Compito 21/2/2014

Esercizio 1.

La modellistica per l'uptake di ossigeno è:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c'}{\partial t} = D_2 \dfrac{\partial^2 c'}{\partial x^2} & \text{a livello di membrana} \\[2ex] \dfrac{\partial c}{\partial t} = D_1 \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} + K'(y_0 - y) - Kcy \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial t} = D_{Hb} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + K'(y_0 - y) - Kcy \end{cases}$$

$\left.\right\}$ a livello di globulo ross

Ipotesi:

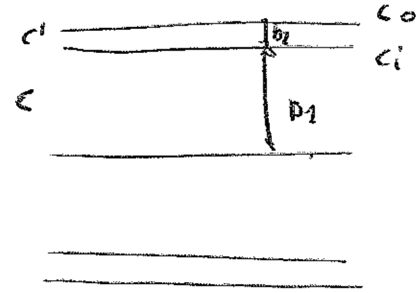
1) non stazionarietà $\Rightarrow$ perciò le derivate rispetto al tempo non sono nulle
2) reazione reversibile K' e $K \neq 0$
3) $D_{Hb} = \phi$ non c'è diffusione di emoglobina all'esterno del globulo

$$\begin{cases} 1) \quad \dfrac{\partial c'}{\partial t} = D_2 \dfrac{\partial^2 c'}{\partial x^2} \\[2ex] 2) \quad \dfrac{\partial c}{\partial t} = D_1 \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} + K'(y_0 - y) - Kcy \\[2ex] 3) \quad \dfrac{\partial y}{\partial t} = K'(y_0 - y) - Kcy \end{cases}$$

Risolvo equazione 1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c'}{\partial t} = A = \text{costante indipendente da } t \text{ e } x \\[2ex] D_2 \dfrac{\partial^2 c'}{\partial x^2} = A \end{cases}$$

Ipotesi del modello



1) $c(x,t)\big|_{t=0} = c'(x,t)\big|_{t=\phi} = \phi$

2) $y = y_0$ per $t = \phi$

3) $c'(x,t)\big|_{t=0} = c_0$ per $x = b_1 + b_2$

4) $\dfrac{\partial c}{\partial x} = 0$ per $x = \phi$ e $\forall t$

5) $c' = \alpha c$ $\forall t$ e per $x = b_1$.

6) $D_2 \dfrac{\partial c'}{\partial x} = \alpha D_1 \dfrac{\partial c}{\partial x}$ per $x = b_1$ $\forall t$. e anche $\forall x$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c'}{\partial t} = A \\ \dfrac{\partial^2 c'}{\partial x^2} = \dfrac{A}{D_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c' = At + B \\ \dfrac{\partial c'}{\partial x} = \dfrac{A}{D_2} x + E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1^*)\ c' = At + B \\ (2^*)\ c' = \dfrac{A}{2D_2} x^2 + Ex + F \end{cases}$$

Impongo condizioni iniziali

$$\begin{cases} c'(b_1+b_2, \phi) = c_0 = B & \text{dalla } (1^*) \Rightarrow A = \dfrac{c' - c_0}{t} \\ c' = \dfrac{c' - c_0}{2D_2 t} x^2 + Ex + F & \Rightarrow 2D_2 t c' = c' x^2 - c_0 x^2 + (Ex + F) 2D_2 t \end{cases}$$

$$c'(2D_2t - x^2) = (Ex+F)\,2D_2t - c_0x^2$$

$$\boxed{c'(x,t) = \frac{(Ex+F)\,2D_2t - c_0x^2}{2D_2t - x^2}}$$

Considero l'equazione 3

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -(k'+k)\,y + k'y_0$$

questa ha come soluzione integrando per parti

$$A\,y^2(x,t) + b\,y(x,t) + c = -(k'+k)\,y(x,t)\,t + k'y_0t$$

dove sapendo che $y = y_0$ per $y=0$ e $t = \phi$ $\Rightarrow c = y_0$

$$A\,y^2(x,t) + y(x,t)\,[b + (k'+k)\,t] + (y_0 - k'y_0t) = \phi$$

$$\Rightarrow y = \frac{-[b+(k'+k)t] \pm \sqrt{[b+(k'+k)t]^2 - 4A\,(y_0 - k'y_0t)}}{2A}$$

dove y essere positivo perché si forma ossiemoglobina l'unica soluzione ammissibile è

$$y(x,t) = \frac{-[b+(k'+k)t] + \sqrt{[b+(k'+k)t]^2 - 4A\,(y_0 - k'y_0t)}}{2A}$$

Considero equazione 2.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \underbrace{K'(y_0 - y) - K c y}_{A}$$

Il termine $A = \dfrac{\partial y}{\partial t}$

inoltre so che $D_2 \dfrac{\partial c'}{\partial x} = \alpha D_1 \dfrac{\partial c}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{D_2}{\alpha D_1}\frac{\partial c'}{\partial x}\right) = \frac{D_2}{\alpha D_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2} c'$$

$$\frac{\partial c'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(Ex+F)2D_2t - c_0x^2}{(2D_2t - x^2)}\right] = \frac{-4c_0xD_2t + 4Ex^2D_2t + 4D_2tFx}{(2D_2t - x^2)^2}$$

derivo ancora

$$\frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} = \frac{(-4c_0D_2t + 8D_2Etx + 4D_2tF)(2D_2t - x^2) + 4x(-4c_0xD_2t + 4Ex^2D_2t + 4D_2tFx)}{(2D_2t - x^2)^3}$$

Ricordando che i D sono molto piccoli posso porre $\dfrac{\partial^2 c'}{\partial x} = 0$

quindi ho che

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} \Rightarrow c(x,t) = y(x,t)$$ cioè ciò che

avviene di ossigeno viene legato per formare ossiemoglobina

Punto 2

nel caso di presenza di monossido di carbonio avrò che il sistema diventa

$$\frac{\partial c'}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} - \beta [O_1] \rightarrow \frac{\partial c'}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} - \beta c'$$

poiché passando monossido diminuisce l'ossigeno che passa

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \overbrace{K'(y_0 - y)}^{0} - Kcy$$

poiché non c'è più reazione inversa.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \underbrace{D_{Hb} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}_{\phi} + \underbrace{K'(y_0 - y)}_{0} - Kcy$$

inoltre $c' = \alpha c$.

quindi il sistema diventa

$$\begin{cases} \frac{\partial c'}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} - \beta c' \\ \frac{\partial c}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - Kcy - \frac{\beta}{\alpha} c \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -Kcy - \frac{\beta}{\alpha} c. \end{cases}$$

si nota che $\Delta\varepsilon$ c' diminuisce maggiormente ed che la formazione di ossiemoglobina diminuisce esponenzialmente.

$\boxed{\text{Esercizio n° 2}}$

dializzatore co-corrente $E_1 = \dfrac{1 - e^{-N_T(1+z)}}{1+z}$

dializzatore controcorrente $E_2 = \dfrac{1 - e^{+N_T(1-z)}}{z - e^{N_T(1-z)}}$

dializzatore misto $E_3 = \dfrac{1 - e^{-N_T}}{1 + z\left[1 - e^{-N_T}\right]}$

per formare bene deve avere $\dfrac{Q_B}{Q_D} \simeq 0$

quindi $E_1 = 1 - e^{-N_T}$

$E_2 = 1 - e^{-N_T}$

$E_3 = 1 - e^{-N_T}$

i tre coefficienti coincidono $\Rightarrow$ $N_T = \dfrac{KA}{Q}$ $\Rightarrow$ $\forall$ Area.

se vale per tutti e tre vale anche a 2 a 2.

Esercizio 3

Albisser glicemico

$$I(t) = \frac{I_{max}}{2}\left[1 + \tanh\frac{G(t) - G_I}{P_I}\right]$$

Clemens glicemico

$$I(t) = K\,\frac{dG(t)}{dt}$$

Fisher glicemico

$$I(t) = a_0 + a_1\,(G(t) - G_I) + a_2\,\frac{dG}{dt}$$

Noi abbiamo che il sistema legge invece insulina e rilascio glucoso quindi ho

Albisser

$$G(t) = \frac{G_{max}}{2}\left[1 + \tanh\frac{I(t) - I_i}{P_{In}}\right]$$

Clemens

$$G(t) = K\,\frac{dI(t)}{dt}$$

$$G(t) = a_0 + a_1\left[I(t) - I_I\right] + a_2\,\frac{dI(t)}{dt}$$

Sapendo che $I_{basale} = 2 \frac{mg}{dl}$ e $I_{max} = 80 \frac{mg}{dl}$ e sapendo (1)

che le glicemia massima che può avere un paziente è $400 \frac{mg}{dl}$ ho che

Albisser

$$\cancel{G_{max}} = \frac{G_{max}}{2} \left[1 + \tanh \frac{(I(t) - I_i)}{PI} \right]$$

$$2 = 1 + \tanh \frac{(I(t) - I_i)}{PI} \Rightarrow 1 = \tanh \frac{(I(t) - I(t))}{PI}$$

cioè se $\tanh = \phi \Rightarrow I(t) = I_i$ quindi se non ho variazioni insulina

cioè la glicemia non dovrebbe mai fare.

Clemens.

$$G(t) = K \frac{d(I(t))}{dt} = K \frac{I_{max} - I_{min}}{T}$$

$$G(t) = K \frac{80 - 2}{T} = \frac{78}{T} K$$

considerando il K unitario e

$T = 1$ min.

$G(t) = 78 \frac{mg}{dl}$ quindi ~~solo se ho u~~ è applicabile perché $G(t)$ è sotto

il valore normo glicemia

fisher

$$G(t) = a_0 + a_1 (I(t) - I_I) + a_2 \frac{I_{max} - I_{min}}{T}$$

$$G(t) = e_0 + e_1 (I_{max} - I_I) + a_2 \frac{I_{max} - I_{min}}{T}$$ con $T = 1$ min.

$G(t) = e_0 + 78 e_1 + 78 a_2$. $\Rightarrow$ sapendo che in genere $a_0 = I_{min}$

$G(t) = 78 a_1 + 78 a_2 + 2$ questo funzionerà solo se a_1 e a_2 sono tali che

$G(t) < 400$

Esercizio 4

$I_D = B(V_{GS} - V_{TH} - \frac{1}{2} V_{DS})$ con $B = 0.05 \frac{1}{\Omega}$.

e so che $I_d = A pH$

$$pH = \frac{B}{A} \left(V_{GS} - V_{TH} - \frac{1}{2} V_{DS} \right)$$

2) Vedo dalla curva che al variare di $V_{GS} - V_{TH}$ la zona di linearità in funzione di V_{DS} è tra $0 < V_{DS} < 1$

1) Il sistema funziona tra $0 \leq V_{DS} \leq 6$ V

$0 \leq V_{GS} - V_{TH} \leq 7$ V

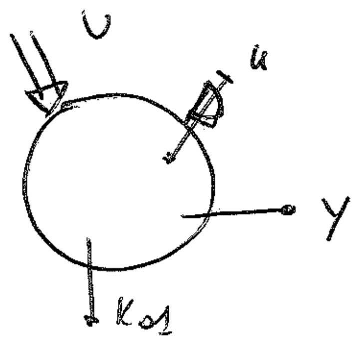
③ pH = 7.4. $I_D = A\,pH = 7.4\,mA$ ~~per~~ prendendo $A=1$

$$7.4 = 0.05\left(V_{GS} - V_{TH} - \frac{1}{2}V_{DS}\right)$$

$$\cancel{m}148 = \left[V_{GS} - V_{TH} - \frac{1}{2}V_{DS}\right]$$ essendo nella zona di pura linearità di tutte le curve le $\frac{V_{DS}}{2} = 148\,10^{-3} - V_{GS} + V_{TH}$

$$V_{DS} = 2(V_{GS} - V_{TH})$$

Esercizio n° 5



eq. tracciante

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = -K_{01}\,Q_1 + u \\ \text{se stazionario } \dot{Q}_1 = 0 \end{cases}$$

eq. tracciante

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -K_{01}\,q_1 + u \\ y = \dfrac{q_1}{V_1} \end{cases}$$

u = bolo = $q_0\,\delta(t)$

Ambito Laplace.

$$\begin{cases} s\,Q_1(s) = -K_{01}\,Q_1(s) + u(s) \\ Y(s) = \dfrac{Q_1\,s}{V_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1(s) = \dfrac{u(s)}{s+K_{01}} \\ Y(s) = \dfrac{Q_1(s)}{V_1} \end{cases}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{V_1} \quad \frac{1}{s+K_{01}}$$

L'uscita è nel tempo vale $y(t) = \frac{q_0}{V_1} \quad e^{-Kt}.$

La quantità di tracciante si sarà ridotta di $\frac{1}{4}$ del suo valore iniziale quando $e^{-Kt} = \frac{1}{4} \qquad t = \frac{-\ln \frac{1}{4}}{K} \simeq 4.6 \text{ sec.}$