

**Esercizio 1.**

Si consideri il sistema meccanico in figura 1, che rappresenta la dinamica trasversale di un convertiplano: un velivolo con due motori, ciascuno dei quali in grado di ruotare attorno all'asse parallelo alle ali. Questa particolarità fa sì che il convertiplano sia capace di decollare e atterrare verticalmente come un elicottero e, allo stesso tempo, di prestazioni in volo rettilineo paragonabili a quelle di un aereo.

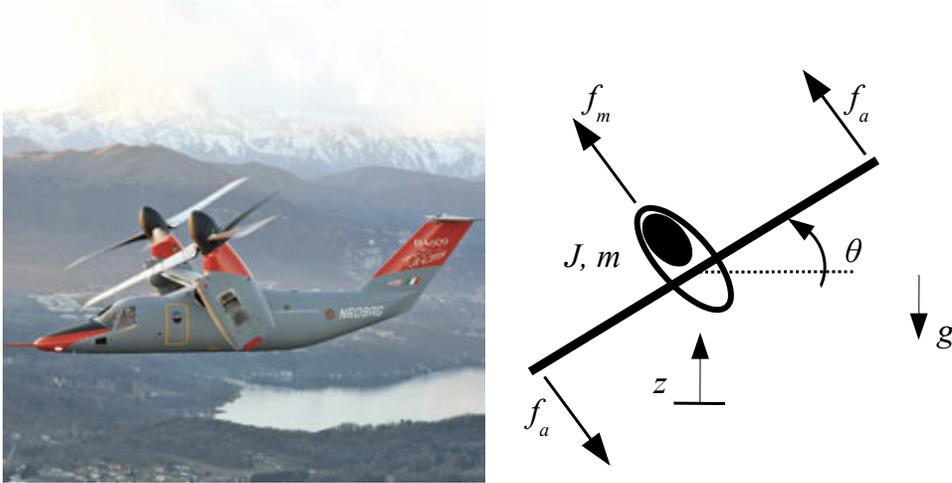


Figura 1: Schema del sistema meccanico.

Le equazioni che descrivono il comportamento dinamico del sistema sono:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + b\dot{z} &= f_m \cos\theta - mg \\ J\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} &= 2l f_a, \end{aligned} \quad (1)$$

dove  $J$  rappresenta l'inerzia del velivolo,  $m$  la sua massa,  $z$  la posizione verticale,  $\theta$  la posizione angolare,  $b$  e  $\beta$  i coefficienti di attrito viscoso equivalenti che modellano la resistenza dell'aria alla traslazione e rotazione del velivolo,  $l$  l'apertura alare,  $f_m$  ed  $f_a$  le due forze motrici e  $g$  l'accelerazione gravitazionale.

**A.1** Si determini, in forma simbolica, il punto di equilibrio del sistema corrispondente a  $\bar{\theta} = 0$ . Successivamente si calcoli il sistema linearizzato approssimato attorno all'equilibrio determinato, considerando come ingressi  $u_1 = f_m$  ed  $u_2 = f_a$ .

Si considerino i seguenti valori numerici:  $J = 5000 \text{ Kg m}^2$ ;  $m = 2000 \text{ Kg}$ ;  $b = 150 \text{ N s/m}$ ;  $\beta = 15 \text{ N m s/rad}$ ;  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $l = 10 \text{ m}$ .

**B.1** Considerando alternativamente  $f_a$  ed  $f_m$  come ingressi di controllo, si determini se, a partire dalla generica condizione iniziale di equilibrio, sia possibile portare il sistema linearizzato in una configurazione finale arbitraria, mediante un'opportuna azione di controllo.

**C.1** Si discutano la osservabilità e la detettabilità del sistema usando alternativamente  $z$  o  $\theta$  come uscita di misura.

**D.1** Dopo aver scelto, dandone una motivazione, le uscite e gli ingressi necessari tra quelli a disposizione, si progetti un compensatore basato su regolatore che permetta di raggiungere esattamente il valore desiderato  $z_s = [\bar{z} + 0.5]$  a partire dalla generica condizione di equilibrio  $\bar{z}$ .

**E.1** Si effettui quindi una simulazione del sistema linearizzato con il regolatore appena progettato, in ambiente `Matlab/Simulink`. Successivamente si effettui anche una simulazione del sistema originario non lineare con il compensatore progettato.

**Esercizio 2.**

Si considerino le seguenti funzioni di trasferimento

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}; \quad G_2(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}; \quad G_3(s) = \frac{s+4}{(s+5)(s+2)},$$

ed il sistema a blocchi di figura 2.

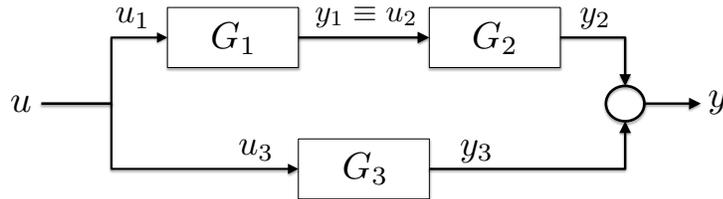


Figura 2: Interconnessione di sistemi.

- A.2** Si costruisca una rappresentazione del sistema complessivo nello spazio di stato ottenuto componendo i tre spazi di stato dei sottosistemi (dunque in dimensione complessiva 5) e la si ponga in forma di Kalman.
- B.2** Si determini una realizzazione minima del rapporto I/O complessivo.

## Soluzione

### Esercizio 1.

**A.1** Essendo l'equilibrio caratterizzato da  $\ddot{z} = \dot{z} = 0$  e  $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$ , sostituendo nel sistema nonlineare (1), si ottiene

$$\begin{aligned}\bar{\theta} &= 0 \\ \bar{z} &= \text{cost.} \\ \bar{u}_1 &= mg \\ \bar{u}_2 &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Indicando con  $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [z - \bar{z}, \theta, \dot{z}, \dot{\theta}]^T$  le variabili di stato traslate nell'equilibrio calcolato al punto precedente, e con  $\tilde{u} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T = [u_1 - mg, u_2]^T$ , i controlli, anch'essi traslati nell'equilibrio, il sistema linearizzato posto nella consueta forma di stato è

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u},\tag{3}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix}.$$

**B.1** Affinchè sia possibile portare il sistema linearizzato in una configurazione finale arbitraria a partire dalla configurazione iniziale di equilibrio, è necessario che il sistema sia completamente raggiungibile. Per verificarlo consideriamo la matrice di raggiungibilità del sistema, ovvero

$$\mathcal{R} = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$$

e valutiamone il rango. Iniziamo scegliendo come ingresso di controllo la forza  $f_m$ : la matrice di raggiungibilità è

$$\mathcal{R}_{f_m} = [B_1 \quad AB_1 \quad A^2B_1 \quad A^3B_1] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & -\frac{b}{m^2} & \frac{b^2}{m^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ \frac{m}{m} & -\frac{m^2}{0} & \frac{m^3}{0} & -\frac{m^4}{0} \end{bmatrix},$$

dove  $B_1$  rappresenta la prima colonna della matrice  $B$ . Si può verificare che  $\mathcal{R}_{f_m}$  ha rango 2, quindi il sistema non risulta essere completamente raggiungibile. Una base per lo spazio raggiungibile è

$$T_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dalla quale si deduce che le variabili di stato non raggiungibili da  $F_m$  sono  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ . Una base  $T_N$  per lo spazio complementare infatti è

$$T_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema scritto in forma standard di raggiungibilità può essere ottenuto con la matrice  $T = [T_R \quad T_N]$ . Infatti, detto  $\tilde{x} = T\tilde{z}$ , dove  $z$  è il vettore delle nuove variabili di stato, si ottiene

$$\dot{\tilde{z}} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{m} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{J} \end{array} \right] \tilde{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1.$$

Essendo il sottosistema non raggiungibile marginalmente stabile, si può concludere sulla non controllabilità del sistema con il solo ingresso  $f_m$ .

Scegliendo come ingresso di controllo la forza  $f_a$ , la matrice di raggiungibilità è

$$\mathcal{R}_{f_a} = [B_2 \quad AB_2 \quad A^2B_2 \quad A^3B_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} & -\frac{2l\beta}{J^2} & \frac{2l\beta^2}{J^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2l}{J} & -\frac{2l\beta}{J^2} & \frac{2l\beta^2}{J^3} & -\frac{2l\beta^3}{J^4} \end{bmatrix},$$

dove  $B_2$  rappresenta la seconda colonna della matrice  $B$ . Si può verificare che  $\mathcal{R}_{f_a}$  ha rango 2, quindi il sistema non risulta essere completamente raggiungibile anche in tal caso. Una base per lo spazio raggiungibile è

$$T_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dalla quale si deduce che le variabili di stato non raggiungibili da  $F_a$  sono  $z$  e  $\dot{z}$ . Una base  $T_N$  per lo spazio complementare infatti è

$$T_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema scritto in forma standard di raggiungibilità può essere ottenuto con la matrice  $T = [T_R \ T_N]$ . Infatti, detto  $\tilde{x} = T\tilde{z}$ , dove  $z$  è il vettore delle nuove variabili di stato, si ottiene

$$\dot{\tilde{z}} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{J} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{m} \end{array} \right] \tilde{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2l} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1.$$

Essendo il sottosistema non raggiungibile marginalmente stabile, si può concludere sulla non controllabilità del sistema anche con il solo ingresso  $f_a$ .

**C.1** Iniziamo scegliendo come uscita la variabile  $z$  e quindi la matrice delle uscite associata è  $C_z = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ . La matrice di osservabilità è

$$\mathcal{O}_z = \begin{bmatrix} C_z \\ C_z A \\ C_z A^2 \\ C_z A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b^2}{m^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Si può verificare che  $\mathcal{O}_z$  ha rango 2, quindi il sistema non risulta essere completamente osservabile non essendo osservabili  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ . Una base per il sottospazio inosservabile è

$$T_O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indicando con  $T_O$  una base complementare al sottospazio inosservabile, e detto  $\tilde{x} = T\tilde{z} = [T_O \ | \ T_{\mathcal{O}}]\tilde{z}$  con  $\tilde{z}$  il vettore delle nuove variabili di stato, il sistema posto nella forma standard di osservabilità è

$$\dot{\tilde{z}} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{J} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{m} \end{array} \right] \tilde{z}$$

$$y = [ 1 \ 0 \ | \ 0 \ 0 ] \tilde{z},$$

da cui si può concludere sulla non detettabilità del sistema.

Scegliendo invece  $\theta$  come uscita del sistema, ovvero  $C_\theta = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$ , la matrice di osservabilità diviene

$$\mathcal{O}_\theta = \begin{bmatrix} C_\theta \\ C_\theta A \\ C_\theta A^2 \\ C_\theta A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{J} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta^2}{J^2} \end{bmatrix}.$$

Anche in tal caso  $\mathcal{O}_\theta$  ha rango 2, quindi il sistema non è completamente osservabile. Una base per il sottospazio inosservabile è

$$T_{\bar{\mathcal{O}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

in quando  $z$  e  $\dot{z}$  non sono osservabili a partire dalla misura di  $\theta$ . Il sistema può essere posto anche in tal caso nella forma standard di osservabilità concludendo nuovamente sulla non detettabilità del sistema.

**D.1** Sulla base delle analisi di raggiungibilità e osservabilità e relative controllabilità e detettabilità svolte al punto precedente, per poter effettuare il progetto del compensatore basato sul regolatore in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema su qualsiasi stato, è necessario utilizzare entrambi gli ingressi ed entrambe le uscite. Si noti comunque che, essendo la condizione di equilibrio in tal caso caratterizzata da  $z = \bar{z}$  e  $\theta = 0$ , l'obiettivo di portare il sistema alla quota  $z_s = \bar{z} + 0.5$  potrebbe essere realizzato anche utilizzando la misura di  $z$ , controllando  $f_m$ . Il corrispondente stato non detettabile e non controllabile ( $\theta$  e  $\dot{\theta}$ ) avrà una dinamica marginalmente stabile che tuttavia per questo caso particolare non influenzando la dinamica di  $z$  e  $\dot{z}$  permette comunque di realizzare l'obiettivo.

Per soddisfare la richiesta di raggiungere il valore desiderato esattamente è necessaria anche la presenza di un polo nell'origine in catena diretta. Essendo il sistema di tipo "1", non è necessario inserire un polo nell'origine nel controllore. Essendo il sistema completamente raggiungibile utilizzando congiuntamente  $f_a$  e  $f_m$ , per la determinazione della matrice di retroazione degli stati si sceglie di fissare i poli del sistema in anello chiuso in  $p = [-1 \ -2 \ -3 \ -4]^T$ . Il comando `place` di **Matlab** fornisce automaticamente la matrice di retroazione:

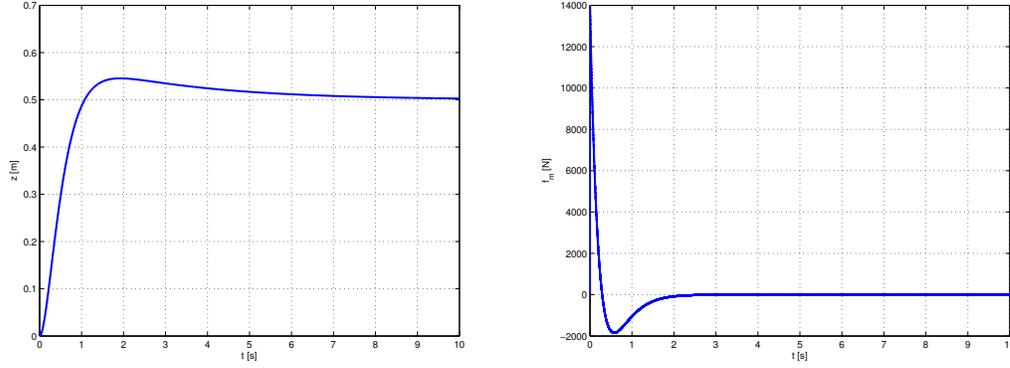
$$K = 10^4 \begin{bmatrix} 2.4 & 0 & 1.4 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0.0749 \end{bmatrix}.$$

Poichè non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile dalla misura congiunta di  $z$  e  $\theta$ , si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice  $L$  di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore  $A - LC$ , abbia autovalori in  $q = 2p$ . Impiegando il comando **Matlab**, `L = transpose(place(A',C',q))` si ottiene:

$$L = 10^4 \begin{bmatrix} 9.6 & 0 & 2.785 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.15 \end{bmatrix}^T.$$

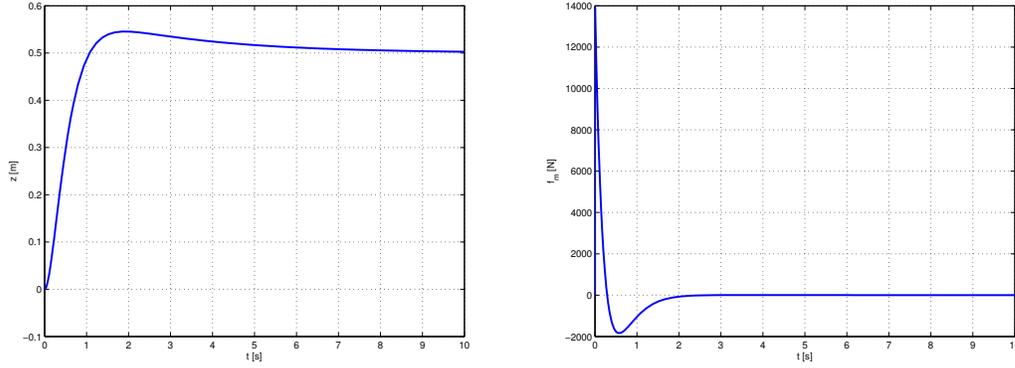
Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica  $K(sI - A + BK + LC)^{-1}L$ , e si costruisce con il comando `rsys = ss(A-B*K-L*C,L,K,0)` ovvero, a meno di un segno, con `rsys = reg(Sys,K,L)`, ove `Sys = ss(A,B,C,0)`.

**E.1** In figura 3 è riportato l'andamento della quota del convertiplano e del relativo controllo  $f_m$  ottenute con il sistema linearizzato chiuso in retroazione con il compensatore progettato. In figura 4 invece è riportato l'andamento della quota del convertiplano e relativo controllo quando il compensatore è applicato al sistema non lineare.



(a) Andamento dell'uscita  $z$  relativa alla quota del convertiplano  
 (b) Controllo  $f_m$  necessario per il raggiungimento della quota  $z = \bar{z} + 0.5$

Figura 3: Simulazione ottenuta con il compensatore eprogettato chiuso in retroazione con il modello linearizzato.



(a) Andamento dell'uscita  $z$  relativa alla quota del convertiplano  
 (b) Controllo  $f_m$  necessario per il raggiungimento della quota  $z = \bar{z} + 0.5$

Figura 4: Simulazione ottenuta quando il compensatore è direttamente applicato al sistema non lineare.

### Esercizio 2.

**A.2** Per ottenere una rappresentazione del sistema complessivo in dimensione 5, si può procedere come segue:

- espressione in forma di stato dei 3 sottosistemi caratterizzati dalle funzioni di trasferimento  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$ :

$$A_1 = [-1] \quad B_1 = [1] \quad C_1 = [1] \quad D_1 = 0 \quad (4)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = [1 \quad 1] \quad D_2 = 0 \quad (5)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_3 = [4 \quad 1] \quad D_3 = 0 \quad (6)$$

- connessione dei sistemi caratterizzati da  $G_1$  e  $G_2$  in serie e successiva connessione del risultato, la cui f.d.t. verrà indicata con  $G_{1,2}$ , in parallelo con  $G_3$  ottenendo  $G_{1,2,3}$ :

– Serie tra  $G_1$  e  $G_2$

$$A_{1,2} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & -5 \end{bmatrix} \quad B_{1,2} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$C_{1,2} = [D_2 C_1 \quad C_2] = [0 \quad 1 \quad 1]$$

– Parallelo tra  $G_{1,2}$  e  $G_3$

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,2} & 0 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,2} \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$C = [C_{1,2} \quad C_3] = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1]$$

Per ottenere poi la scomposizione canonica di Kalman si procede determinando le matrici di raggiungibilità  $R$  e di osservabilità del sistema  $O$

$$R = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad A^4B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 25 \\ 0 & 1 & -6 & 25 & -90 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -6 & -4 & 0 & 2 \\ -5 & 24 & 14 & 0 & -4 \\ 19 & -84 & -46 & 0 & 8 \\ -65 & 276 & 146 & 0 & -16 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Si determina una matrice di base del sottospazio raggiungibile  $T_R$  con il comando **orth(R)** di MATLAB. Tale matrice di base avrà 4 colonne e non cinque perchè nella connessione in parallelo è presente un polo in comune tra le due f.d.t..

Si determina una matrice di base del sottospazio non osservabile  $T_{\bar{O}}$  con il comando **null(O)** di MATLAB. Tale matrice di base avrà 2 colonne e non cinque perchè nelle connessione in serie un polo di  $G_1$  è anche uno zero di  $G_2$  e nella connessione in parallelo è presente un polo in comune tra le due f.d.t..

Una base  $T_{R\bar{O}}$  per il sottospazio intersezione tra il sottospazio raggiungibile e quello non osservabile si trova risolvendo l'equazione  $T_R\xi_1 = T_{\bar{O}}\xi_2$ . Se

$$N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

è una base di  $\ker[T_R \quad T_{\bar{O}}]$ , allora  $T_{R\bar{O}} = T_R N_1 = T_{\bar{O}} N_2$  è una base del sottospazio cercato.

Una base del sottospazio intersezione tra il sottospazio raggiungibile e quello osservabile,  $T_{RO}$ , si può trovare con il seguente codice

```
function [T_RO] = base_compl(T_R, T_RNO)
% T_RO : base di range(T_R) complementare a T_RNO
[ra, ca] = size(T_R);
[rb, cb] = size(T_RNO);
T_RO = orth([T_RNO T_R]);
[rd, cd] = size(T_RO);
T_RO = T_RO(:, cb+1:cd);
```

Una base del sottospazio intersezione tra il sottospazio raggiungibile e quello osservabile,  $T_{R\bar{O}}$ , si può trovare con il seguente codice

```
function [T_NRNO] = base_compl(T_NO, T_RNO)
% T_NRNO : base di range(T_NO) complementare a T_RNO
[ra, ca] = size(T_NO);
[rb, cb] = size(T_RNO);
T_NRNO = orth([T_RNO T_NO]);
[rd, cd] = size(T_NRNO);
T_NRNO = T_NRNO(:, cb+1:cd);
```

Infine, avendo  $T_{\bar{R}\bar{O}}$ ,  $T_{R\bar{O}}$  e  $T_{RO}$ , si può calcolare  $T_{\bar{R}O}$  completando lo spazio in  $\mathbb{R}^n$ . Si costruisce la matrice  $T = [T_{RO} T_{R\bar{O}} T_{\bar{R}\bar{O}} T_{\bar{R}O}]$  e si esegue il cambio di coordinate  $x = T\xi$  ottenendo il sistema nella forma voluta

$$A_k = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2.7969 & 0.7695 & -0.3418 & -0.0312 & -0.0195 \\ 0.7891 & 0.0286 & 0.2643 & 0.0015 & 0.0007 \\ -0.7812 & -2.9297 & -2.2344 & 0 & -0.0039 \\ 1.6777 & -0.2456 & 1.0860 & -2.0658 & 0.3751 \\ 0.7812 & 3.0938 & 1.4062 & -0.2500 & -0.9688 \end{bmatrix} \quad B_k = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.9609 \\ 0.2710 \\ -0.6719 \\ 0.5946 \\ -0.0938 \end{bmatrix}$$

$$C_k = CT = [-0.2670 \quad 4.0986 \quad -0.2156 \quad -0.0000 \quad -0.0000] \quad (12)$$

**B.2** Si procede dapprima alla valutazione della funzione di trasferimento della connessione in serie tra  $G_1$  e  $G_2$ ,

$$G_{1,2} = G_1G_2 = \frac{1}{(s+2)(s+3)}. \quad (13)$$

Infine, si determina la funzione di trasferimento globale risolvendo il parallelo tra  $G_{1,2}$  appena valutata e  $G_3$ , ottenendo

$$G_{1,2,3} = G_{1,2} + G_3 = \frac{s + (s+3)(s+4)}{s(s+2)(s+3)}. \quad (14)$$