$

$$c(b_1, \phi) = \phi \Rightarrow \phi = \frac{D_2 c_0}{D_1 \alpha b_2} b_1 + B$$

$$\Rightarrow B = -\frac{D_2 c_0}{D_1 \alpha b_2} \Rightarrow C(x,t) = \frac{D_2 c_0}{D_1 \alpha b_2}(b_1 - x)$$

anche questo tempo invariante come ci si aspettava

Considero le 3 equazioni

$$\frac{dy}{dt} = -kcy \Rightarrow \frac{\partial y}{y} = -kc\,dt$$

$\int \frac{dy}{y} = -kc \int dt$ posso farlo perché è tempo invariante

$$\ln y \Big|_{y(t=\emptyset)}^{y(t=t^*)} = \ln \frac{y}{y_0} = \frac{K D_2 C_0}{D_1 d b_2} (b_1 - x) \cdot t$$

$$\Rightarrow \quad y = y_0 \, e^{\frac{K D_2 C_0}{D_1 d b_2} (b_1 - x) \cdot t}$$

Esercizio n° 2

Eguaglio i due coefficienti di estrazione

$$E_{\text{controcorrente}} = \frac{1 - e^{N_T(1-z)}}{z - e^{N_T(1-z)}} = E_{\text{riso}} = \frac{1 - e^{-N_T}}{1 + z(1 - e^{-N_T})}$$

Risolvo

$$1 + z - z e^{-N_T} - e^{N_T(1-z)} - z(1 - e^{-N_T}) e^{N_T(1-z)} =$$
$$z - e^{N_T(1-z)} - z e^{-N_T} + e^{-N_T} \cdot e^{N_T(1-z)}$$

$$1 - z e^{N_T(1-z)} + z e^{-N_T} e^{N_T(1-z)} = e^{-z N_T}$$

$$1 - z e^{N_T(1-z)} + z e^{N_T z} = e^{-z N_T}$$

moltiplico per $e^{z N_T}$

$$e^{z N_T} - z e^{N_T} + z = 1 \qquad \text{approssimo in serie di Taylor}$$

$$1 + z N_T - z(1 + N_T) + z = 1 \qquad \text{sempre verificata}$$

ciò vuol dire che per $t \simeq 0$ $K_t \simeq 0$ è vero quindi per

ogni $Q_D >> Q_B$ e $K_t \simeq 0$ ~~pesso~~ i due sistemi sono equivalenti.

Esercizio n° 3.

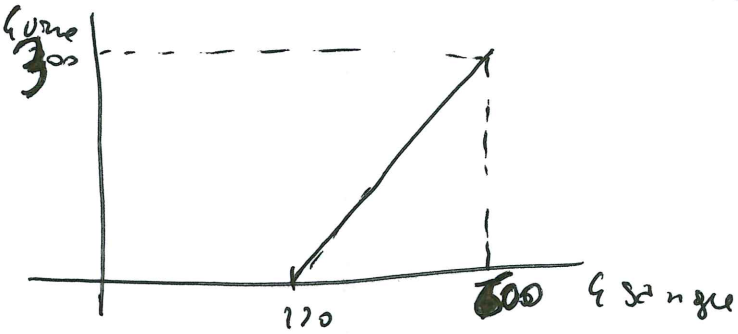
Gli zuccheri introdotti sono il 40% del gelato quindi 200 g., poiché vanno nel sangue

$$G(\phi) = G_B + \frac{200 \cdot 1000}{50} = 100 \frac{mg}{dl} + 4000 \frac{mg}{dl} = 4100 \frac{mg}{dl}$$

Questo valore supera la soglia di 220 $\frac{mg}{dl}$ per l'escrezione renale.

Quindi nel caso il rene funziona

mi calcolo la pendenza della curva



la $G_U = \frac{3}{4}(G_S - 220)$

$$G(15\,min) = G(0) - G_{pancreas} - G_{renale}$$

$$G(15\,min) = G(0) - \frac{1}{4}\,4100 - \frac{3}{4}(4100 - 220) = 165 \frac{mg}{dl}$$

da questo momento il rene ha filtrato l'eccesso ed agisce solo il pancreas

$$G(30\,min) = G(15\,min) - G_{pancreas}$$

$$G(30) = 165 - \frac{1}{4}\,165 = 123.75 \frac{mg}{dl}$$

dal 45 minuto siamo già in condizione basale.

$I(0) = I_B + \Delta I = 2\,\frac{\mu g}{dl} + 2\,\frac{\mu g}{dl} = 4\,\frac{\mu g}{dl}$

$I(15) = 4 - \frac{1}{4} I(0) = 4 - \frac{1}{4} \cdot 4 = 3\,\frac{\mu g}{dl}$

$I(30) = 3 - \frac{1}{4} I(15) = 3 - \frac{1}{4}\, 3 = 2.25$

dal 45 minuto anche la Insulinemia si è riportata in condizioni basali.

Se il rene non funziona

$G(t) = G(t-1) - G\ \text{pancreas}$

$I(t) = I(t-1) - I\ \text{pancreas}$

$G(0) = 4100\,\frac{mg}{dl}$ $\qquad$ $I(0) = 4\,\frac{\mu g}{dl}$

$G(15) = 4100 - \frac{1}{4}\, 4100 = 3075\ mg/dl$ $\qquad$ $I(15) = 4 - \frac{1}{4}\, 4 = 3\ \mu g/dl$

$G(30) = 3075 - \frac{1}{4}\, 3075 = 2306\ mg/dl$ $\qquad$ $I(30) = 3 - \frac{1}{4}\, 3 = 2.25$

$G(45) = 2306 - 567.5 \simeq 1730\ mg/dl$ $\qquad$ Dal $I(45)$ si mantiene al valore basale

$G(60) = 1730 - 432.5 \simeq 1297.5\ mg/dl$

$G(75) = 1297.5 - 324.5 \simeq 973\ mg/dl$

$G(90) = 973 - 243 = 730\ mg/dl$

$G(105) = 730 - 182 = 548\ mg/dl$

$G(120) = 548 - 137 = 411\ mg/dl$

$G(135) = 411 - 103 = 308\ mg/dl$

$G(150) = 308 - 77 = 231\ mg/dl$

$G(165) = 231 - 58 = 173\ mg/dl$

$G(180) = 173 - 43 = 130\ mg/dl$

Dopo questo momento $G(t)$ si porta al basale

Perché dopo 2 ore ne viene erogata

$I(120) = I_B + 2\Delta I = 6\ \mu g/dl$

$I(135) = 6 - \frac{1}{4}\, 6 = 4.5\ \mu g/dl$

$I(150) = 4.5 - \frac{1}{4}\, 4.5 = 3.4\ \mu g/dl$

$I(165) = 3.4 - \frac{1}{4}\, 3.4 = 2.55\ \mu g/dl$

$I(180) = 2.55 - 0.64 \simeq 1.9$

I si riporta in condizioni basali

Esercizio 4

a) Vedere appunti in rete

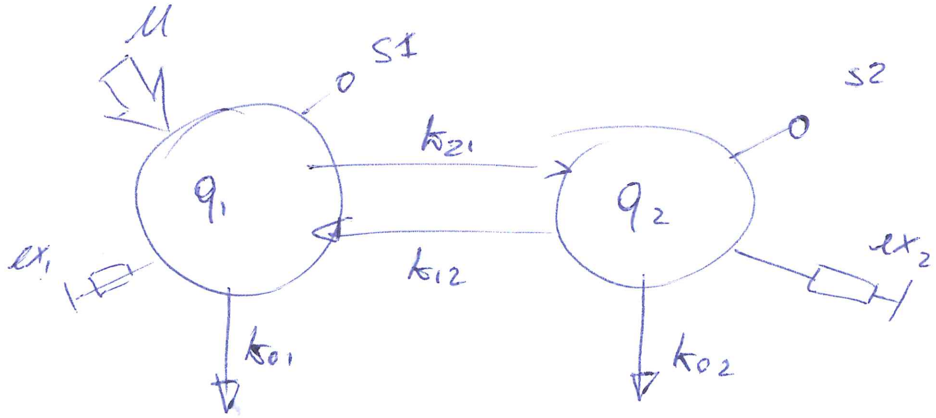
b) limiti:

1) facile saturazione
2) non reversibilità del senso
3) difficoltà di orientazione
4) invecchiamento
5) variabilità con la temperatura.

Correzione esercizio 5

Modello bicompartimentale

2 ingressi, 2 uscite $\Rightarrow$ 4 funzioni di trasferimento



$\rightarrow$ Cinetica del tracciato

sistema allo stazionario

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = -(k_{01}+k_{21})Q_1 + k_{12}Q_2 + u = 0 \\ \dot{Q}_2 = -(k_{02}+k_{12})Q_2 + k_{21}Q_1 = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Cinetica del tracciante

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -(k_{01}+k_{21})q_1 + k_{12}q_2 + ex_1 \\ \dot{q}_2 = +k_{21}q_1 - (k_{02}+k_{12})q_2 + ex_2 \\ s_1 = q_1/V_1 \\ s_2 = q_2/V_2 \end{cases}$$

Funzioni di trasferimento

→ trasformata di Laplace

$$\begin{cases} sQ_1 = -(k_{01}+k_{21})Q_1 + k_{12}Q_2 + Ex_1 \\ sQ_2 = +k_{21}Q_1 - (k_{02}+k_{12})Q_2 + Ex_2 \\ S_1 = Q_1/V_1 \\ S_2 = Q_2/V_2 \end{cases}$$

→ metodo matriciale

$$A = \begin{bmatrix} -(k_{01}+k_{21}) & k_{12} \\ k_{21} & -(k_{02}+k_{12}) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \qquad \bar{Ex} \begin{bmatrix} Ex_1 \\ Ex_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1/V_1 & 0 \\ 0 & 1/V_2 \end{bmatrix} \qquad \bar{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} s\bar{Q} = A\bar{Q} + B\bar{E}_x \\ \bar{S} = C\bar{Q} \end{cases}$$

$\rightarrow \bar{Q} = (sI - A)^{-1} B \bar{E}_x$

$\rightarrow \bar{S} = C(sI - A)^{-1} B \bar{E}_x$

$\Rightarrow$ Funzione di trasferimento

$$H = C(sI - A)^{-1} B$$

$$H = \begin{bmatrix} 1/V_1 & 0 \\ 0 & 1/V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + k_{01} + k_{21} & -k_{12} \\ -k_{21} & s + k_{02} + k_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ inversa della matrice $(sI - A)$

$\rightarrow$ determinante $= (s + k_{01} + k_{21})(s + k_{02} + k_{12}) - k_{12}k_{21}$

$= s^2 + s(k_{01} + k_{21} + k_{02} + k_{12}) +$

$+ k_{01}k_{02} + k_{01}k_{12} + k_{21}k_{02} + \cancel{k_{12}k_{21}} - \cancel{k_{12}k_{21}}$

$= s^2 + s(k_{01} + k_{21} + k_{02} + k_{12}) +$

$+ k_{01}k_{02} + k_{01}k_{12} + k_{02}k_{21} = DET$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+k_{02}+k_{12}}{DET} & \frac{k_{12}}{DET} \\ \frac{k_{21}}{DET} & \frac{s+k_{01}+k_{21}}{DET} \end{bmatrix}$$

n.b. il prodotto tra matrici è associativo

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{V_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{V_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+k_{02}+k_{12}}{DET} & \frac{k_{12}}{DET} \\ \frac{k_{21}}{DET} & \frac{s+k_{01}+k_{21}}{DET} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{V_1}\,\frac{s+k_{02}+k_{12}}{DET} & \frac{1}{V_1}\,\frac{k_{12}}{DET} \\ \frac{k_{21}}{V_2}\cdot\frac{1}{DET} & \frac{1}{V_2}\,\frac{s+k_{01}+k_{21}}{DET} \end{bmatrix}$$

dove ~~de~~ DET è il determinante di $(sI-A)$ calcolato prima

→ si hanno 4 funzioni di trasferimento che condividono lo stesso denominatore

→ per valutare l'identificabilità utilizzo il metodo della matrice della funzione di trasferimento

Vettore dei parametri

$$p = [\, V_1,\ V_2,\ k_{01},\ k_{02},\ k_{12},\ k_{21} \,]^T \Rightarrow 6 \text{ parametri}$$

$$H_{11} = \frac{\beta_2^{11} s + \beta_1^{11}}{s^2 + \alpha_2 s + \alpha_1} \quad ; \quad H_{12} = \frac{\beta_1^{12}}{s^2 + \alpha_2 s + \alpha_1}$$

$$H_{21} = \frac{\beta_1^{21}}{s^2 + \alpha_2 s + \alpha_1} \quad ; \quad H_{22} = \frac{\beta_2^{22} s + \beta_1^{22}}{s^2 + \alpha_2 s + \alpha_1}$$

$$\beta_2^{11} = \frac{1}{V_1} \quad ;$$

$$\alpha_2 = k_{01} + k_{21} + k_{02} + k_{12}$$

$$\beta_1^{11} = \frac{k_{02} + k_{12}}{V_1}$$

$$\alpha_1 = k_{01} k_{02} + k_{01} k_{12} + k_{02} k_{21}$$

$$\beta_1^{12} = k_{12}/V_1$$

$$\beta_1^{21} = k_{21}/V_2$$

$$\beta_2^{22} = 1/V_2$$

$$\beta_1^{22} = \frac{k_{01} + k_{21}}{V_2}$$

$$G = \begin{bmatrix} -\frac{1}{V_1^2} & -\frac{k_{02}+k_{12}}{V_1^2} & -\frac{k_{12}}{V_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k_{21}}{V_2^2} & -\frac{1}{V_2^2} & -\frac{k_{01}+k_{12}}{V_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/V_2 & 1 & k_{02}+k_{12} \\ 0 & 1/V_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k_{01}+k_{21} \\ 0 & 1/V_1 & 1/V_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & k_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 1/V_2 & 0 & 1/V_2 & 1 & k_{02} \end{bmatrix}$$

G è una matrice 6×8

il sistema è identificabile se

$\text{rank}(G) \geq 6$ = lunghezza vettore dei parametri

→ si cerca di trovare un minore di ordine 6

→ lavoro sulle prime 6 colonne

→ matrice 6×6

→ calcolo il determinante con il metodo di Laplace

$$\left(-\frac{1}{V_1^2}\right) * \left(+\frac{1}{V_2^2}\right) * \left(\frac{1}{V_2}\right) * \left(-\frac{1}{V_2}\right) * \left(+\frac{1}{V_1^2}\right)$$

$$= \frac{1}{V_1^4} \cdot \frac{1}{V_2^4} \neq 0$$

→ il sistema è identificabile

Essendo presenti due ingressi devo utilizzare traccianti stabili.