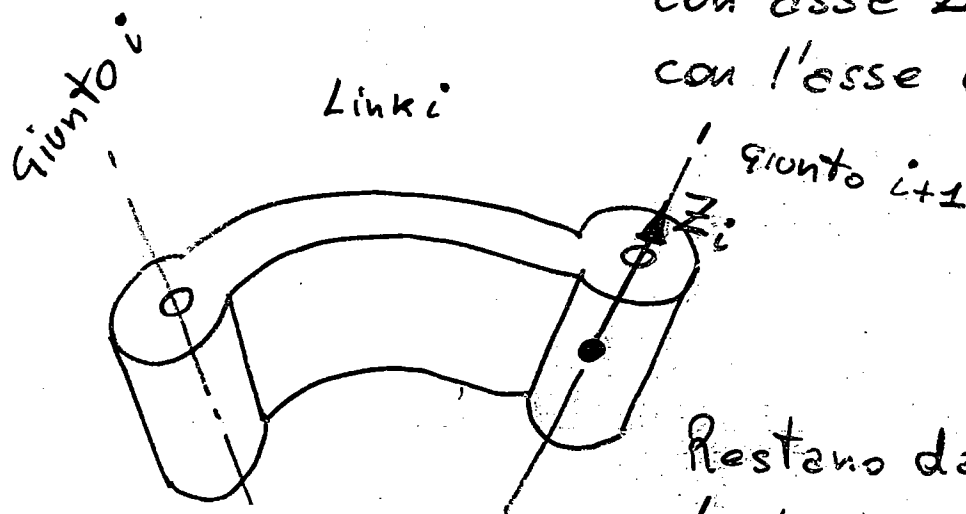


37

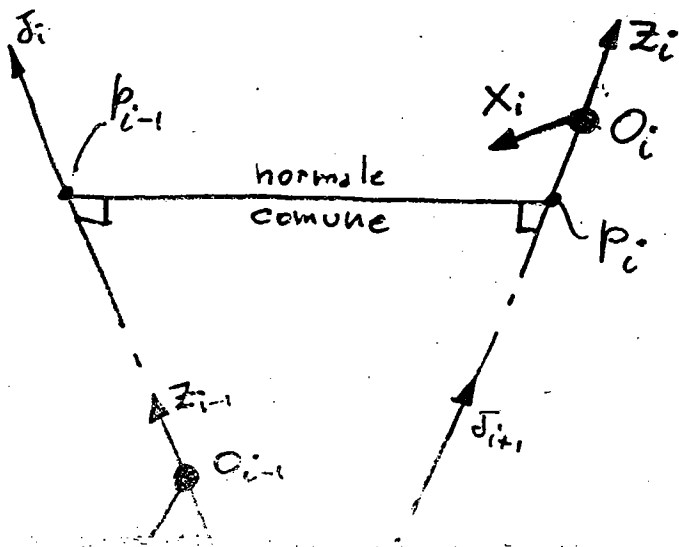
Cinematica Diretta - Convenzioni D-H

- Numerazione dei link: da 0 (link di base) a n (link distale, e.e.)
- Numerazione dei giunti: da 1 (tra link 0 e link 1) a n (tra link $n-1$ e link n)
- Riferimenti intermedi: su ogni link viene fissata una terna cartesiana con asse Z coincidente con l'asse del giunto distale



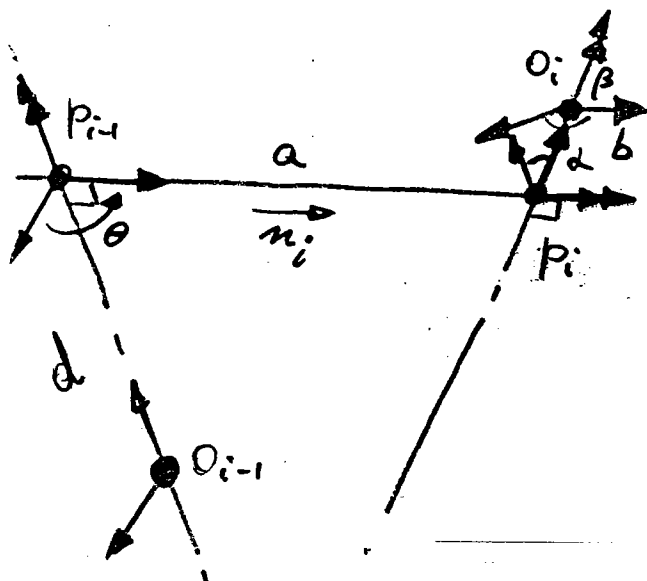
- Restano da fissare:
- la posizione dell'origine O_i
 - la direzione di un asse X_i (o Y_i)

- Scelta arbitraria di O_i e X_i : sono necessari 6 parametri, di cui 1 variabile di giunto, e 5 misure geometriche.



Per assi sghembi, considera le normale comuni e i punti:

38



• Trasformazione omogenea dal riferimento del link i -esimo al riferimento del link $(i-1)$ -esimo:

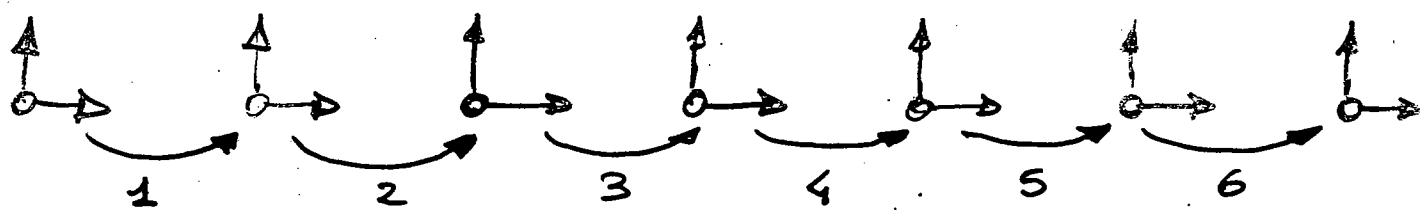
Per scrivere A_i compongo trasf. omog. elementari:

- 1) Traslo O_{i-1} in P_{i-1}
- 2) Allineo x_{i-1} alle retta per P_i
- 3) Traslo l'origine in P_i
- 4) Allineo z_{i-1} con z_i
- 5) Traslo l'origine in O_i
- 6) Allineo x_{i-1} con x_i

$$d = \|O_{i-1} - P_{i-1}\|; \theta = \widehat{x_{i-1}, n}$$

$$a = \|P_i - P_{i-1}\|; \alpha = \widehat{z_{i-1}, z_i}$$

$$b = \|O_i - P_i\|; \beta = \widehat{n, x_i}$$



$$\text{Trasl}(z, d) \quad \text{Rot}(z, \theta) \quad \text{Trasl}(x, a) \quad \text{Rot}(x, \alpha) \quad \text{Trasl}(z, b) \quad \text{Rot}(z, \beta)$$

Ponendo $O_i \equiv P_i$ e $x_i \equiv n$, si ha $b = \beta = 0$ e si risparmiano 2 parametri e 2 trasformazioni

$$A_i = \text{Trasl}(z, d_i) \text{Rot}(z, \theta_i) \text{Trasl}(x, a_i) \text{Rot}(x, \alpha_i) =$$

$$= \begin{pmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

38 Procedura per la scrittura della
Cinematica Diretta
secondo la convenzione D.H.

- Si fissa il riferimento $\{0\}$ del link di base, con asse $z_0 \equiv J_1$, asse x_0 e origine O_0 arbitrarie.
Talvolta, si sceglie O_0 in modo da avere poi $d_1 = 0$ (giunto \perp rotoidale) ovvero si sceglie x_0 in modo da avere poi $\theta_1 = 0$ (giunto prismatico).

- Si fissano i riferimenti $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n-1\}$ secondo le regole di D.H., cioè
 - asse $\underline{z}_i \equiv \underline{J}_{i+1}$
 - origine O_i in P_i
 - asse $\underline{x}_i \equiv \underline{u}_i$

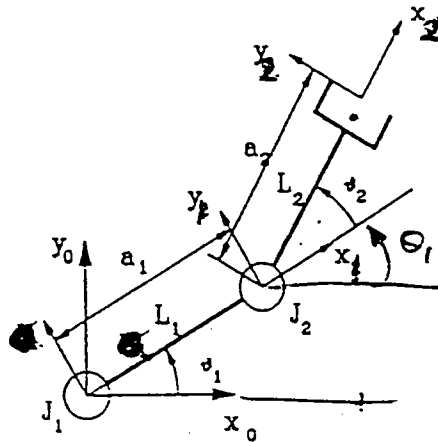
Se J_{i-1} e J_i sono paralleli, si può scegliere O_{i-1} in modo che $d_{i-1} = 0$ (J_{i-1} rotoidale).

Se J_{i-1} e J_i si intersecano, x_{i-1} ha verso indefinito ~~_____~~

- Si fissa il riferimento $\{n\}$ dell'endeffector, con $x_n \perp z_{n-1}$ (se J_n è rotoidale, questo implica $z_n \parallel z_{n-1}$).
Si può scegliere O_n tale che $d_n = a_n = 0$ (J_n rotoid.).

ESEMPIO

Si consideri un manipolatore planare a 2 gdl:



I parametri di Denavit-Hartenberg sono

	d	θ	a	α
L1	0	θ_1	a_1	0°
L2	0	θ_2	a_2	0°

Le matrici ${}^{i-1}H_i$ risultano

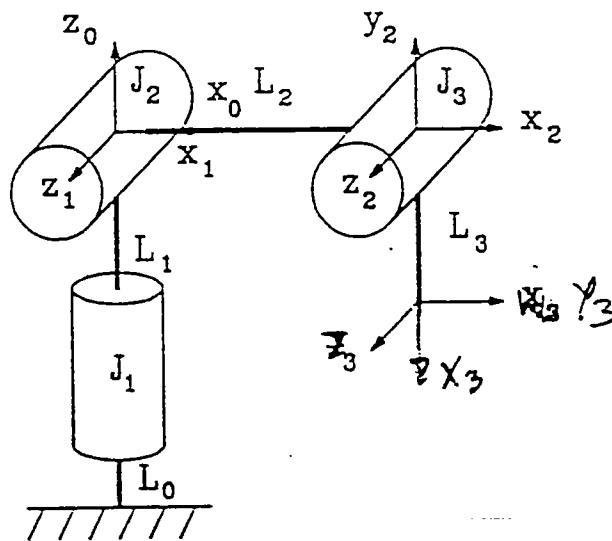
$${}^0H_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1H_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi

$${}^0T_2 = {}^0H_1 {}^1H_2 = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I vettori n, s, a definiscono l'orientamento dell'estremità del manipolatore (rotazione attorno a z), mentre p definisce la sua posizione (piano $x - y$).

ESEMPIO: Manipolatore antropomorfo a tre gradi di libertà



I parametri di Denavit-Hartenberg sono

	d	θ	a	α
L1	0	θ_1	0	90°
L2	0	θ_2	a_2	0°
L3	0	θ_3	a_3	0°

Le matrici ${}^{i-1}H_i$ risultano

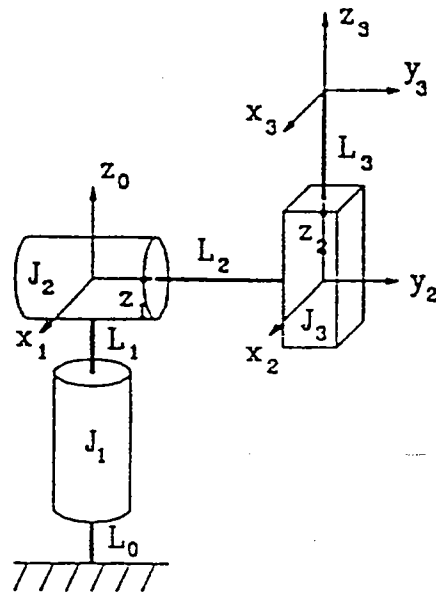
$${}^0H_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1H_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2H_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed il modello cinematico:

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & C_1 S_{23} & S_1 & C_1 (a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ S_1 C_{23} & S_1 S_{23} & -C_1 & S_1 (a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ S_{23} & -C_{23} & 0 & a_2 S_2 + a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il versore a dipende solo dal primo giunto. La posizione p_z non dipende da θ_1 .

ESEMPIO: Manipolatore sferico a tre gdl



Parametri di Denavit-Hartenberg:

	d	θ	a	α
L1	0	θ_1	0	-90°
L2	d_2	θ_2	0	90°
L3	d_3	0	0	0°

Le matrici di Denavit-Hartenberg risultano:

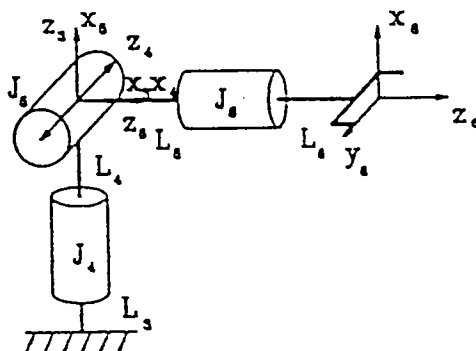
$${}^0H_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1H_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e il modello cinematico:

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -S_1 & C_1 S_2 & -d_2 S_1 + d_3 C_1 S_2 \\ C_2 S_1 & C_1 & S_1 S_2 & d_2 C_1 + d_3 S_1 S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 & d_3 C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il terzo giunto non influisce sull'orientamento, il versore \mathbf{s} dipende solo dal primo giunto.

ESEMPIO: Polso sferico a tre gdl



I parametri di Denavit-Hartenberg sono

	d	θ	a	α
L4	0	θ_4	0	-90°
L5	0	θ_5	0	90°
L6	d_6	θ_6	0	0°

Quindi

$${}^3H_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4H_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5H_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione omogenea diventa:

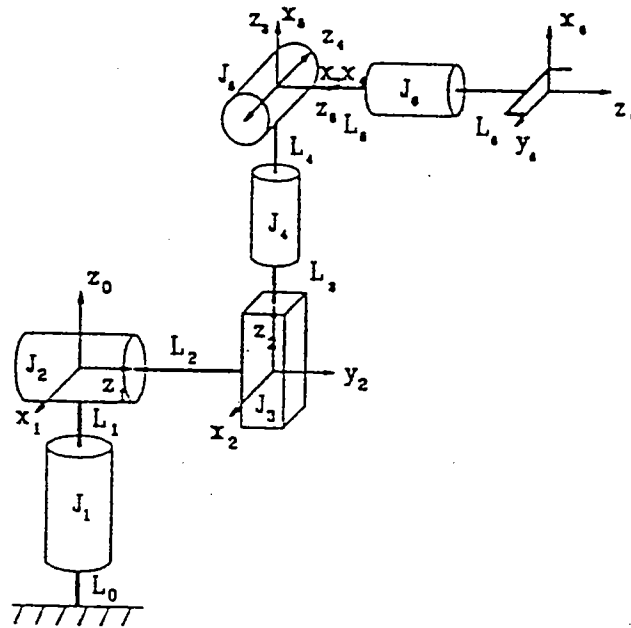
$${}^3T_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -S_4 C_6 - C_4 C_5 S_6 & C_4 S_5 & d_6 C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & C_4 C_6 - S_4 C_5 S_6 & S_4 S_5 & d_6 S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & d_6 C_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di rotazione in questo caso coincide con la matrice di rotazione degli angoli di Eulero ZYZ.

$$R_{Euler}(\phi, \theta, \psi) = Rot(z_0, \phi) Rot(y_1, \theta) Rot(z_2, \psi) = \begin{bmatrix} C_\phi C_\theta C_\psi - S_\phi S_\psi & -C_\phi C_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta \\ S_\phi C_\theta C_\psi + C_\phi S_\psi & -S_\phi C_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & S_\phi S_\theta \\ -S_\theta C_\psi & S_\theta S_\psi & C_\theta \end{bmatrix}$$

In altri termini, gli angoli del manipolatore in questo caso coincidono con gli angoli di Eulero.

ESEMPIO: Manipolatore di Stanford



Componendo il manipolatore cilindrico a tre gdl col polso sferico si ottiene il "Manipolatore di Stanford", un robot a 6 gradi di libertà. Poichè le definizioni date per i sdr associati ai link sono consistenti, si può semplicemente comporre la 0T_3 del braccio cilindrico con la 3T_6 del polso sferico ed ottenere

$${}^0T_6 = {}^0T_3 {}^3T_6 = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove

$$n = \begin{bmatrix} -S_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6) + C_1(C_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_2S_5C_6) \\ C_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6) + S_1(-S_2S_5C_6 + C_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6)) \\ -C_2S_5C_6 - S_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) \end{bmatrix}$$

$$s = \begin{bmatrix} -S_1(C_4C_6 - S_4C_5S_6) + C_1(-C_2(S_4C_6 + C_4C_5S_6) + S_2S_5S_6) \\ C_1(C_4C_6 - S_4C_5S_6) + S_1(S_2S_5S_6 - C_2(S_4C_6 + C_4C_5S_6)) \\ C_2S_5S_6 + S_2(S_4C_6 + C_4C_5S_6) \end{bmatrix}$$

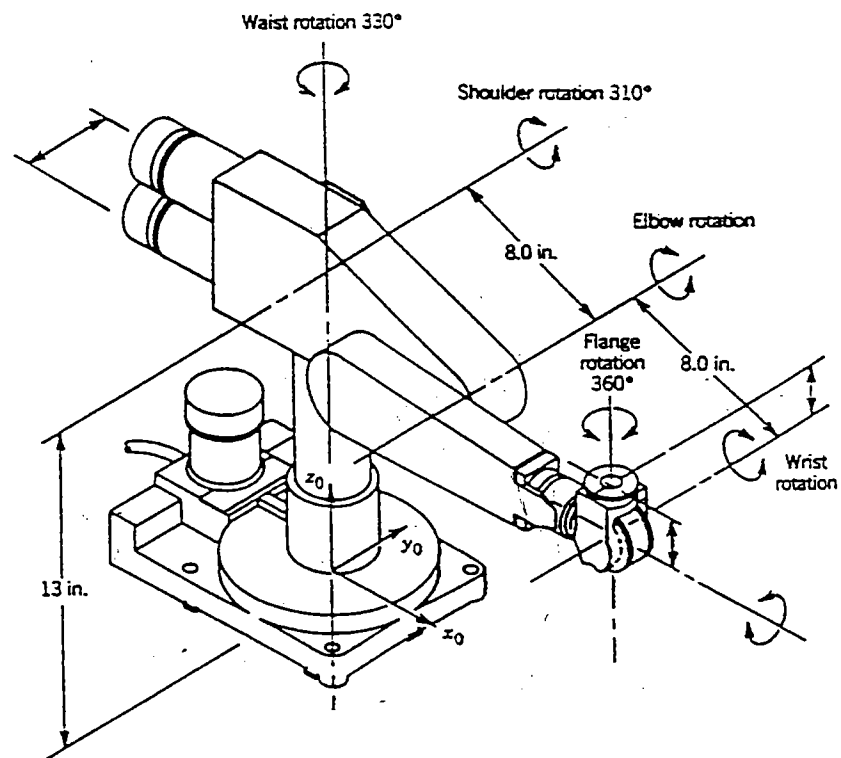
$$a = \begin{bmatrix} -S_1S_4S_5 + C_1(S_2C_5 + C_2C_4S_5) \\ C_1S_4S_5 + S_1(S_2C_5 + C_2C_4S_5) \\ C_2C_5 - S_2C_4S_5 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} -d_2S_1 + d_3C_1S_2 + d_6(C_1S_2C_5 + C_1C_2C_4S_5 - S_1S_4S_5) \\ d_2C_1 + d_3S_1S_2 + d_6(S_1S_2C_5 + S_1C_2C_4S_5 + C_1S_4S_5) \\ d_3C_2 + d_6(C_2C_5 - S_2C_4S_5) \end{bmatrix}$$

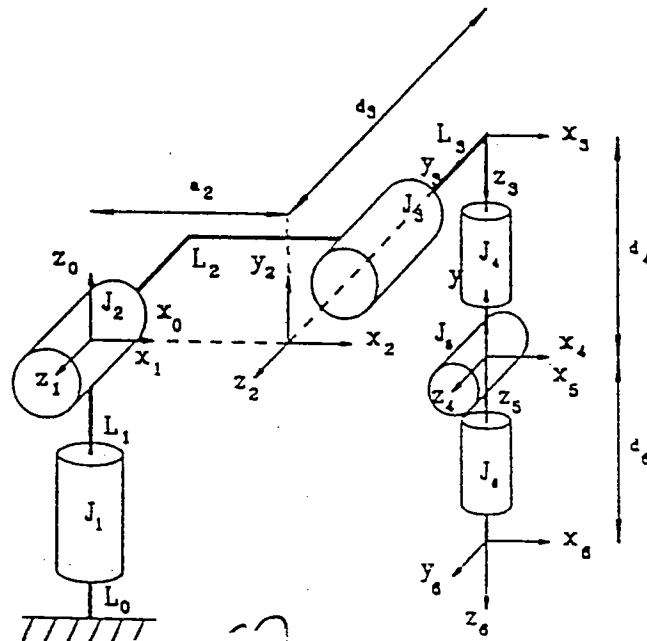
PUMA 260

Robot antropomorfo a 6 gradi di libertà:

- "Braccio" con busto, spalla e gomito – 3 gdl
- Polso sferico – 3 gdl



ESEMPIO: PUMA 260



Gli angoli θ_i ruotano attorno agli assi z_{i-1} ; a_2 è la distanza tra gli assi z_1 e z_2 (paralleli in questo caso). d_3 è l'offset tra le origini di FF2 e di FF3 e d_4 l'offset tra le origini di FF3 e FF4. Le origini di FF4, FF5, FF6 coincidono. Tutti gli angoli α_i sono o 0° o 90° .

	d	θ	a	α
L1	0	θ_1	0	90°
L2	0	θ_2	a_2	0°
L3	$-d_3$	θ_3	0	90°
L4	d_4	θ_4	0	-90°
L5	0	θ_5	0	90°
L6	0	θ_6	0	0°

Trasformazioni canoniche:

$${}^0H_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1H_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2H_3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3H_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4H_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5H_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} C_1C_2C_3 - C_1S_2S_3 & S_1 & C_1C_3S_2 + C_1C_2S_3 & a_2C_1C_2 - d_3S_1 \\ C_2C_3S_1 - S_1S_2S_3 & -C_1 & C_3S_1S_2 + C_2S_1S_3 & C_1d_3 + a_2C_2S_1 \\ C_3S_2 + C_2S_3 & 0 & -(C_2C_3) + S_2S_3 & a_2S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3T_6 = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -(C_6S_4) - C_4C_5S_6 & C_4S_5 & C_4d_6S_5 \\ C_5C_6S_4 + C_4S_6 & C_4C_6 - C_5S_4S_6 & S_4S_5 & d_6S_4S_5 \\ -(C_6S_5) & S_5S_6 & C_5 & d_4 + C_5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_6 = {}^0T_6 = {}^0T_3 {}^3T_6 = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con

$$n = \begin{bmatrix} S_1(C_5C_6S_4 + C_4S_6) + C_1(C_2(-C_6S_3S_5) + C_3(C_4C_5C_6 - S_4S_6)) - S_2(C_3C_6S_5 + S_3(C_4C_5C_6 - S_4S_6)) \\ -(C_1(C_5C_6S_4 + C_4S_6)) + S_1(C_2(-C_6S_3S_5) + C_3(C_4C_5C_6 - S_4S_6)) - S_2(C_3C_6S_5 + S_3(C_4C_5C_6 - S_4S_6)) \\ S_2(-C_6S_3S_5) + C_3(C_4C_5C_6 - S_4S_6) + C_2(C_3C_6S_5 + S_3(C_4C_5C_6 - S_4S_6)) \end{bmatrix}$$

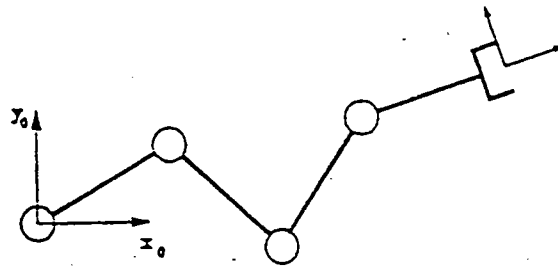
$$s = \begin{bmatrix} S_1(C_4C_6 - C_5S_4S_6) + C_1(C_2(S_3S_5S_6 + C_3(-C_6S_4) - C_4C_5S_6)) - S_2(-C_3S_5S_6) + S_3(-C_6S_4 - C_4C_5S_6) \\ -(C_1(C_4C_6 - C_5S_4S_6)) + S_1(C_2(S_3S_5S_6 + C_3(-C_6S_4) - C_4C_5S_6)) - S_2(-C_3S_5S_6) + S_3(-C_6S_4 - C_4C_5S_6) \\ S_2(S_3S_5S_6 + C_3(-C_6S_4) - C_4C_5S_6) + C_2(-C_3S_5S_6) + S_3(-C_6S_4 - C_4C_5S_6) \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} S_1S_4S_5 + C_1(C_2(C_5S_3 + C_3C_4S_5) - S_2(-C_3C_5) + C_4S_3S_5) \\ -(C_1S_4S_5) + S_1(C_2(C_5S_3 + C_3C_4S_5) - S_2(-C_3C_5) + C_4S_3S_5) \\ S_2(C_5S_3 + C_3C_4S_5) + C_2(-C_3C_5) + C_4S_3S_5 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} S_1(-d_3 + d_6S_4S_5) + C_1(a_2C_2 + C_2((d_4 + C_5d_6)S_3 + C_3C_4d_5S_5) - S_2(-C_3(d_4 + C_5d_6)) + C_4d_5S_3S_5) \\ -(C_1(-d_3 + d_6S_4S_5)) + S_1(a_2C_2 + C_2((d_4 + C_5d_6)S_3 + C_3C_4d_5S_5) - S_2(-C_3(d_4 + C_5d_6)) + C_4d_5S_3S_5) \\ a_2S_2 + S_2((d_4 + C_5d_6)S_3 + C_3C_4d_5S_5) + C_2(-C_3(d_4 + C_5d_6)) + C_4d_5S_3S_5 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Manipolatore planare a 4 gdl (ridondante):



I parametri DH sono

	d	θ	a	α
L1	0	θ_1	a_1	0°
L2	0	θ_2	a_2	0°
L3	0	θ_3	a_3	0°
L4	0	θ_4	a_4	0°

Le matrici ${}^{i-1}H_i$ risultano formalmente tutte uguali

$${}^{i-1}H_i = \begin{bmatrix} C_i & -S_i & 0 & a_i C_i \\ S_i & C_i & 0 & a_i S_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi

$${}^0T_4 = {}^0H_1 {}^1H_2 {}^2H_3 {}^3H_4 = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1234} & -S_{1234} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} + a_3 C_{123} + a_4 C_{1234} \\ S_{1234} & C_{1234} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} + a_3 S_{123} + a_4 S_{1234} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I vettori n, s, a definiscono l'orientamento dell'estremità del manipolatore (rotazione attorno a z), mentre p definisce la sua posizione (piano $x - y, p_z = 0$).

MODELLO CINEMATICO INVERSO

MODELLO CINEMATICO DIRETTO:

- funzione $f(q)$ che permette di passare dalle variabili di posizione di giunto $q \in \mathbb{R}^n$ alla posizione/orientamento dell'estremità del manipolatore.
- La definizione di $f(q)$ è concettualmente semplice e presenta aspetti tali da poter definire tecniche generali per poterla calcolare.

MODELLO CINEMATICO INVERSO:

- passare da posizione/orientamento dell'estremità del manipolatore alle variabili di giunto non è altrettanto semplice.

Non esiste alcuna tecnica di carattere generale che applicata dà una soluzione

Esistono però importanti casi di strutture di robot per i quali è possibile utilizzare schemi di soluzione già definiti.

- La soluzione che si ottiene non è unica. Si possono avere:
 - nessuna soluzione (se si parte da un punto esterno allo spazio di lavoro);
 - insieme finito di soluzioni (una o più);
 - infinite soluzioni.
- Si ricercano soluzioni in forma chiusa e non numeriche:
 - per ragioni computazionali, la soluzione in forma analitica è tipicamente più veloce da calcolare una volta che si ha l'espressione generale;
 - esprimendo le soluzioni analiticamente è possibile selezionarne una in particolare.

Per ottenere una soluzione in forma chiusa al problema della cinematica inversa, esistono essenzialmente due tecniche:

- una di carattere **ALGEBRICO**, che consiste in manipolazioni delle equazioni cinematiche fino ad ottenere un insieme di relazioni che permettono un'inversione delle equazioni.
 - una di carattere **GEOMETRICO** che si basa, quando e se possibile, su considerazioni di tipo geometrico, dipendenti dalla struttura del manipolatore, che aiutano nella soluzione.
-

MANIPOLAZIONE DELLE EQUAZIONI CINEMATICHE

Per un manipolatore a sei gradi di libertà si ha una equazione del tipo

$${}^0T_6 = {}^0H_1(q_1) {}^1H_2(q_2) \dots {}^5H_6(q_6)$$

equivalente a 12 equazioni nelle 6 incognite q_i , $i = 1, \dots, 6$.

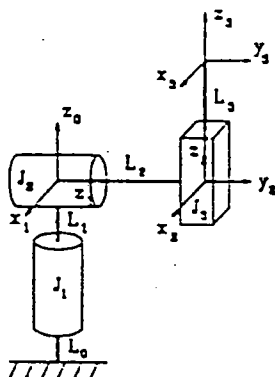
Dato che sia i valori degli elementi della matrice 0T_6 che la struttura delle ${}^{i-1}H_i$ sono noti, premoltiplicando e postmoltiplicando si ottiene

$$[{}^0H_1(q_1) \dots {}^{i-1}H_i(q_i)]^{-1} {}^0T_6 [{}^jH_{j+1}(q_{j+1}) \dots {}^5H_6(q_6)]^{-1} = {}^iH_{i+1}(q_{i+1}) \dots {}^{j-1}H_j(q_j) \quad i < j$$

ottenendo altre 12 equazioni per ogni coppia (i, j) , $i < j$.

Selezionando le espressioni più semplici fra quelle così ricavate, è spesso possibile ottenere una soluzione al problema.

SOLUZIONE DEL MANIPOLATORE SFERICO



Da ${}^0T_3 = {}^0H_1 {}^1H_2 {}^2H_3$ segue che

$$({}^0H_1)^{-1} {}^0T_3 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & d_3 S_2 \\ S_2 & 0 & -C_2 & -d_3 C_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1H_2 {}^2H_3$$

e quindi, uguagliando i vettori posizione.

$${}^1p_p = \begin{bmatrix} p_x C_1 + p_y S_1 \\ -p_z \\ -p_x S_1 + p_y C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 S_2 \\ -d_3 C_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

dipende solo da θ_2 e d_3 ! Ponendo $a = \tan \theta_1/2$ si ha

$$C_1 = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \quad S_1 = \frac{2a}{1 + a^2}$$

e sostituendo nell'ultimo elemento di p_p

$$(d_2 + p_y)a^2 + 2p_x a + d_2 - p_y = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-p_x \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{d_2 + p_y}$$

Due soluzioni possibili! $((p_x^2 + p_y^2 - d_2^2) > 0??$

Allora

$$\theta_1 = 2 \operatorname{atan2}(-p_x \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}, d_2 + p_y)$$

Il vettore ${}^1\mathbf{p}_p$ è definito come

$${}^1\mathbf{p}_p = \begin{bmatrix} p_x C_1 + p_y S_1 \\ -p_z \\ -p_x S_1 + p_y C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 S_2 \\ -d_3 C_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Dalle prime due componenti si ha

$$\frac{p_x C_1 + p_y S_1}{-p_z} = \frac{d_3 S_2}{-d_3 C_2}$$

da cui

$$\theta_2 = \text{atan2}(p_x C_1 + p_y S_1, p_z)$$

Infine, elevando a quadrato e sommando le prime due componenti

$$d_3 = \sqrt{(p_x C_1 + p_y S_1)^2 + p_z^2}$$

APPROCCIO GEOMETRICO

Mentre non esistono considerazioni generali che possono guidare nel trovare una soluzione in forma algebrica, essendo questa tecnica troppo legata alle espressioni delle equazioni cinematiche dirette, esistono considerazioni che aiutano per quanto riguarda la soluzione per via geometrica.

APPROCCIO DI PIEPER

Per molte strutture di manipolatori industriali vale il cosiddetto "disaccoppiamento cinematico", che permette di scomporre il problema in due sottoproblemi:

1. determinazione della soluzione inversa al problema del posizionamento
2. determinazione della soluzione al problema dell'orientamento dell'estremità del manipolatore.

Esiste a questo riguardo un risultato trovato da un ricercatore, Pieper, che afferma che

condizione sufficiente per trovare una soluzione in forma chiusa per un manipolatore a sei gradi di libertà è che esistano

– tre giunti di rotazione consecutivi i cui assi si intersecano in un punto;

oppure

– tre giunti di rotazione consecutivi i cui assi sono paralleli.

In molti manipolatori industriali a 6 gradi di libertà, i primi tre sono solitamente utilizzati per il posizionamento del polso, il quale ha tipicamente altri tre gradi di libertà per l'orientamento.

In questi casi, è abbastanza naturale la scomposizione del problema cinematico inverso nei due sottoproblemi citati precedentemente.

Per un manipolatore a polso sferico una scelta naturale è scomporre il problema in

1. posizionamento del punto p_p intersezione dei tre assi del polso;
2. orientamento dell'attrezzo

Si procede dunque come segue:

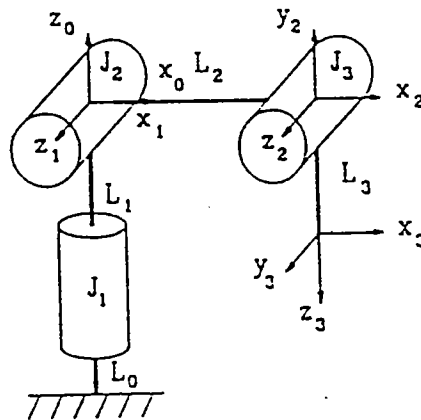
1. si calcola la posizione di p_p dalla conoscenza di 0T_6 e delle sue sottomatrici R e p :

$$p_p = p - d_6 a$$

p_p risulta tipicamente funzione delle sole variabili q_1, q_2, q_3 :

2. si risolve la cinematica inversa per q_1, q_2, q_3 ;
3. si determina la matrice di rotazione 0R_3 dovuta ai primi tre giunti;
4. si calcola ${}^3R_6 = {}^0R_3^T R$;
5. si risolve la cinematica inversa dell'orientamento

SOLUZIONE DEL MANIPOLATORE ANTROPOMORFO A 3 GDL



Dalla configurazione geometrica si ha immediatamente che

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_z)$$

Per quanto riguarda θ_2, θ_3 , si osservi che il braccio rimane in un piano individuato da θ_2 . Si ha dunque

$$C_3 = \frac{p_z^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \quad S_3 = \pm\sqrt{1 - C_3^2}$$

$$\theta_3 = \text{atan2}(S_3, C_3)$$

Inoltre, per ragionamento geometrico si arriva facilmente a:

$$\theta_2 = \text{atan2}(p_z, \sqrt{p_z^2 + p_y^2}) - \text{atan2}(a_3S_3, a_2 + a_3C_3)$$

Notare che si può avere anche la soluzione

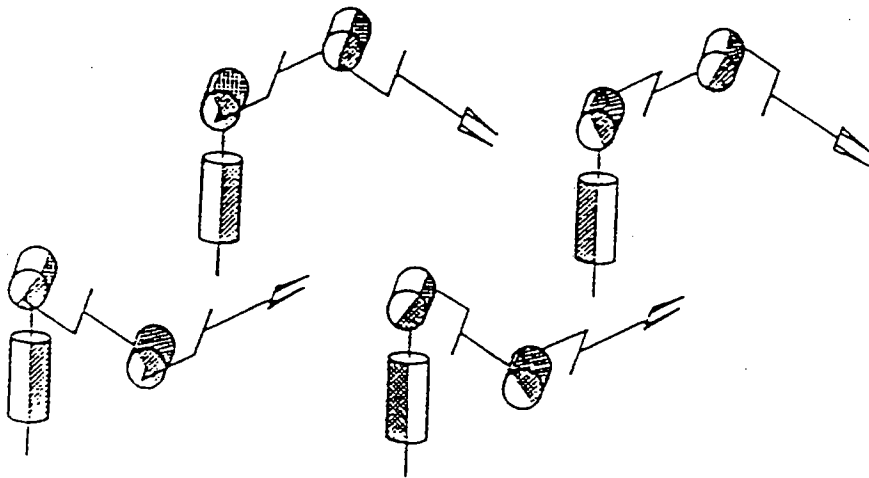
$$\theta_1 = \pi + \text{atan2}(p_y, p_z), \quad \theta_2' = \pi - \theta_2$$

Si hanno quindi quattro possibili soluzioni:

spalla destra-gomito alto:
spalla sinistra-gomito alto

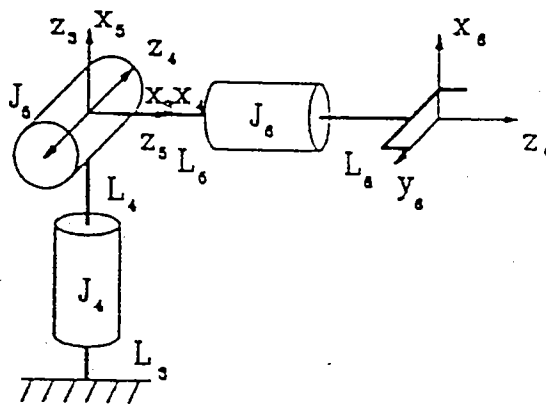
spalla destra-gomito basso:
spalla sinistra-gomito basso:

diverso orientamento!



Deve essere $p_x \neq 0$, $p_y \neq 0$ (configurazione singolare)

SOLUZIONE DEL POLSO SFERICO



Sia data la matrice

$${}^3R_6 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix}$$

Dalle equazioni cinematiche dirette si ha che

$${}^3R_6 = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -S_4C_6 - C_4C_5S_6 & C_4S_5 \\ S_4C_5C_6 + C_4S_6 & C_4C_6 - S_4C_5S_6 & S_4S_5 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 \end{bmatrix}$$

La soluzione è quindi data da (vedi angoli di Eulero ZYZ)

- per $\theta_5 \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} \theta_4 &= \text{atan2}(a_y, a_x) \\ \theta_5 &= \text{atan2}(\sqrt{a_x^2 + a_y^2}, a_z) \\ \theta_6 &= \text{atan2}(s_z, -n_z) \end{aligned}$$

- per $\theta_5 \in [-\pi, 0]$:

$$\begin{aligned} \theta_4 &= \text{atan2}(-a_y^2, -a_x^2) \\ \theta_5 &= \text{atan2}(-\sqrt{a_x^2 + a_y^2}, a_z) \\ \theta_6 &= \text{atan2}(-s_z, -n_z) \end{aligned}$$

60

SPAZIO DI LAVORO DI UN MANIPOLATORE

- Volume individuato dall'origine della terna utensile quando ai giunti del manipolatore si fanno assumere tutti i possibili valori.

Alcuni distinguono lo:

- spazio di lavoro *raggiungibile* (in almeno un orientamento);
- spazio di lavoro *destro* (con tutti gli orientamenti possibili);

Il secondo è un sottoinsieme del primo.

Lo spazio di lavoro dipende dalla geometria del manipolatore e dagli intervalli di variabilità dei singoli giunti.

Lo spazio di lavoro raggiungibile può essere calcolato considerando la parte p di posizione della 0T_6 .

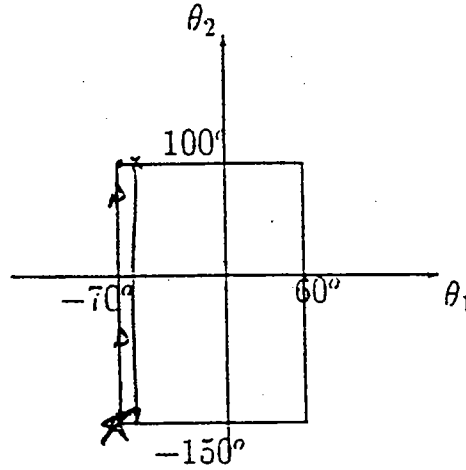
$$p = p(q) \quad q_{i,min} < q_i < q_{i,max}, \quad i = 1, \dots, n$$

Essendo $p(q)$ una funzione continua, il volume così definito è finito, chiuso e connesso ed è quindi descrivibile dalla sua superficie di frontiera.

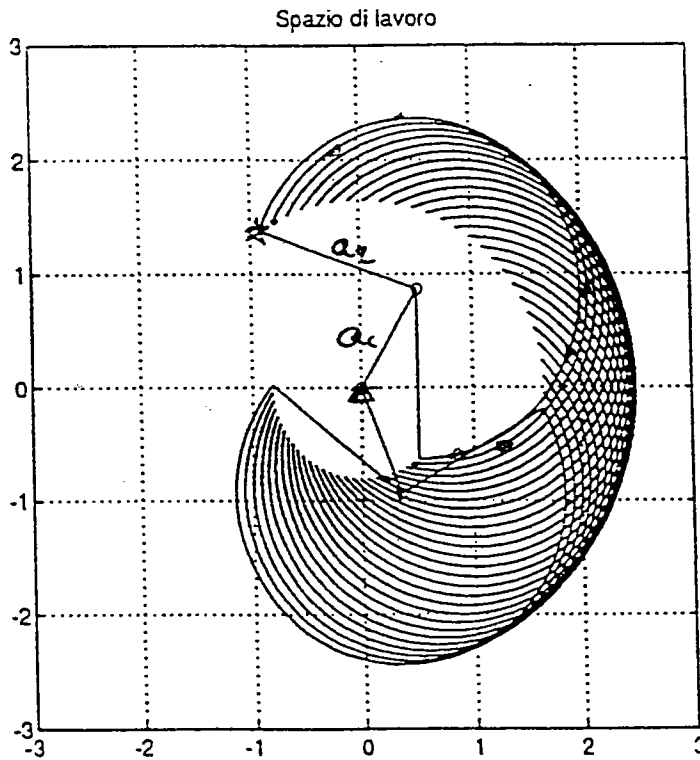
Poiché i giunti sono o rotoidali o prismatici, il volume è racchiuso da superfici planari, sferiche, cilindriche o toroidali.

IO - Manipolatore planare a due gradi di libertà.

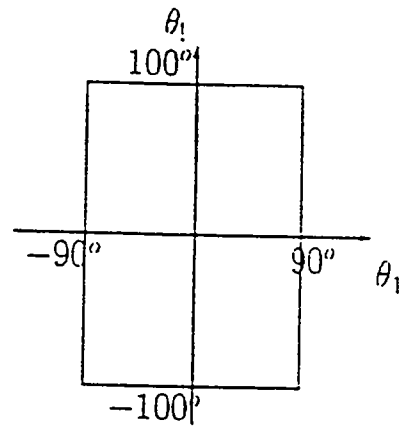
$a_1 = 1.0m$, $a_2 = 1.5m$ e $\theta_1 \in [-70^\circ \div 60^\circ]$ $\theta_2 \in [-150^\circ \div 100^\circ]$, si ha che lo spazio di giunto è un rettangolo nel piano $\theta_1 - \theta_2$



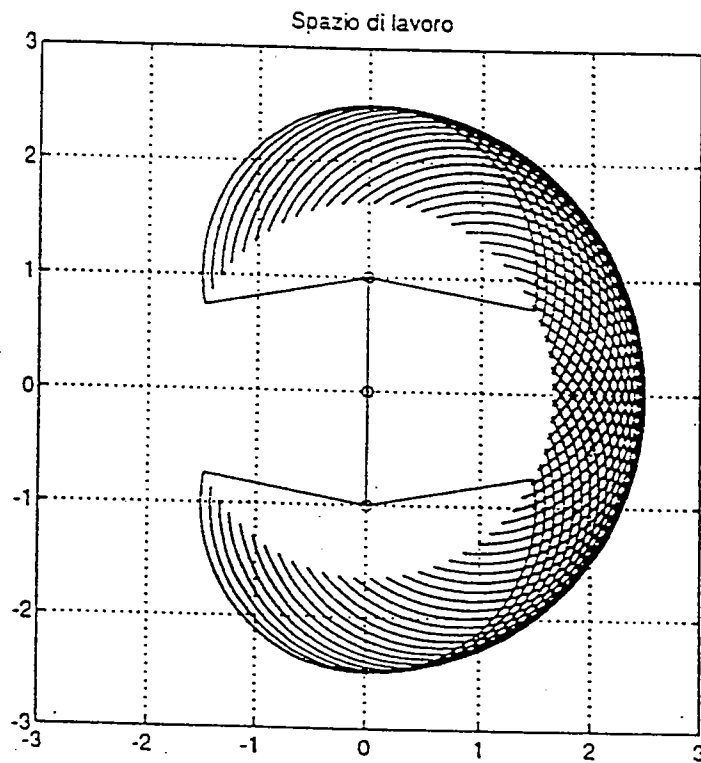
lo spazio di lavoro raggiungibile è



Se gli intervalli di variazione dei giunti sono diversi, per esempio $\theta_1 \in [-90 \div 90]$ e $\theta_2 \in [-100 \div 100]$, allora

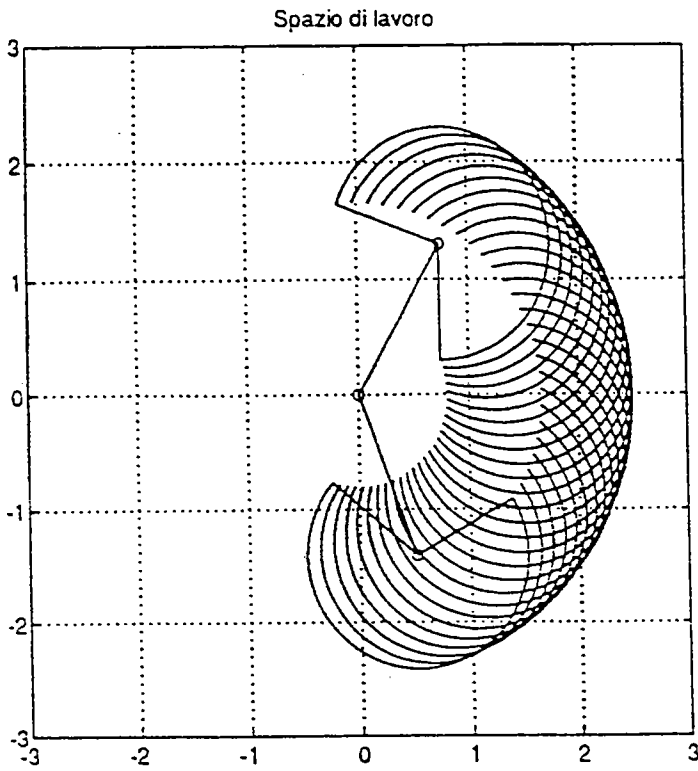


e lo spazio di lavoro raggiungibile diviene



3.63

$\in [-70 \div 60]$, $\theta_2 \in [-150 \div 100]$, se $a_1 = 1.5m$, $a_2 = 1.0m$ si ha



: per $a_1 = 1.8m$, $a_2 = 0.5m$

