CENTRO E. PIAGGIO
Bioengineering and Robotics Research Center

Introduzione elementare al metodo degli Elementi Finiti

carmelo.demaria@centropiaggio.unipi.it

Obiettivi

- Introduzione elementare al metodo degli elementi finiti
  - Analisi Termica
  - Analisi Strutturale
  - Analisi Fluidodinamica
- Utilizzo del software COMSOL 3.5

Un po’ di “filosofia”

Come avviene anche in altri settori di ricerca, la modellistica di per sé non è un'attività esclusivamente scientifica, anche se, naturalmente vi sono concetti universali che essa deve riprodurre, quali ad esempio la conservazione di massa e energia di un fluido, del momento d'inerzia di una struttura, [...],

vi è in effetti anche una componente *artistica* dietro una simulazione di successo, che deriva dal **sapere quali domande ha senso porre**, quale livello di *dettaglio* ha senso mettere nelle diverse componenti del modello, quali *semplificazioni* apportare in modo da favorire una sua integrazione con modelli diversi.

Alfio Quarteroni

Analisi agli elementi finiti

- Metodo per la risoluzione **numerica** di una equazione differenziale, sia essa alle derivate totali o parziali
- Più precisamente si tratta di un metodo per approssimare una equazione differenziale con un sistema di equazioni algebriche

Terminologia

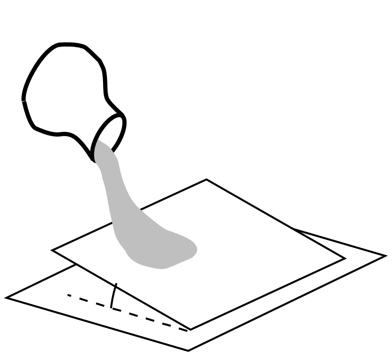
- Campo fisico (termico, elastico, fluidodinamico)
  - Stazionario
  - Statico
  - Variabile
  - Leggi (*equazioni differenziali*)
- Sorgenti
  - Interne
  - Esterne (*condizioni al contorno*)
- Potenziale del campo (*problema fondamentale*)

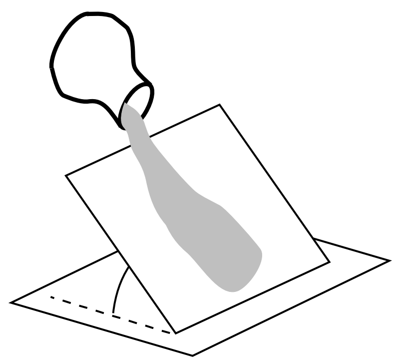
Problema fondamentale

- Assegnata la regione entro la quale si vuole considerare il campo
- Assegnato l’intervallo di tempo entro il quale si vuole considerare il campo
- Precisata la natura dei materiali contenuti entro la regione
- Assegnate la posizione e l’intensità delle sorgenti
- Precisate le condizioni al contorno della regione
- **Determinare in *ogni* punto ed in *ogni* istante i potenziali del campo**

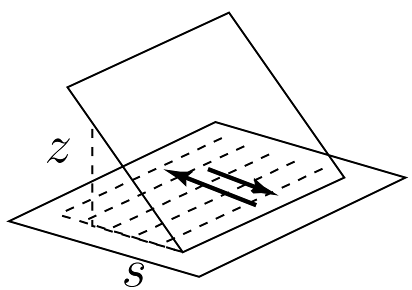
Nozioni preliminari (1/4)

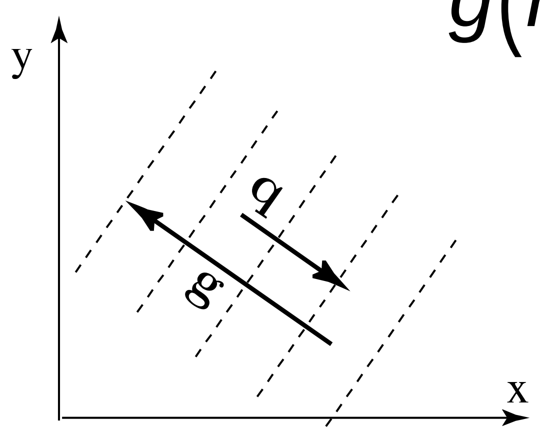
- Gradiente di uno scalare





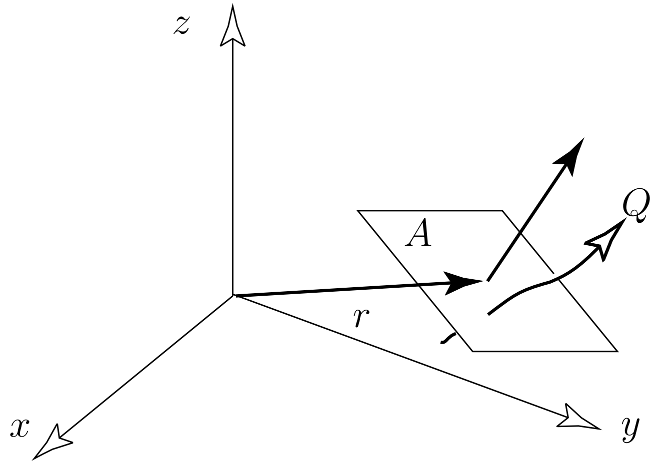
$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}$$

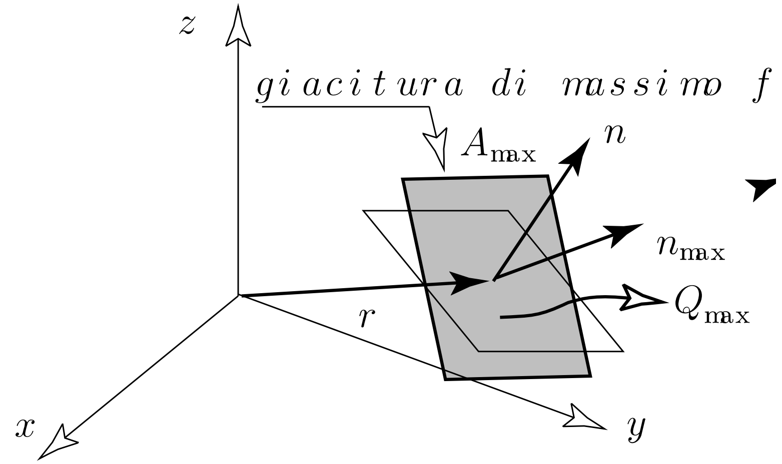




Nozioni preliminari (2/4)

- Densità di flusso

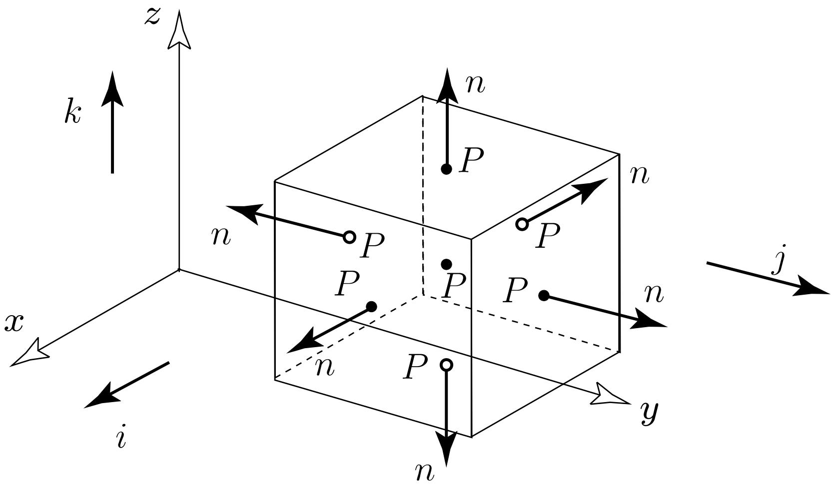




$$\vec{q}(\vec{r}) = \lim_{A \longrightarrow 0} \left(\frac{Q}{A} \right)_{max} \vec{n}_{max}.$$

Nozioni preliminari (3/4)

- Divergenza di un vettore



$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{q}$$

Nozioni preliminari (4/4)

- Operatore vettoriale nabla

$$\nabla = +\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

- Quindi il gradiente diventa

$$\mathrm{grad}\, u = \left[\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right] u = \nabla\, u$$

- E la divergenza diventa

$$\mathrm{div}\ \vec{q} = \left[+\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot [q_x\,\vec{i} + q_y\,\vec{j} + q_z\,\vec{k}] = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{q}$$

ANALISI TERMICA

Prima equazione costitutiva

- la quantità di calore che transita attraverso un elemento di superficie piana tangente ad una superficie isoterma per unità di area e per unità di tempo è proporzionale al salto di temperatura per unità di lunghezza misurato perpendicolarmente alla superficie

$$\vec{q} = -k\,\vec{g}.$$

Seconda equazione costitutiva

- Incremento dell'energia interna legato all'aumento della temperatura.

$$\mathrm{d}_t u = \rho c \, \mathrm{d}_t T$$

Equazione di Bilancio

- calore generato =
  calore accumulato + calore uscente

$$Q_{gen} = Q_{acc} + Q_{usc}$$

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}.$$

Equazione fondamentale

$$\rho\, c \frac{\partial T}{\partial t} - k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] = \sigma.$$

⇨ $$r\,c\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot k \nabla T = s$$

⇨ $$r\,c\frac{\partial T}{\partial t} - k \nabla^2 T = s$$

⇨ $$r\,c\frac{\partial T}{\partial t} - k\mathrm{D}T = s$$

I tre casi

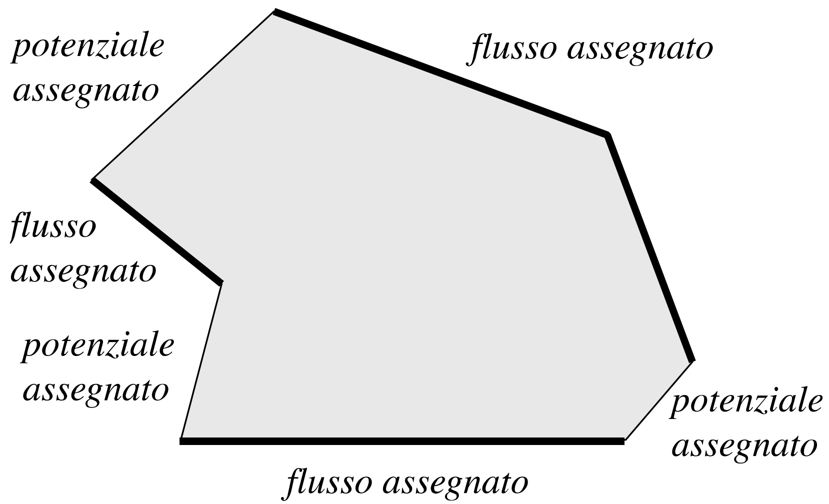
$$\rho\, c \frac{\partial T}{\partial t} - k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] = 0 \qquad \textit{Fourier}$$

$$-k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] = \sigma \qquad \textit{Poisson}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad \textit{Laplace}$$

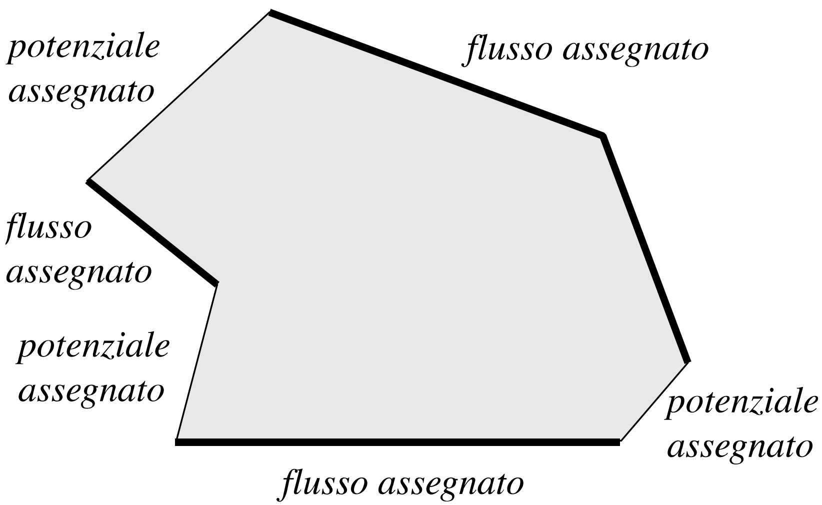
Condizioni al contorno 1/3

$$-k\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]= \sigma$$



Condizioni al contorno 2/3

$$\begin{cases} -k\,\nabla^2 u(x,y) & = & \sigma(x,y) \\ u(x,y) & = & \textit{assegnata su una parte del contorno} \\ -k\,\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial n} & = & \textit{assegnata sulla parte rimanente del contorno} \end{cases}$$



Condizioni al contorno 3/3

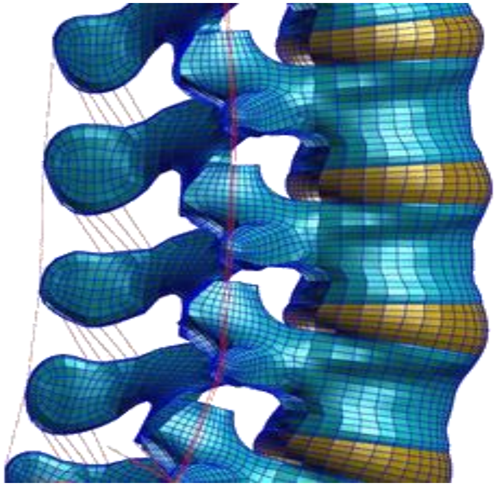
$$\begin{cases} \text{problema di Dirichlet} \\ -k\,\Delta u = \sigma \\ u|_{\partial\Omega} = assegnato \end{cases}$$

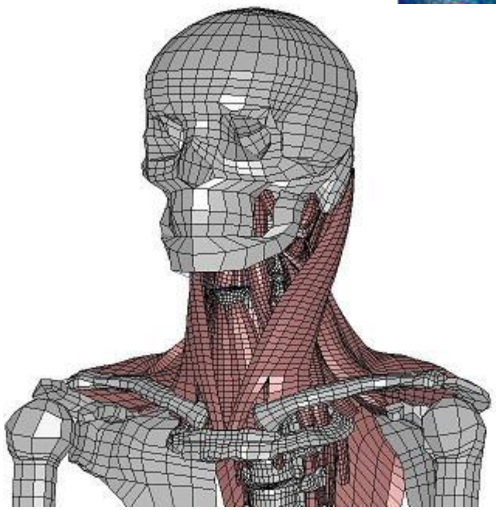
$$\begin{cases} \text{problema di Neumann} \\ -k\,\Delta u = \sigma \\ -k \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = assegnato \end{cases}$$

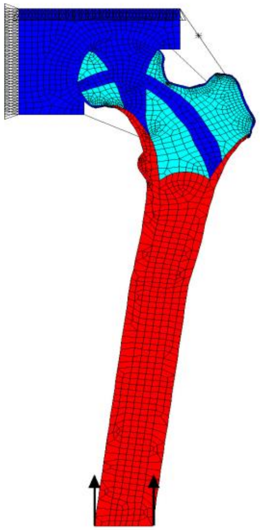
$$\begin{cases} \text{problema misto} \\ -k\,\Delta u = \sigma \\ u|_{A} = assegnato \\ -k \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{B} = assegnato \\ A \cup B = \partial\Omega \end{cases}$$

Analisi agli elementi finiti

- Elementi
- Nodi
- Funzioni Forma
- Gradi di libertà





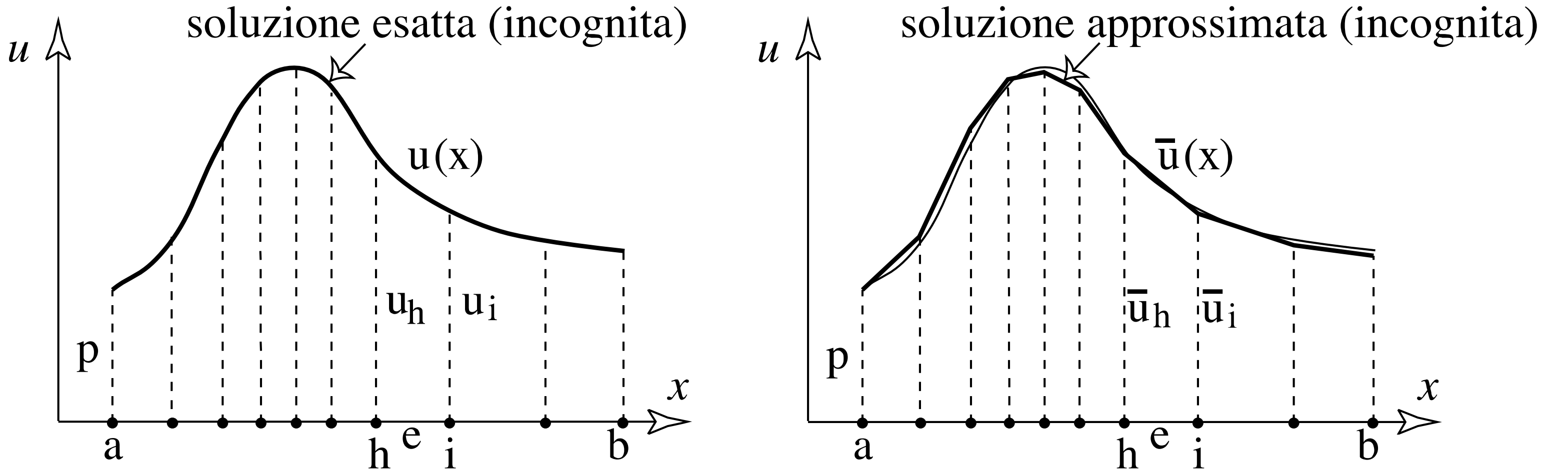


Analisi agli elementi finiti

- Il FEM è un metodo numerico (pertanto approssimato) che permette la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali.
- Il metodo degli elementi finiti consiste nella *discretizzazione* di un assegnato dominio in ***elementi*** fra loro connessi in un numero ***finito*** di punti (***nodi***), vertici degli elementi, in corrispondenza dei quali sono valutate le componenti della funzione incognita.
- Il valore della funzione all'interno del singolo elemento è ottenuto sulla base dei valori dei parametri nodali attraverso l'uso di opportune *funzioni di forma*.
- La scelta di tali funzioni, come pure del tipo di *mesh* con cui discretizzare il dominio è di importanza cruciale per una corretta convergenza della soluzione.

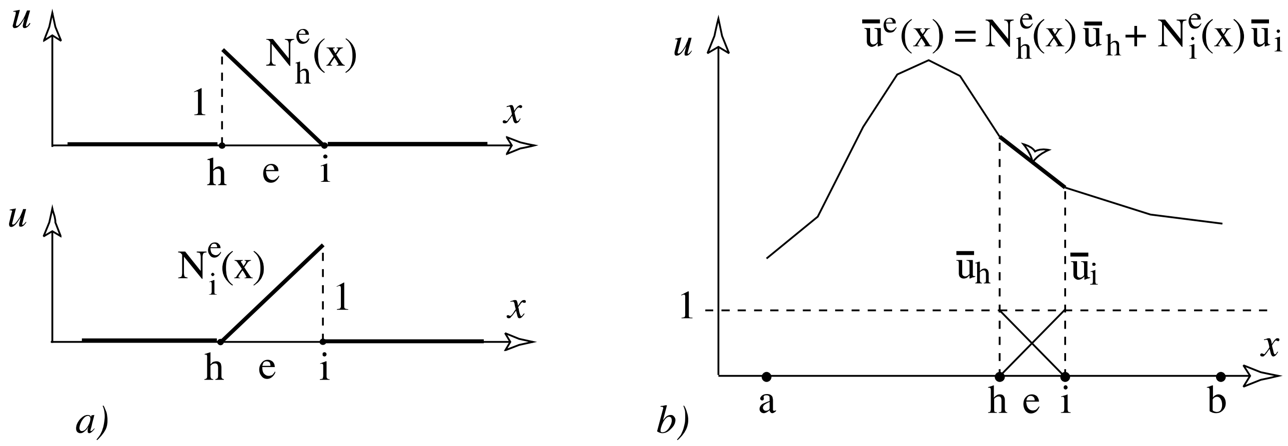
CASO MONODIMENSIONALE

Analisi agli elementi finiti



Analisi agli elementi finiti

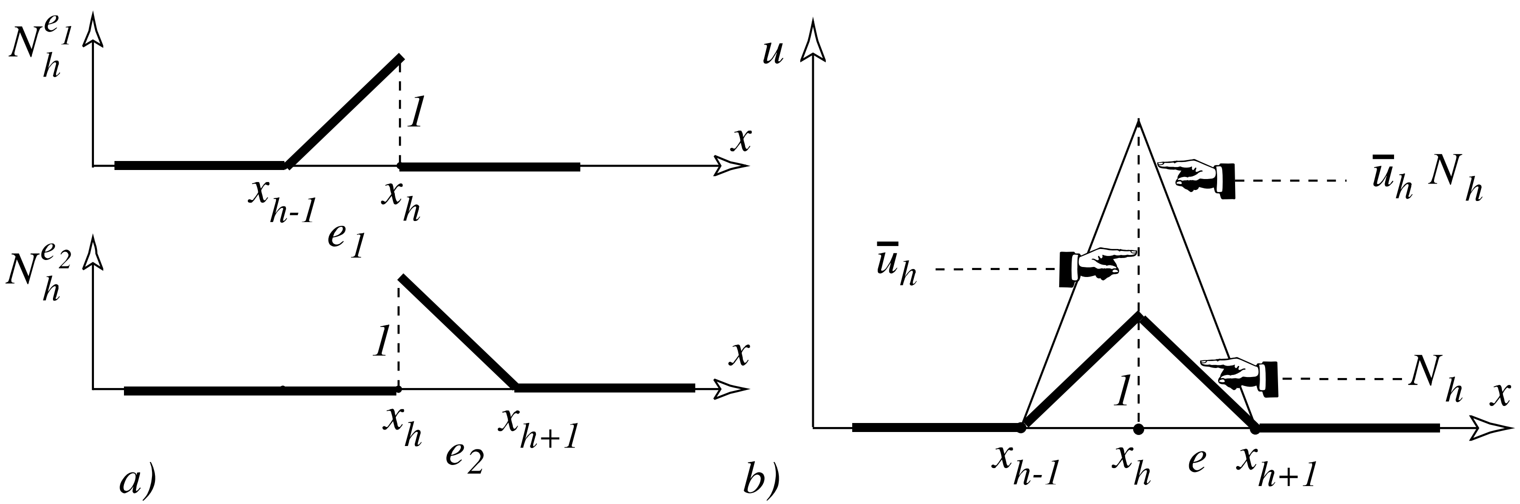
- Funzioni forma (elementi)



$$\bar{u}^e(x) = N_h^e(x)\,\bar{u}_h + N_{h+1}^e(x)\,\bar{u}_{h+1}$$

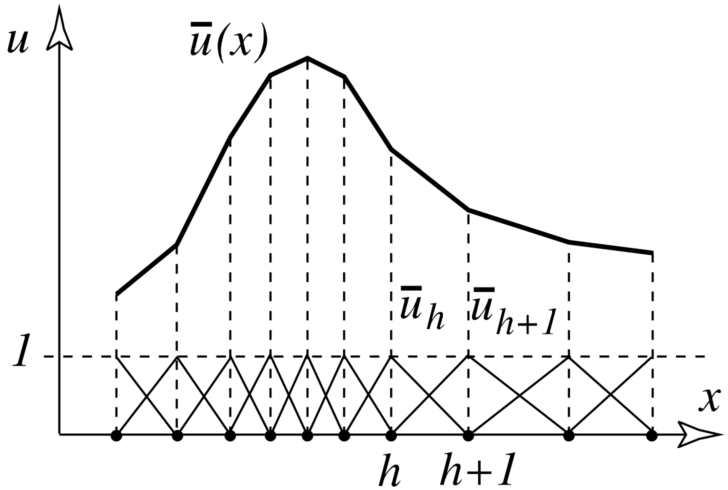
Analisi agli elementi finiti

- Funzioni forma (nodi)



Analisi agli elementi finiti

- Descrivere la funzione approssimanente come una combinazione delle funzioni di forma nodali:



$$\bar{u}(x) = \sum_{h=1}^{n} \bar{u}_h \, N_h(x)$$

Analisi agli elementi finiti

- Risoluzione: metodo di Galerkin (minimizzazione dell'errore)
- Se l'equazione di partenza è

$$-k \frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} = s(x)$$

- La soluzione approssimata conterrà un errore

$$r(x; \bar{u}_1,\ \bar{u}_2, \ldots \bar{u}_n) = -k \sum_{h=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^2 N_h(x)}{\mathrm{d}x^2}\ \bar{u}_h - s(x)$$

Analisi agli elementi finiti

- Determinare i “migliori” coefficienti minimizzano gli errori (metodo di Galerkin)
  - Residuo ortogonale alle n funzioni nodali
  - Integrazione per parti sulla derivata seconda per abbassare l’ordine delle dervate
  - Formazione del sistema algebrico (matrice fondamentale)

$$\boxed{\sum_{h=1}^{n} f_{ih}\, \bar{u}_h = s_i + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)}$$

Analisi agli elementi finiti

- Residuo ortogonale alle n funzioni nodali

$$\int_a^b N_i(x)\, r(x;\, \bar{u}_1,\, \bar{u}_2, \ldots \bar{u}_n)\mathrm{d}x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b N_i(x) \left[-k \frac{\mathrm{d}^2\, \bar{u}(x)}{\mathrm{d}x^2} - s(x) \right] \mathrm{d}x = 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n.$$

Analisi agli elementi finiti

- Integrazione per parti sulla derivata seconda per abbassare l'ordine delle dervate

$$-k\left[N_i(x)\,\frac{\mathrm{d}\,\bar{u}(x)}{\mathrm{d}x}\right]_a^b+\int_a^b k\,\frac{\mathrm{d}N_i(x)}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}\,\bar{u}(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-\int_a^b N_i(x)\,s(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b k\,\frac{\mathrm{d}N_i(x)}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}\,\bar{u}(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int_a^b N_i(x)\,s(x)\,\mathrm{d}x+k\left[N_i(x)\,\frac{\mathrm{d}\,\bar{u}(x)}{\mathrm{d}x}\right]_a^b$$

Analisi agli elementi finiti

- Formazione del sistema algebrico (matrice fondamentale)

$$
\left\{
\begin{aligned}
\int_a^b k\,\frac{\mathrm{d}N_i(x)}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}\,\bar{u}(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x &= \int_a^b k\,\frac{\mathrm{d}N_i(x)}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{h=1}^{n}\frac{\mathrm{d}N_h(x)}{\mathrm{d}x}\;\bar{u}_h\right]\mathrm{d}x \\
&= \sum_{h=1}^{n}\left[\int_a^b k\,\frac{\mathrm{d}N_i(x)}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}N_h(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]\;\bar{u}_h \\
&= \sum_{h=1}^{n} f_{ih}\;\bar{u}_h
\end{aligned}
\right.
$$

Analisi agli elementi finiti

- Formazione del sistema algebrico (**matrice fondamentale**)

$$f_{ih} \triangleq \int_a^b k \frac{\mathrm{d}N_i(x)}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}N_h(x)}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x.$$

Analisi agli elementi finiti

- Formazione del sistema algebrico (matrice fondamentale)

$$s_i \triangleq \int_a^b N_i(x)\, s(x)\, \mathrm{d}x \qquad\qquad c_i \triangleq k \left[N_i(x) \frac{\mathrm{d}\,\bar{u}(x)}{\mathrm{d}x} \right]_a^b$$

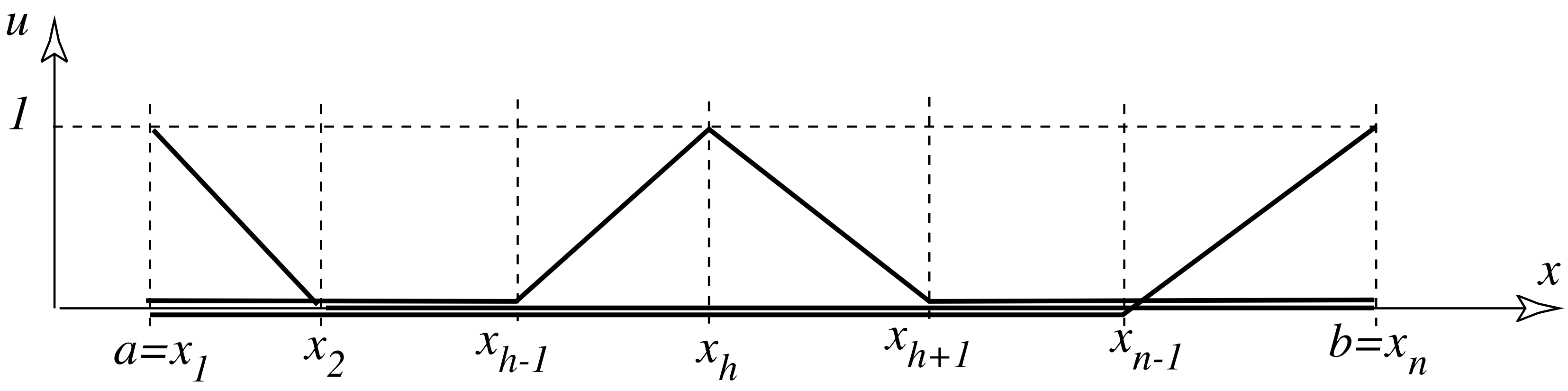
Analisi agli elementi finiti

- Formazione del **sistema algebrico**

$$\sum_{h=1}^{n} f_{ih}\, \bar{u}_h = s_i + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Calcolo esplicito dei coefficienti

- Matrice fondamentale:
  - i=h, con h nodo interno
  - i=h=1
  - i=h=n
  - i≠h



Calcolo esplicito dei coefficienti

- Matrice fondamentale:
  - i=h, con h nodo interno

$$
\begin{aligned}
f_{h,h} &= \int_a^b k \left[\frac{\mathrm{d}N_h}{\mathrm{d}x}\right]^2 \mathrm{d}x \\
&= k \int_{x_{h-1}}^{x_h} \left[\frac{1}{x_h - x_{h-1}}\right]^2 \mathrm{d}x + k \int_{x_h}^{x_{h+1}} \left[-\frac{1}{x_{h+1} - x_h}\right]^2 \mathrm{d}x \\
&= k\left(\frac{1}{x_h - x_{h-1}} + \frac{1}{x_{h+1} - x_h}\right)
\end{aligned}
$$

Calcolo esplicito dei coefficienti

- Matrice fondamentale:
  - i=h=1

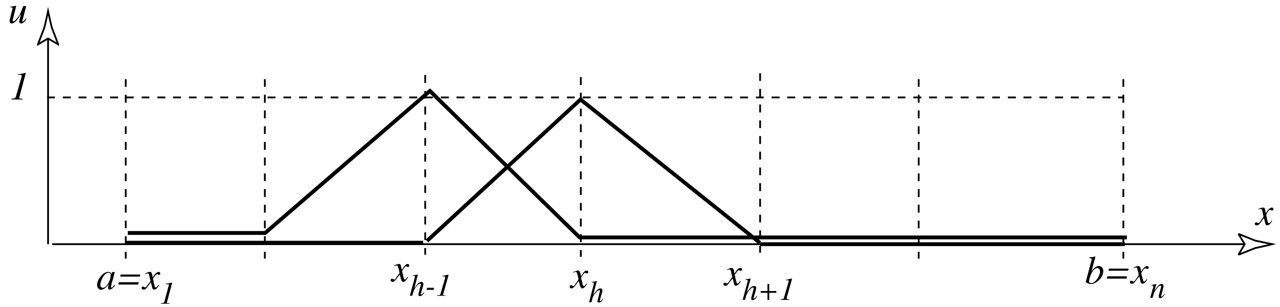
$$f_{1,1} = \int_a^b k \left[\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x}\right]^2 \mathrm{d}x = k \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{x_2 - x_1}\right]^2 \mathrm{d}x = k \left(\frac{1}{x_2 - x_1}\right)$$

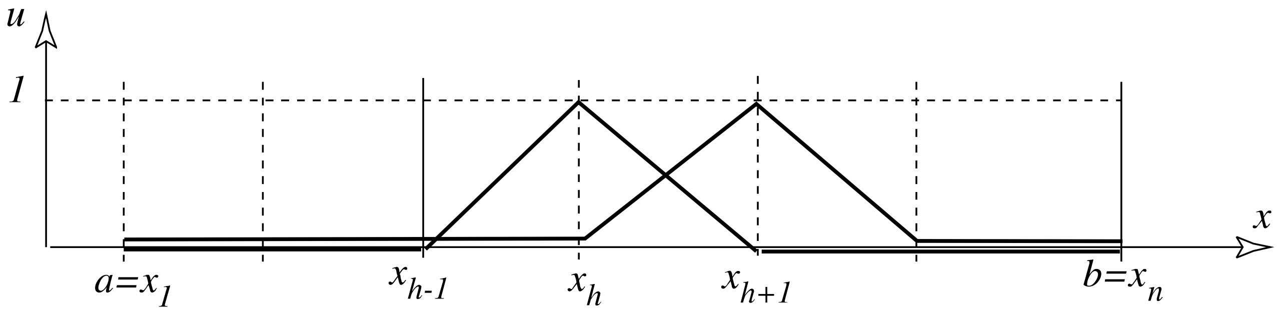
  - i=h=n

$$f_{n,n} = \int_a^b k \left[\frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}x}\right]^2 \mathrm{d}x = k \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left[\frac{1}{x_n - x_{n-1}}\right]^2 \mathrm{d}x = k \left(\frac{1}{x_n - x_{n-1}}\right)$$

Calcolo esplicito dei coefficienti

- Matrice fondamentale:
  - i≠h





Calcolo esplicito dei coefficienti

- Matrice fondamentale:
  - i≠h (adiancenti)

$$
\begin{aligned}
f_{h-1,h} &= \int_a^b k \,\frac{\mathrm{d}N_{h-1}(x)}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}N_h(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_{x_h-1}^{x_h} k\,\frac{-1}{x_h - x_{h-1}}\,\frac{1}{x_h - x_{h-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= -k\left(\frac{1}{x_h - x_{h-1}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{h+1,h} &= \int_a^b k \,\frac{\mathrm{d}N_{h+1}(x)}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}N_h(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_{x_h}^{x_{h+1}} k\,\frac{1}{x_{h+1} - x_h}\,\frac{-1}{x_{h+1} - x_h}\,\mathrm{d}x \\
&= -k\left(\frac{1}{x_{h+1} - x_h}\right)
\end{aligned}
$$

Calcolo esplicito dei coefficienti

- Matrice fondamentale:
  - $i \neq h$ (non adiancenti) ➔ f_{hk}
  - La matrice fondamentale è tridiagonale

Calcolo esplicito dei coefficienti

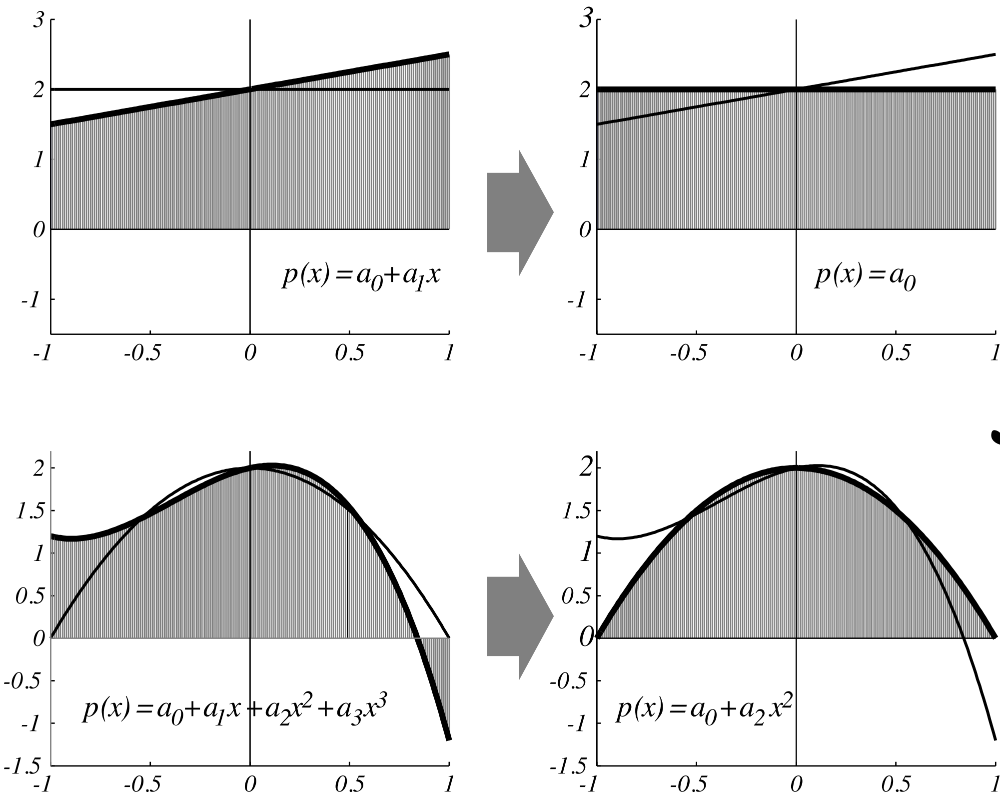
- Calcolo degli s_i

$$s_i \stackrel{\triangle}{=} \int_a^b N_i(x)\, s(x)\, \mathrm{d}x = \int_{e_1} N_i(x)\, s(x)\, \mathrm{d}x + \int_{e_2} N_i(x)\, s(x)\, \mathrm{d}x$$

$$\begin{cases} s_1 &= \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\, s(x)\, \mathrm{d}x \\ s_h &= \displaystyle\int_{x_{h-1}}^{x_h} \frac{x - x_{h-1}}{x_h - x_{h-1}}\, s(x)\, \mathrm{d}x + \int_{x_h}^{x_{h+1}} \frac{x_{h+1} - x}{x_{h+1} - x_h}\, s(x)\, \mathrm{d}x \\ s_n &= \displaystyle\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\, s(x)\mathrm{d}x \end{cases}$$

Calcolo esplicito dei coefficienti

- Calcolo degli s_i
  - Utilizzo del punti di Gauss



$$\int_a^b p(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} w_k\, p(x_k)$$

Calcolo esplicito dei coefficienti

- Calcolo degli c_i
- Ipotizzando che il sistema da risolvere sia

$$-k\,\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} = s(x) \qquad u\big|_a = 0 \qquad -k\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\bigg|_b = 0$$

$$c_i \stackrel{\triangle}{=} k\left[N_i(x)\,\frac{\mathrm{d}\,\bar{u}(x)}{\mathrm{d}x}\right]_a^b = k\,N_i(b)\,\left.\frac{\mathrm{d}\,\bar{u}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_b$$

$$c_n = \left[k\,\frac{\mathrm{d}\,\bar{u}(x)}{\mathrm{d}x}\right]_b = 0$$

Calcolo esplicito dei coefficienti

- Calcolo degli c_i
- Ipotizzando che il sistema da risolvere sia

$$-k\,\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} = s(x) \qquad u\big|_a = 0 \qquad -k\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\bigg|_b = 0$$

$$\begin{cases} \text{per } i = 1 & c_1 \text{ non si può calcolare} \\ \text{per } i = 2, 3, \ldots (n-1) & c_i = 0 \\ \text{per } i = n & c_n = 0 \end{cases}$$

Calcolo esplicito dei coefficienti

- Sistema finale

$$\begin{cases} f_{1,1}\,\bar{u}_1 + f_{1,2}\,\bar{u}_2 + \ldots + f_{1,n}\,\bar{u}_n & = & s(1) + c(1) \\ f_{2,1}\,\bar{u}_1 + f_{2,2}\,\bar{u}_2 + \ldots + f_{2,n}\,\bar{u}_n & = & s(2) + c(2) \\ \ldots & & \\ f_{n,1}\,\bar{u}_1 + f_{n,2}\,\bar{u}_2 + \ldots + f_{n,n}\,\bar{u}_n & = & s(n) + c(n) \end{cases}$$

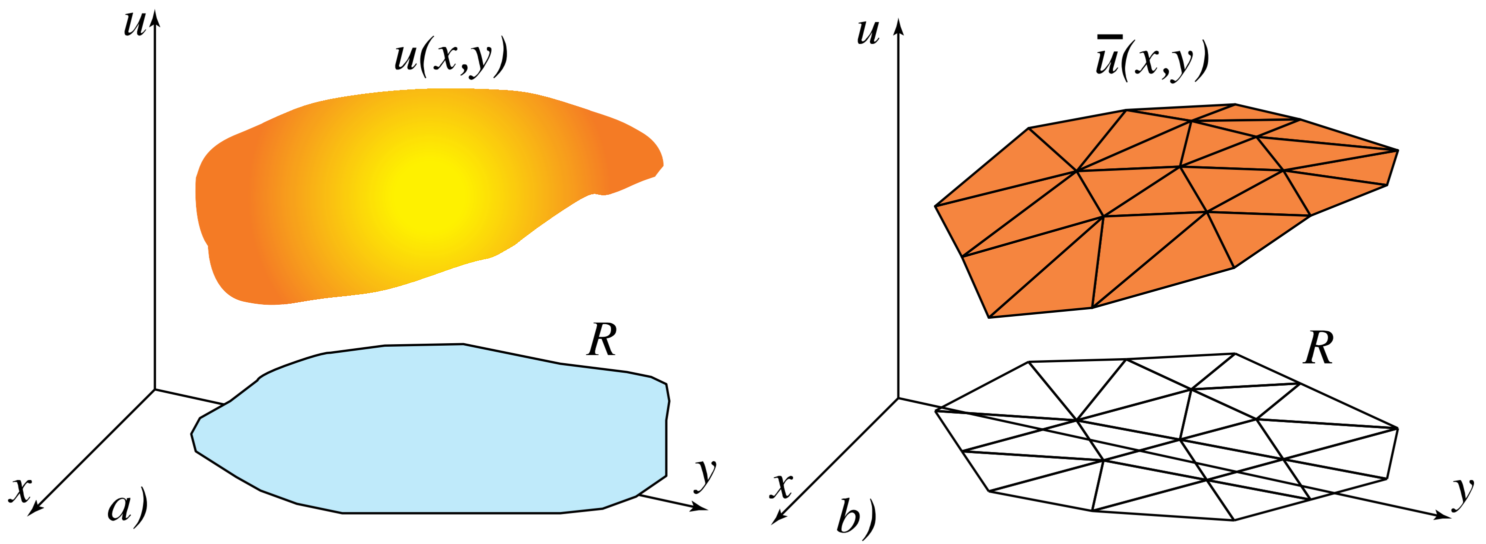
Dove

$$1\ \bar{u}_1 + 0\ \bar{u}_2 + \ldots + 0\ \bar{u}_n \quad = \quad 0$$

$f_{1,1} = 1$ e $f_{1,h} = 0$ per $h \neq 1$.

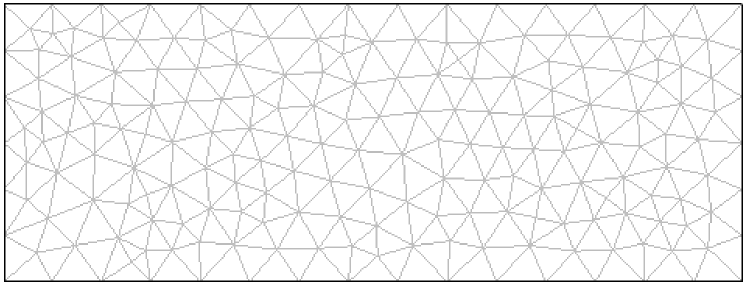
CASO BIDIMENSIONALE

Suddivisione del dominio in elementi

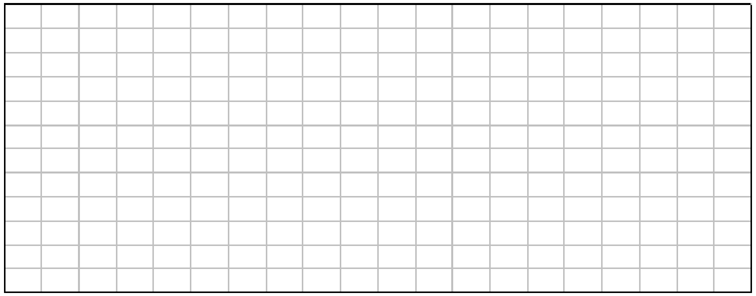


Mesh

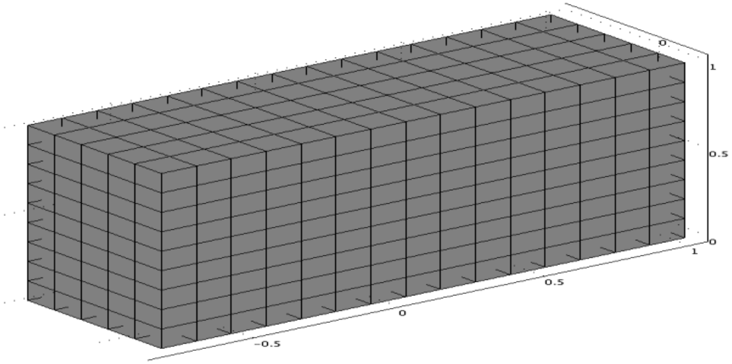
- Free Mesh



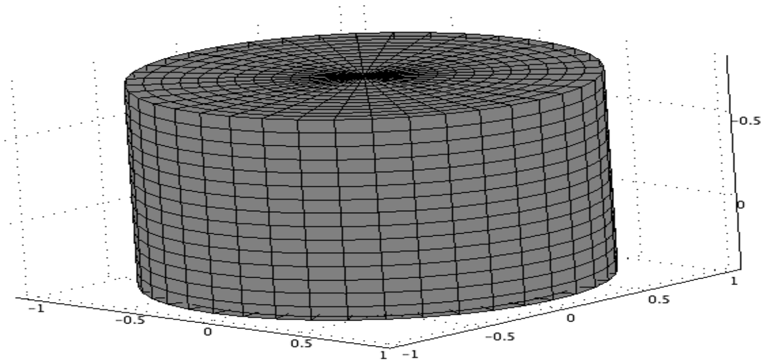
- Mapped Mesh



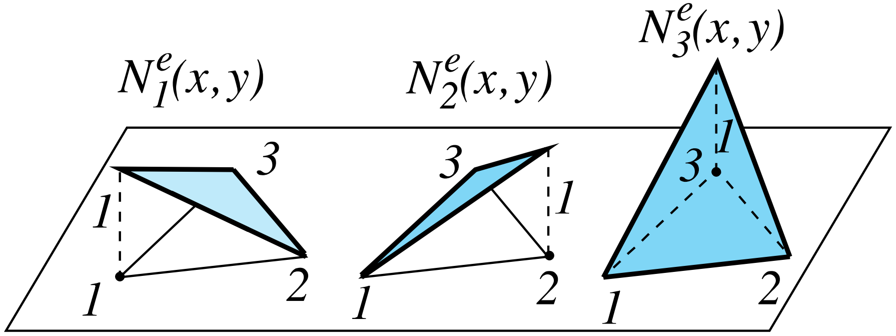
- Extruded Mesh

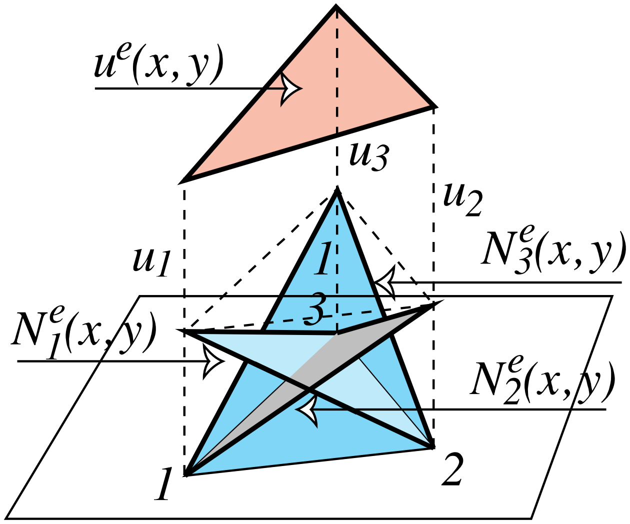


- Revolved Mesh

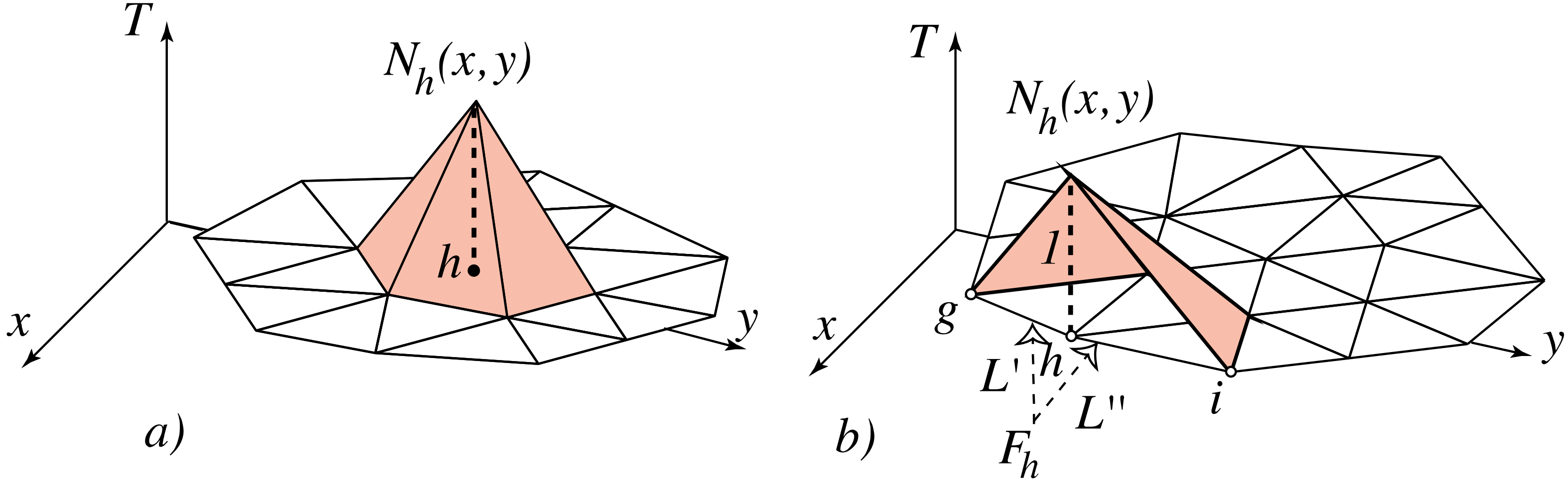


Funzioni di forma degli elementi





Funzioni di forma nodali



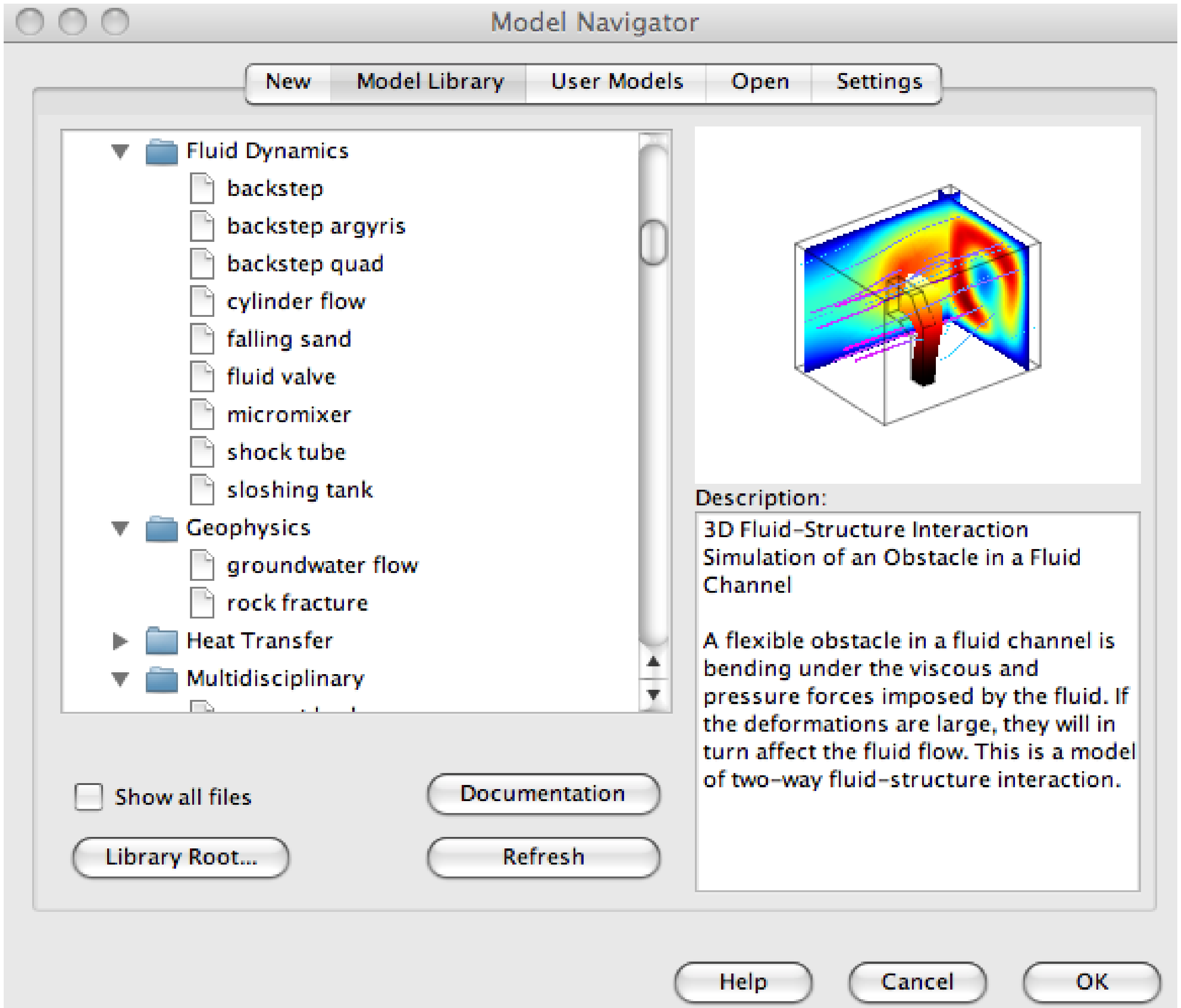
$$\bar{u}(x,y) = \sum_{h=1}^{M} \bar{u}_h \, N_h(x,y)$$

⇨ Metodo di Galerkin

Nota

- Esistono altri strade che possono portare alla formulazione della “matrice fondamentale”
  - Metodi variazionali (principio dei lavori virtuali)
  - Formulazione diretta
  - Minimizzazione di un funzionale (energia potenziale totale)

Comsol Multiphysics



Documenti utili

- http://www.dicar.units.it/mdp/tonti/science/elementiFiniti.pdf