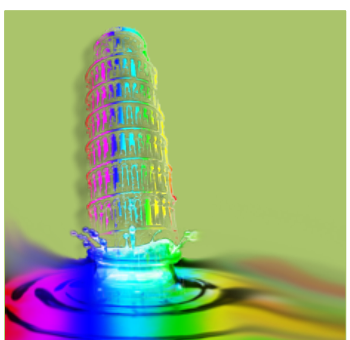
Modelli agli elementi finiti
Analisi strutturale



carmelo.demaria@centropiaggio.unipi.it

Analisi agli elementi finiti

- Il FEM è un metodo numerico (pertanto approssimato) che permette la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali.
- Il metodo degli elementi finiti consiste nella *discretizzazione* di un assegnato dominio in ***elementi*** fra loro connessi in un numero ***finito*** di punti (***nodi***), vertici degli elementi, in corrispondenza dei quali sono valutate le componenti della funzione incognita.
- Il valore della funzione all'interno del singolo elemento è ottenuto sulla base dei valori dei parametri nodali attraverso l'uso di opportune *funzioni di forma*.
- La scelta di tali funzioni, come pure del tipo di *mesh* con cui discretizzare il dominio è di importanza cruciale per una corretta convergenza della soluzione.

Matrice fondamentale

- Metodo di Galerkin

$$\boxed{\sum_{h=1}^{n} f_{ih}}\, \bar{u}_h = s_i + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Matrice fondamentale

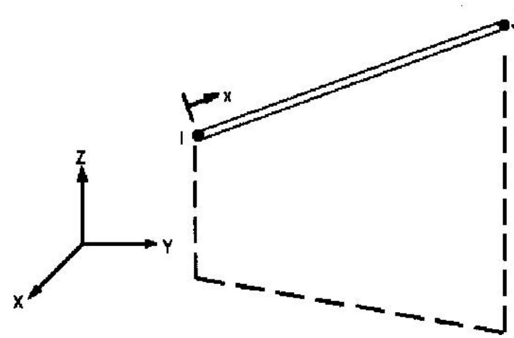
- Esistono altre strade che possono portare alla formulazione della “matrice fondamentale”
  - Metodi variazionali (principio dei lavori virtuali) (vedi dispensa)
  - Formulazione diretta (vedi dispensa)
  - Minimizzazione di un funzionale (energia potenziale totale)

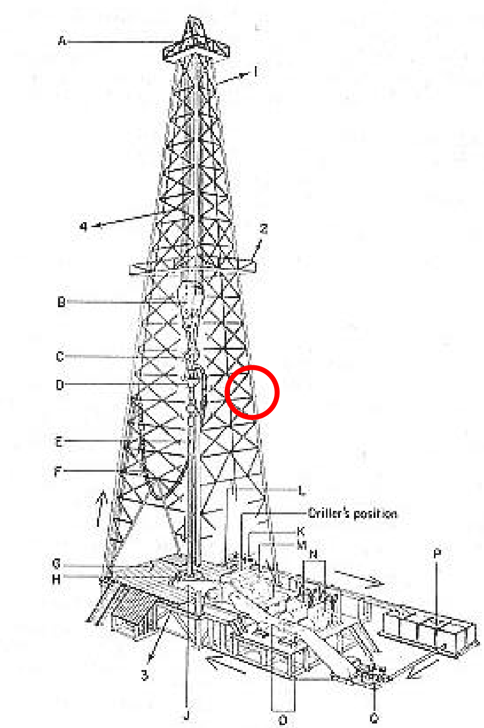
Matrice fondamentale

- Metodo variazionale
  1. Identificazione della adatta formulazione dell'elemento
  2. Scelta di insieme di funzioni con le quali si descriverà il campo interno di spostamenti (mediante loro combinazione lineare)
  3. Calcolo funzioni di forma, che legano gli spostamenti interni con quelli nodali Esplicitare legame campo deformazioni interne - spostamenti nodali
  4. Esplicitare legame campo tensioni interne - spostamenti nodali
  5. Applicare principio lavori virtuali (od altro principio variazionale) per determinare K
  6. A calcolo avvenuto, ricavare tensioni e deformazioni in base soluzione

Elemento asta

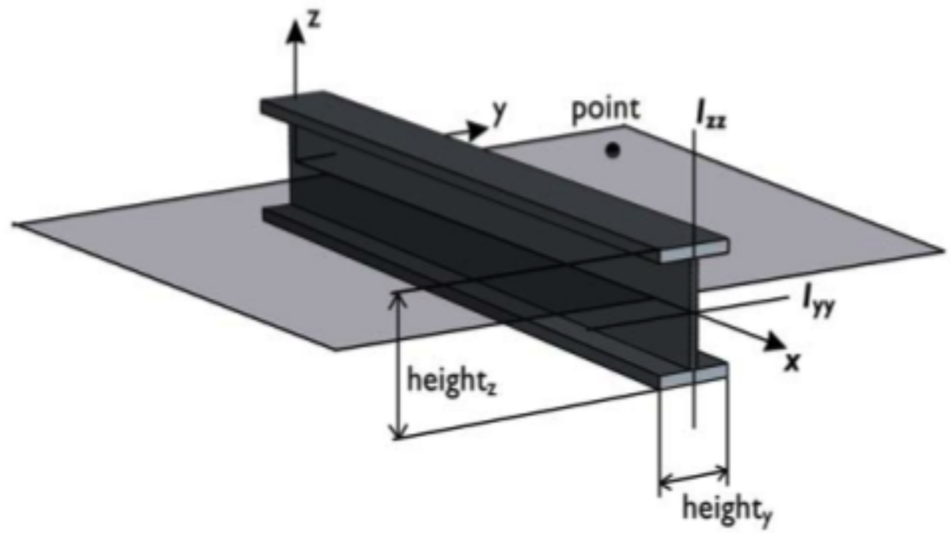
- Travature reticolari piane e spaziali
- solo sforzo normale
- 2 nodi
- 2 o 3 g.d.l /nodo
- carichi applicabili solo nei nodi
- Car. geometriche: A





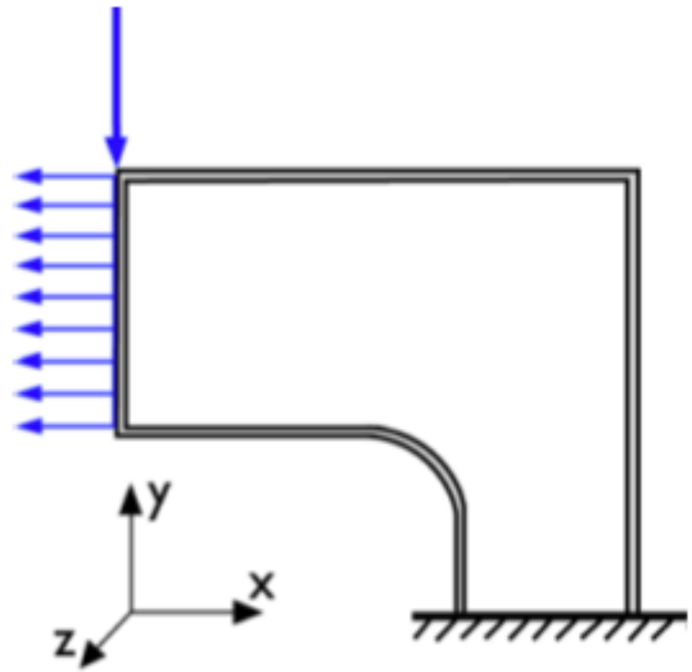
Elemento trave

- Equazione della linea elastica
- 2 nodi
- 3 gdl/nodo
- Carichi concentrati e distribuiti
- Caratteristiche geometriche (sezione, momento d'inerzia, ...)



Lastra (plane stress)

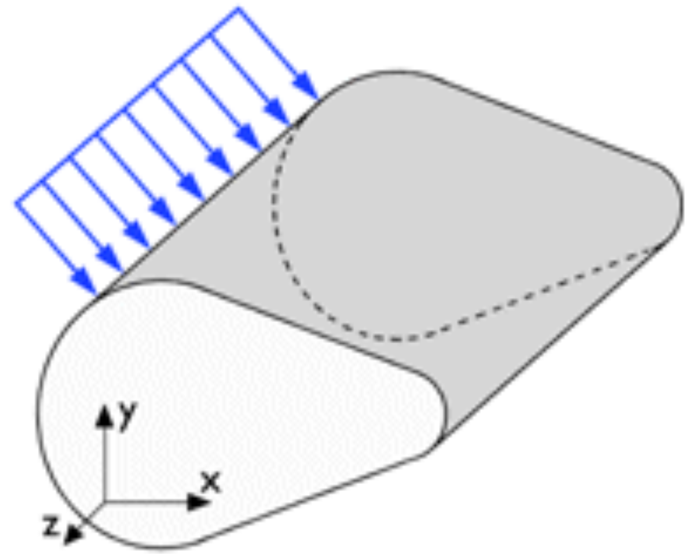
- **Stati piani di tensione:**
- sono caratterizzati dall'avere una delle componenti principali di tensione identicamente nulla
- si verificano tipicamente in corpi piani, di spessore piccolo rispetto alle altre dimensioni caratteristiche del problema, caricati nel loro piano medio.



Possibilità di inserire lo spessore del corpo

Analisi plain strain

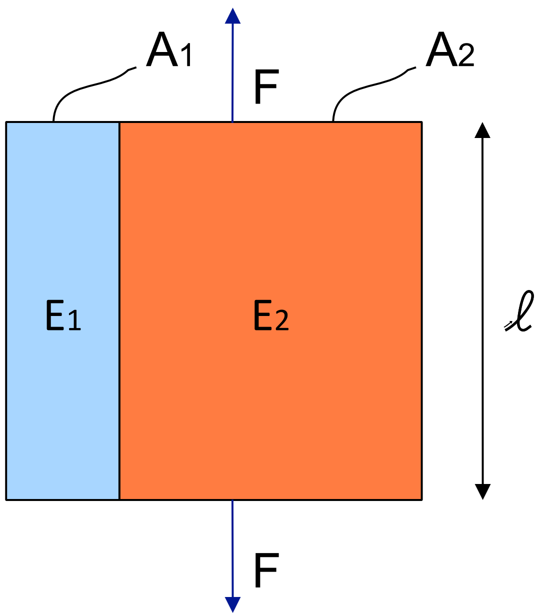
- **Stato piano di deformazione**
- una delle componenti principali di deformazione è identicamente nulla
- corpo piano, di spessore molto grande rispetto alle altre dimensioni caratteristiche del problema, caricato in modo omogeneo lungo lo spessore



Possibilità di inserire lo spessore del corpo

Modelli di omogenizzazione

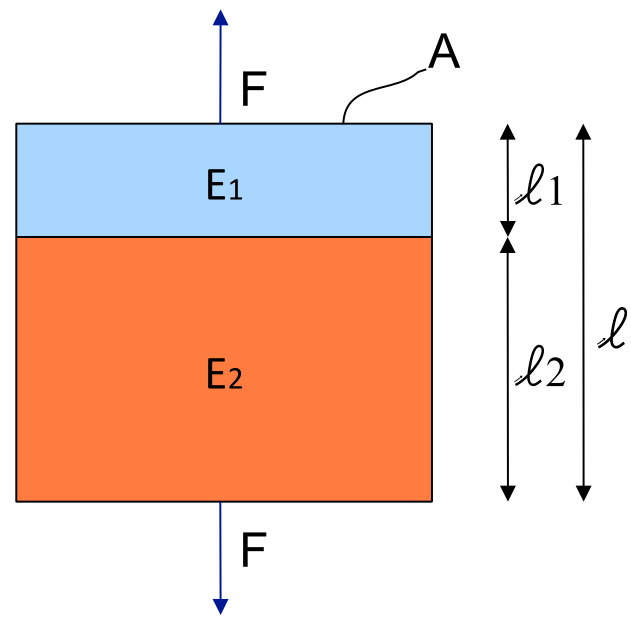
- Modello di Voigt



$$E = E_1 v_1 + E_2 \left(1 - v_1\right)$$

$$v_1 = \frac{A_1}{A_1 + A_2}$$

- Modello di Reuss



$$E = \frac{E_1 E_2}{E_1 \left(1 - f_1\right) + E_2 f_1}$$

$$f_1 = \frac{l_1}{l}$$

Esercizio 1

- Valutare il modulo elastico complessivo dei seguenti corpi della precedente diapositiva con il modello analitico e con quello ad elementi finiti (utilizzare l'analisi plane stress).

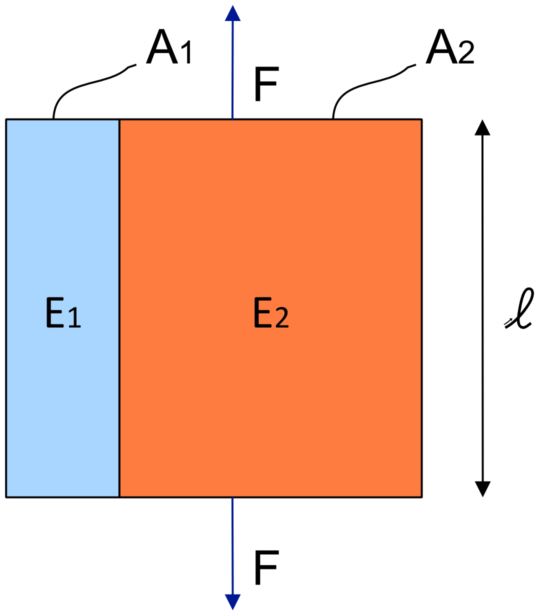
Nota esercizio 1

- I modelli di Reuss e Voigt non prendono in considerazione carichi di tipo trasversale. Per introdurre questo concetto è necessario porre il modulo di Poisson pari a 0, in modo tale che deformazioni normale provochino deformazioni (e quindi carichi) trasfersali.

- Il carico da imporre nel modello di modello di Voigt (o di isoderformazione) è quello di uno spostamento in direzione normale in modo da avere una isodeformazione su entrambi blocchi.

Esempio soluzione esercizio 1 (1/4)

Modello di Voigt



$$E = E_1 \nu_1 + E_2 (1 - \nu_1)$$

$$\nu_1 = \frac{A_1}{A_1 + A_2}$$

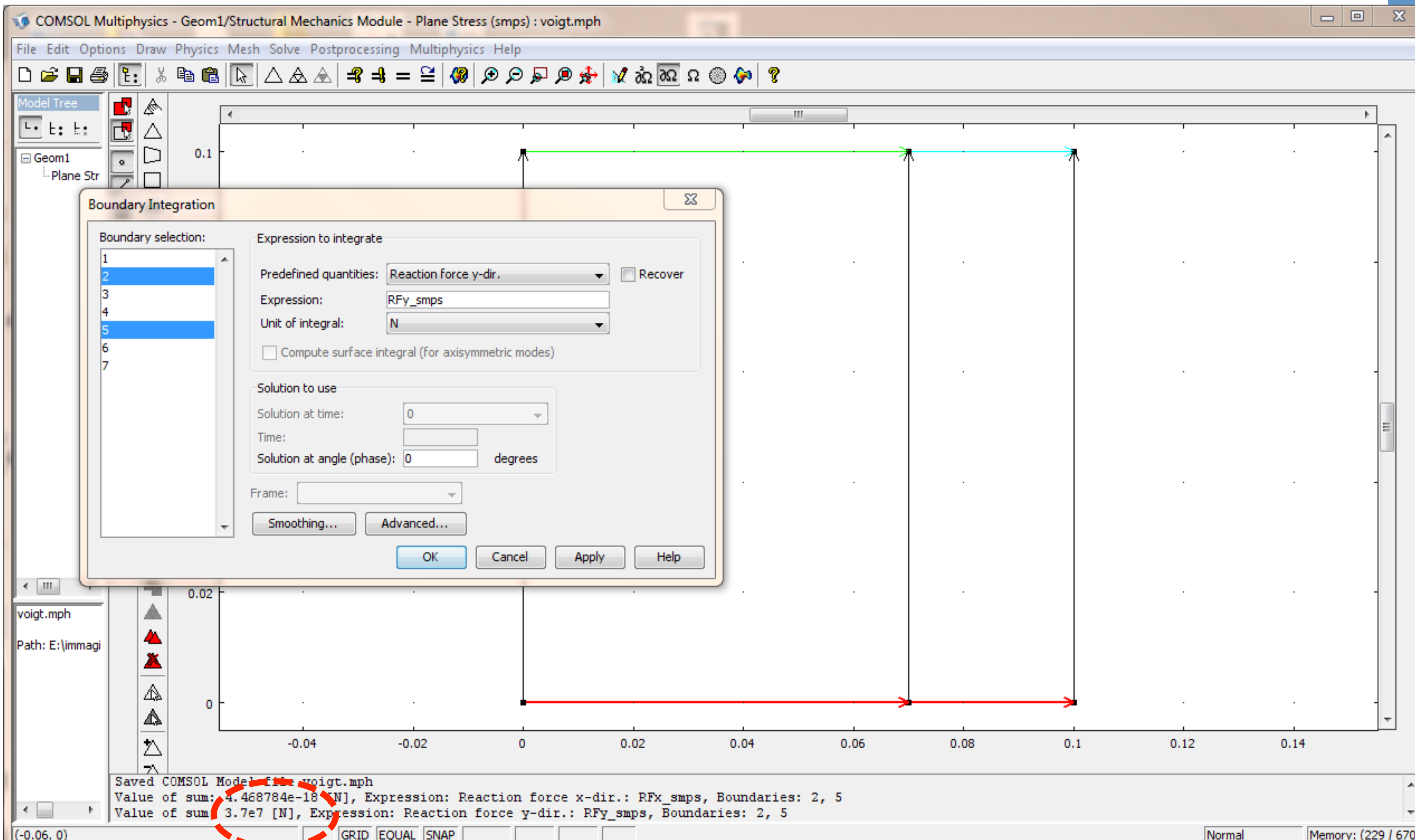
L	= 0.1 m
Spessore	= 0.1 m
A_1	= 0.03*0.1 m^2 = 0.003 m^2
A_2	= 0.07*0.1 m^2 = 0.007 m^2
ν_1	= 0.3
ν_2	= 0.7

Se E_1= 10 E_2= 100 GPa
E = 73 GPa

Per avere una deformazione del -10% lungo la direzione y devo applicare una forza pari a =

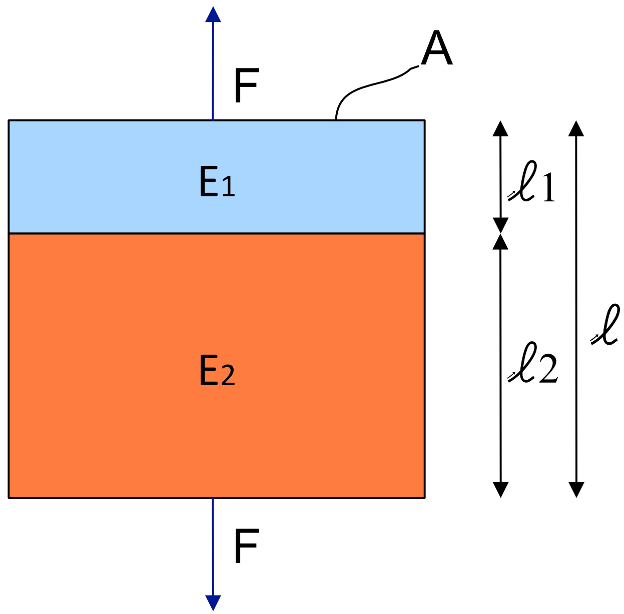
F = (E * ε) * A = 73 GPa * (-0.1) * 0.01 m^2 =
= -7.3 * 10^7 N

+ Esempio soluzione esercizio 1 (2/4)



Esempio soluzione esercizio 1 (3/4)

Modello di Reuss



$$E = \frac{E_1 E_2}{E_1 (1 - f_1) + E_2 f_1}$$

$$f_1 = \frac{l_1}{l}$$

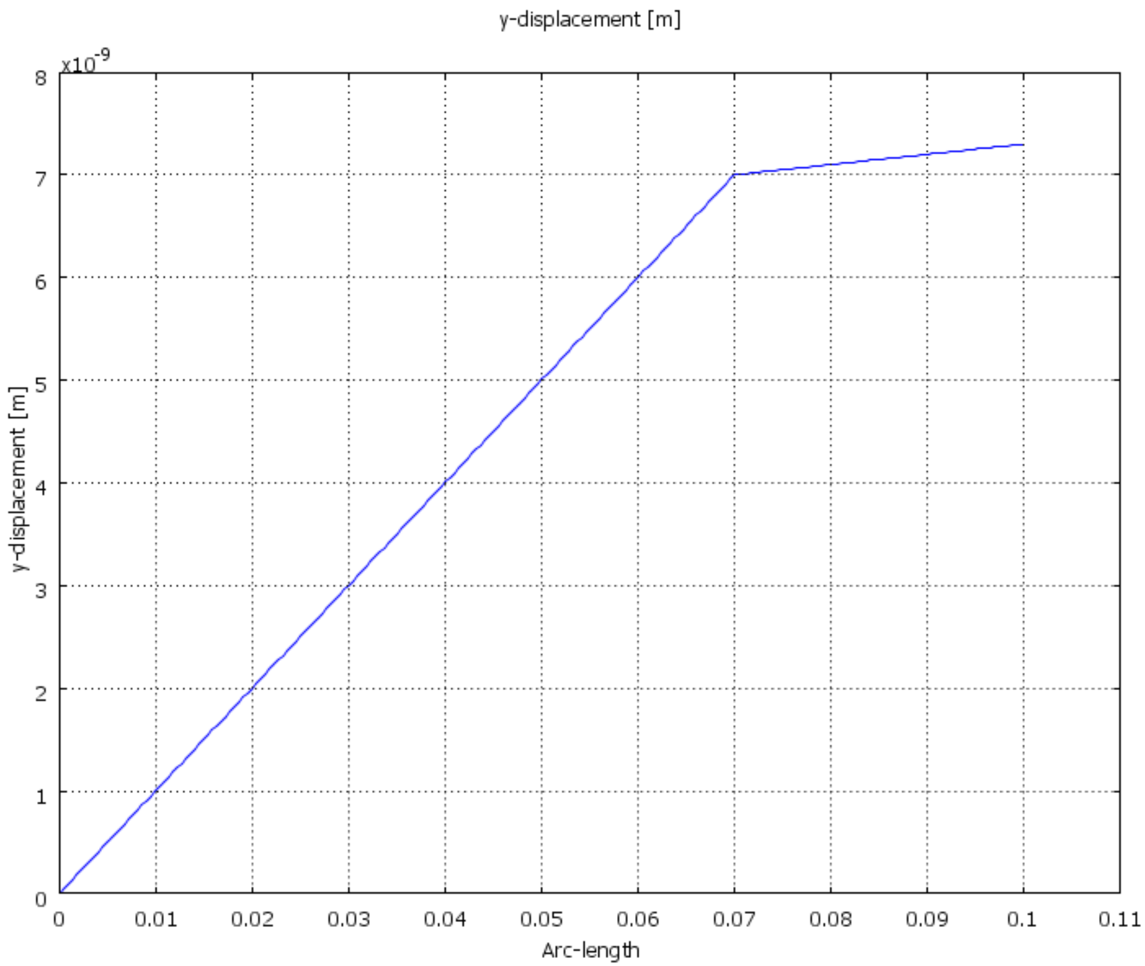
L	= 0.1 m
Spessore	= 0.1 m
l_1	= 0.03 m
l_2	= 0.07 m
f_1	= 0.3
f_2	= 0.7
A	= 0.1 * 0.1 m^2 = 0.01 m^2

Se E_1= 10 E_2= 100 GPa
E = 13.7GPa

Applicando una forza pressione in direzione y di 1 kPa ottengo uno spostamento totale di

Δy = 0.1m * (-1 kPa / 13.7 GPa) = 7.3*10^{-9} m

+ Esempio soluzione esercizio 1 (4/4)



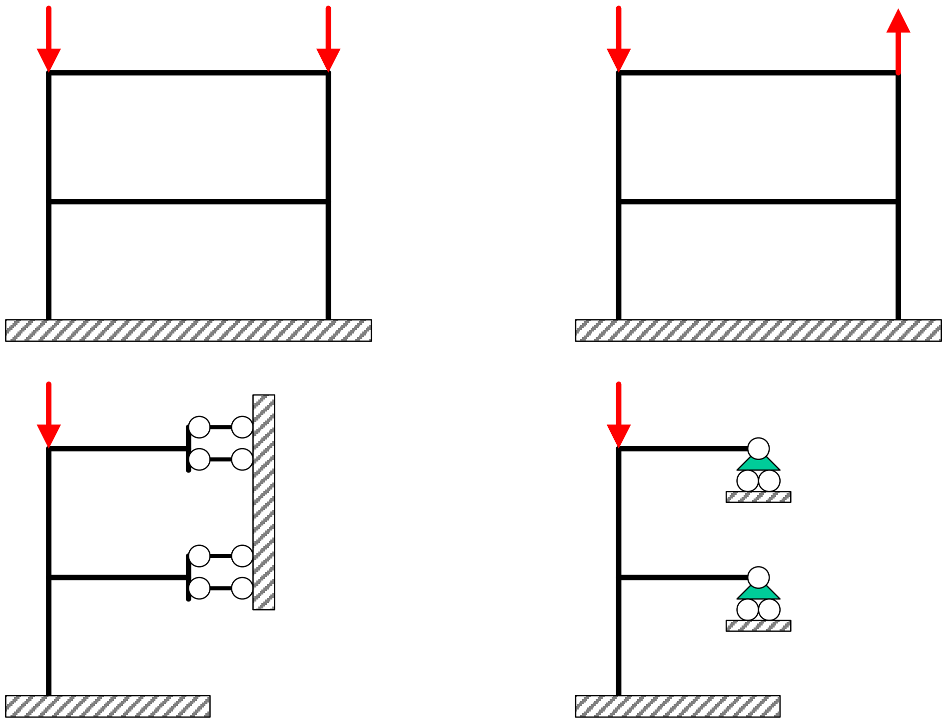
Spostamento dell'intera struttura valutato lungo la direzione y

Considerazioni di simmetria (1/5)

- L'uso di considerazioni di simmetria consente di ridurre le dimensioni del modello. I più comuni tipi di simmetria sono:
  - Simmetria speculare o di riflessione
  - Simmetria polare o di rotazione

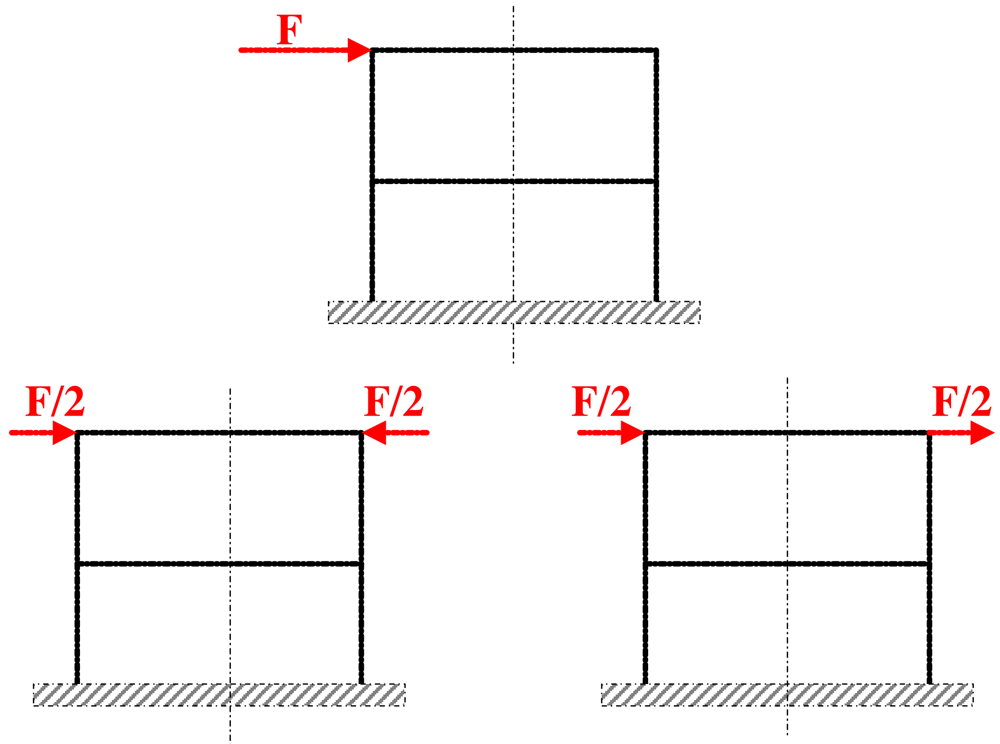
Considerazioni di simmetria (2/5)

Sfruttando la simmetria è possibile includere nel modello solo una parte della struttura, sostituendo la parte mancante con opportuni vincoli posti sul piano di divisione



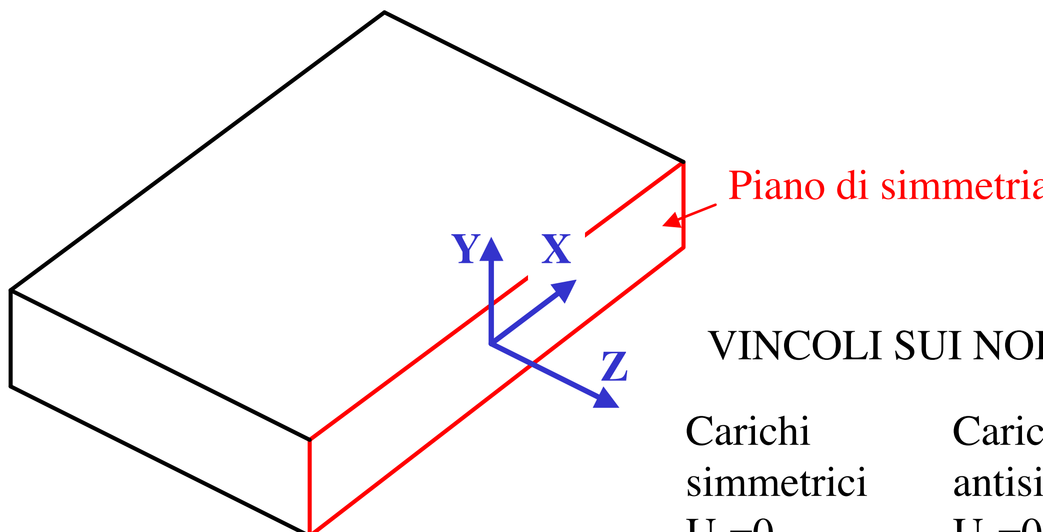
Considerazioni di simmetria (3/5)

I carichi non devono necessariamente essere simmetrici, dato che una condizione di carico qualsiasi può essere scissa in una componente simmetrica ed in una antisimmetrica.



Considerazioni di simmetria (4/5)

- **Simmetria di riflessione**
- La struttura viene tagliata in corrispondenza del piano di simmetria

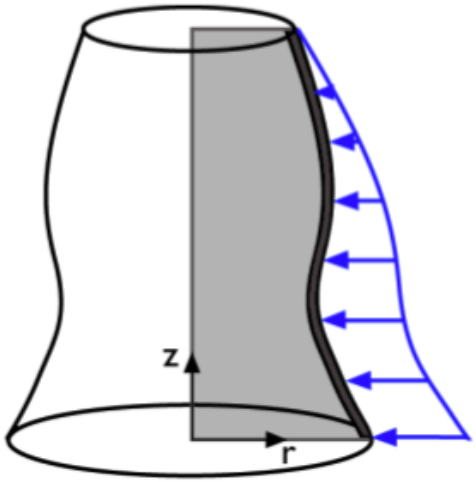


VINCOLI SUI NODI

Carichi simmetrici	Carichi antisimm.
$U_z=0$	$U_y=0$
$ROT_x=0$	$U_x=0$
$ROT_y=0$	$ROT_z=0$

Considerazioni di simmetria (5/5)

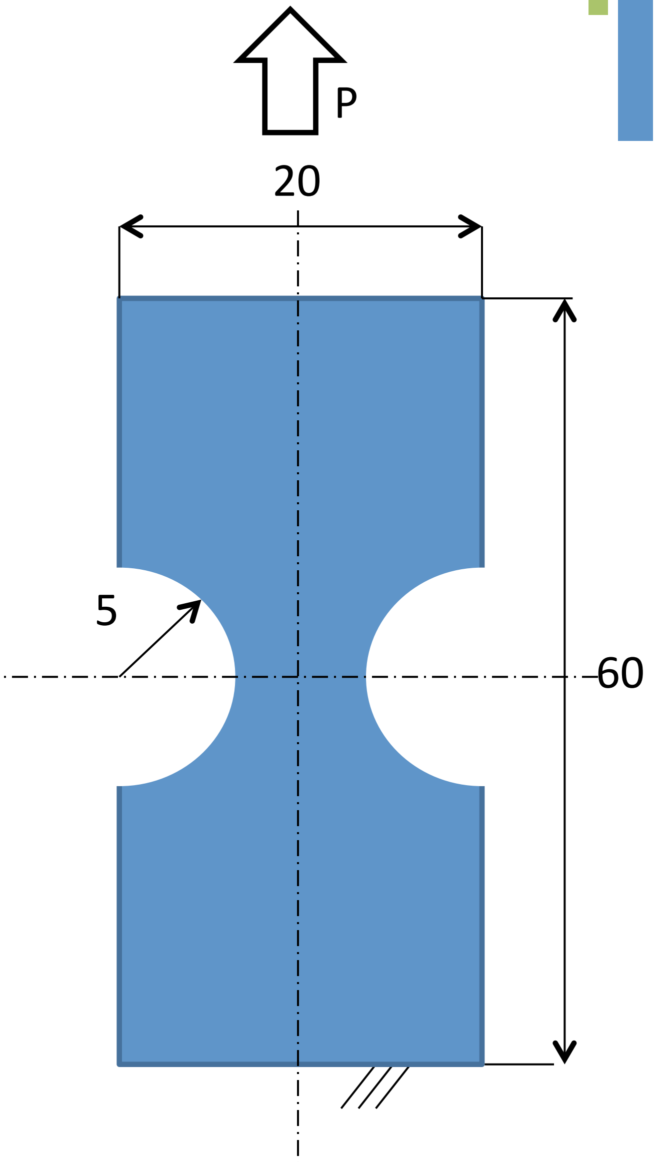
- **Corpi assial-simmetrici**
- Geometria assial-simmetrica (rotazione di una sezione attorno ad un asse fisso)
- Carichi a simmetria cilindrica



- Fissato un sistema di riferimento cilindrico “r, θ, z”, per simmetria lo stato di tensione/deformazione risulta indipendente da θ e le componenti di spostamento in direzione circonferenziale (θ) risultano nulle: il problema può di conseguenza essere studiato come piano.

Esercizio 2

- Lastra intagliata in trazione
  - Schematizzare la lastra di figura sfruttando i piani di simmetria
  - Misure in mm
  - Spessore: 5 mm
  - Modulo Elastico 10^9 Pa
  - P = 3000 Pa



Link utili

- http://www.uniroma2.it/didattica/Calc_Aut_Sis_Mec/deposito/08-Elementi-Formulazione-Generale_V1.pdf
- http://www.aero.polimi.it/~ls075775/bacheca/032FormulazioneFEM.pdf