

Esercizio 1.

Si consideri il sistema rappresentato in figura 1 costituito da una massa rotante attorno ad un perno (dotato di elasticità ed attrito viscoso) scorrevole su di una guida lineare collegata al telaio tramite un sistema molla-smorzatore. La massa può essere messa in rotazione attraverso un attuatore che può esercitare una forza orizzontale ad una certa distanza dal perno. Definendo un vettore degli stati nel

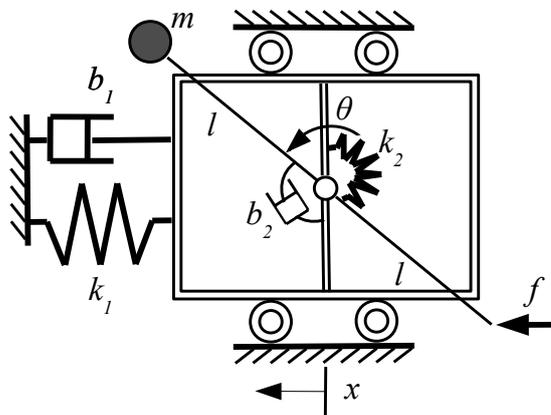


Figura 1: Schema del sistema meccanico considerato.

modo seguente $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T = [x \ \theta \ \dot{x} \ \dot{\theta}]^T$ le equazioni, linearizzate intorno all'equilibrio $q = \bar{q} = 0$ e $f = \bar{f} = 0$, che descrivono la dinamica del sistema sono

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m} & 0 & -\frac{b_1}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{ml^2} & 0 & -\frac{b_2}{ml^2} \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \\ -\frac{1}{ml} \end{bmatrix} f$$

$$y = [1 \ l \ 0 \ 0] q \quad (1)$$

dove x rappresenta la posizione orizzontale del perno, θ la posizione angolare della massa m_2 attorno al perno, k_1 e b_1 la rigidità e il coefficiente di smorzamento che collegano la guida lineare e il telaio, k_2 e b_2 la rigidità e il coefficiente di smorzamento degli elementi posizionati tra la leva rotante e la guida lineare, l la lunghezza delle due metà della leva ed f la forza esercitata dall'attuatore.

Si considerino i seguenti valori numerici: $m = 0.5$ Kg; $l = 1.5$ m; $b_1 = 5$ Ns/m; $b_2 = 0.5$ N m s/rad; $k_1 = 10$ N/m; $k_2 = 3$ Nm/rad.

A.1) Si progetti un controllore basato su regolatore che, per mezzo della forza f , permetta di raggiungere esattamente il valore desiderato $q_d = [0.2 \ \pi/10 \ 0 \ 0]^T$ a partire dalle condizioni di equilibrio \bar{q} . Si effettui quindi una simulazione del sistema con il regolatore appena progettato, in ambiente **Simulink**.

B.1) Si supponga adesso di voler solamente controllare il sistema in anello aperto con un'azione di controllo per le forze f pre-pianificata "in avanti". Si calcoli una funzione di ingresso f che, a partire dalla configurazione di equilibrio \bar{q} , porti il sistema meccanico tempo continuo esattamente alla configurazione desiderata $q_d = [0.2 \ \pi/10 \ 0 \ 0]^T$ in un tempo T e sia in grado di mantenerla per un tempo indefinito. Si scelga a tal fine un ingresso costante a tratti per N intervalli temporali di lunghezza $T_s = T/N$, e si usi un modello a tempo discreto del sistema.

b1.1) Si discuta il minimo valore di N che garantisce una soluzione e si calcoli la corrispondente sequenza di controllo f utilizzando un tempo di campionamento $T_s = 0.04$ s. Si effettui poi una simulazione del sistema lineare tempo discreto e tempo continuo con la sequenza di controllo appena progettata, in ambiente **Simulink**;

b2.1) si ripeta quanto svolto al punto b1.1) per i seguenti casi:

b2.1-a) raddoppiando il numero di passi N e mantenendo la scelta del tempo di campionamento T_s ;

b2.1-b) raddoppiando il tempo di campionamento T_s e mantenendo il numero di passi N ;

Si confrontino il costo del controllo $J = \sum_{k=1}^N f_k^2 T_s$ relativo ai punti b1.1), b2.1-a) e b2.1-b) giustificandone i risultati ottenuti.

Esercizio 2.

Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_2^2 - x_1^3 - x_1 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1^3 x_2 + u.\end{aligned}\tag{2}$$

A.2 Si studi la stabilità dell'equilibrio dell'origine con ingresso $u = 0$. Se necessario si utilizzi la seguente funzione candidata di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$;

B.2 Si consideri adesso un ingresso $u = k_1 x_1 + k_2 x_2$, ovvero una retroazione statica dello stato. Si determinino, se esistono, i valori delle costanti di retroazione k_1 e k_2 che rendano l'equilibrio nell'origine almeno localmente asintoticamente stabile.

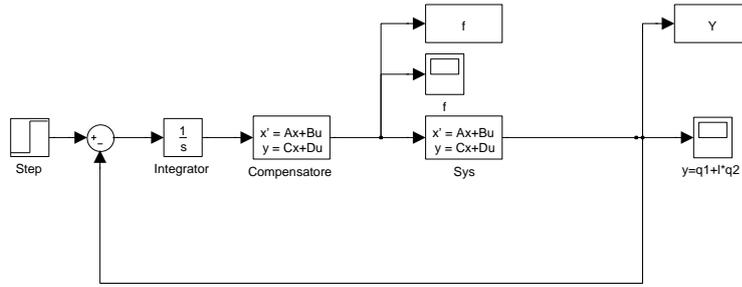


Figura 2: Montaggio del compensatore in catena diretta.

Soluzione

Esercizio 1.

A.1) Ai fini del progetto del regolatore, analizziamo numericamente le proprietà di raggiungibilità e osservabilità del sistema con ingresso f e uscita di misura y . A tal fine, si può procedere come di consueto calcolando numericamente le matrici di raggiungibilità ed osservabilità e valutandone il rango che in tal caso risulta pari a 4.

La specifica sull'errore a regime nullo comporta l'inserimento di un polo nell'origine, in quanto il sistema non ne possiede già uno. Scegliendo di allocare i poli del sistema in $p = [-2, -3, -4, -5, -6]^T$, una procedura per ottenere il compensatore basato su regolatore consiste nel calcolare preliminarmente la matrice K di retroazione degli stati in modo da allocare i poli della matrice $A_e - B_e K$ in p , dove A_e e B_e sono le matrici del sistema esteso, ottenuto aggiungendo il polo nell'origine necessario per rispettare la specifica sull'errore a regime. Utilizzando la funzione di **Matlab** $K = \text{place}(A_e, B_e, p)$, si ottiene:

$$K = 10^3 [15.88 \quad 7.83 \quad 23.14 \quad 0.74 \quad 6.05] .$$

Poichè non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile, si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice L di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore $A_e - LC_e$, dove C_e è la matrice delle uscite del sistema esteso, abbia autovalori in $q = 2p$. Sempre impiegando il comando **Matlab** $L = \text{transpose}(\text{place}(A_e', C_e', q))$ si ottiene:

$$L = [29.55 \quad 34.31 \quad 166.59 \quad -94.04 \quad 619.28]^T .$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica $K(sI - A_e + B_e K + LC_e)^{-1}L$, e si costruisce con il comando $\text{rsys} = \text{ss}(A_e - B_e K - L C_e, L, K, 0)$ ovvero, a meno di un segno, con $\text{rsys} = \text{reg}(\text{Sys}_e, K, L)$, ove $\text{Sys}_e = \text{ss}(A_e, B_e, C_e, 0)$. La sequenza di comandi **Matlab** necessari allo scopo è la seguente:

```
integrator = ss(1/tf('s'));
Sys_e = integrator * ss(A, B, C, 0);
p = [-5 -9 -10 -11 -12];
K = place(sys_e.a, sys_e.b, p);
q = 2*p;
L = place(sys_e.a', sys_e.c', q)';
rsys = -reg(Sys_e, K, L);
kreg = -rsys.c * inv(-rsys.a) * rsys.b;
```

Uno schema **Simulink** per la simulazione del sistema linearizzato nell'origine con il compensatore basato sul regolatore progettato al punto precedente, è riportato in figura 2.

In figura è riportato l'andamento dell'uscita y per effetto di un ingresso a gradino unitario che agisce all'istante $t = 0$ s e di ampiezza pari a $y = [1 \ 1 \ 0 \ 0]q_d$. Inoltre, la funzione di trasferimento complessiva del sistema così realizzato è

$$G_c(s) = \frac{33089.8883(s + 2.76)(s + 7.24)(s^2 + 2.13s + 2.21)(s^2 + 5.22s + 11.33)}{(s + 12)(s + 10)(s + 8)(s + 6)^2(s + 5)(s + 4)^2(s + 3)(s + 2)}$$

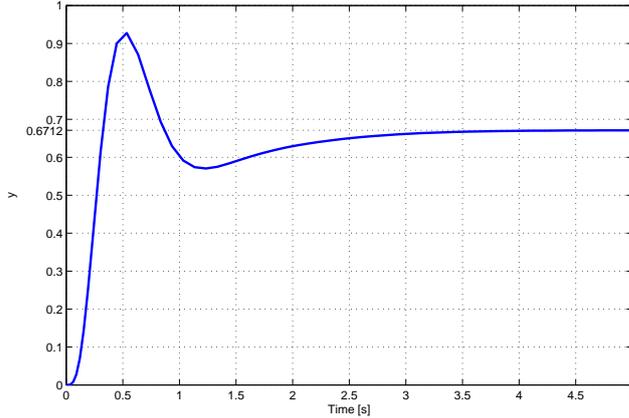


Figura 3: Andamenti delle variabile y con schema di montaggio riportato in figura 2 per effetto di un gradino di ampiezza $y = [1 \ l \ 0 \ 0]q_d$.

che, come si può notare, possiede sia i poli del controllore, allocati con la scelta della matrice di retroazione K sia quelli dello stimatore allocati con la matrice di iniezione delle uscite L . Gli zeri invece non sono altro che l'insieme costituito dagli zeri del sistema e gli zeri del controllore.

B.1) Non avendo a disposizione nessun tipo di misura, l'unica strategia di controllo possibile è quella in anello aperto. Tuttavia, supponendo di conoscere il modello del sistema, la sua completa raggiungibilità implica l'esistenza di una legge di controllo capace di portare il sistema da una condizione iniziale x_o ad una finale $x_f = q_d$. Scegliendo un ingresso di controllo f costante a tratti, il problema di determinare una legge di controllo pre-pianificata (in avanti) in grado di far raggiungere al sistema lo stato finale q_d può essere effettuato sul corrispondente sistema tempo discreto. Si ricorda che una tale legge di controllo può essere trovata sul sistema tempo discreto se la completa raggiungibilità del sistema è conservata in questo passaggio (questa proprietà non è detto che si conservi, e deve quindi essere verificata).

b1.1) Il sistema tempo discreto può ad esempio essere ottenuto mediante la tecnica di discretizzazione Eulero in avanti. Tuttavia, la specifica richiede che il sistema tempo continuo raggiunga esattamente la configurazione desiderata. Questo significa che dobbiamo utilizzare una tecnica di discretizzazione più precisa, ed in particolare, per ingressi costanti a tratti (detti Zero Order Hold o ZOH), è possibile avere una formula di discretizzazione che produce valori esatti ad ogni multiplo del tempo di campionamento ed in particolare anche all'istante finale. Utilizzando l'uguaglianza

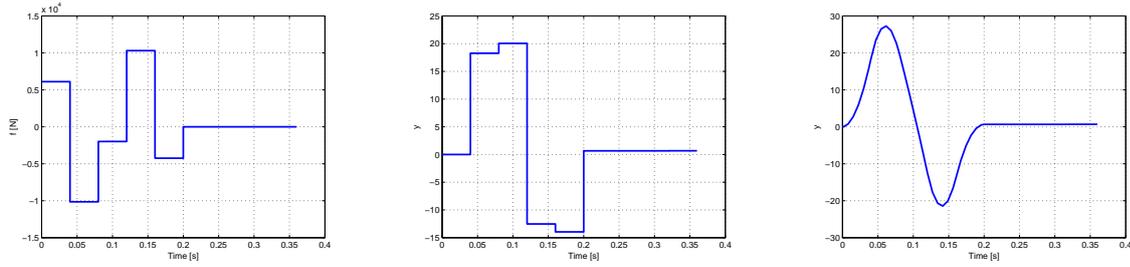
$$e^{\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_s} = \begin{bmatrix} A_{ZOH} & B_{ZOH} \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

è possibile calcolare le matrici del modello discretizzato ZOH (gli zeri nella matrice che appare nell'esponenziale sono di dimensioni tali da rendere la matrice stessa quadrata). Sostituendo la matrice dinamica e degli ingressi del sistema lineare tempo continuo di partenza ed utilizzando un tempo di campionamento $T_s = 0.04$ s, si ottiene:

$$A_{ZOH} = \begin{bmatrix} 0.9860 & 0 & 0.0328 & 0 \\ 0 & 0.9979 & 0 & 0.0396 \\ -0.6559 & 0 & 0.6580 & 0 \\ 0 & -0.1056 & 0 & 0.9803 \end{bmatrix}, B_{ZOH} = \begin{bmatrix} 0.0014 \\ 0.0011 \\ 0.0656 \\ 0.0528 \end{bmatrix},$$

che risulta completamente raggiungibile.

Per un sistema tempo discreto completamente raggiungibile, ogni stato è raggiunto a partire da una qualsiasi configurazione iniziale in al più $N=n$ passi, dove n è la dimensione dello spazio di stato del sistema. In generale, il raggiungimento di uno stato non implica il suo mantenimento per un tempo indefinito, come richiesto nel testo. Per soddisfare questa specifica si può procedere imponendo che



(a) Sequenza ottima dei valori di forza f con $T = 0.04$ s e $N = 5$. (b) Sequenza dei valori assunti dall'uscita y per il sistema tempo discreto. (c) Sequenza dei valori assunti dall'uscita y per il sistema tempo continuo.

Figura 4: Sequenza di controllo f e andamenti dell'uscita y .

il valore dello stato al passo N coincide con quello al passo $N - 1$, ovvero

$$\begin{bmatrix} X(N-1) \\ X(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_s \\ q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{N-1}\bar{q} \\ A^N\bar{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B & AB & A^2B & \dots & A^{N-2}B \\ B & AB & A^2B & \dots & A^{N-2}B & A^{N-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(N) \\ u(N-1) \\ u(N-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

La sequenza di controlli u in grado di risolvere tale sistema garantisce anche che il sistema meccanico rimanga nella nuova configurazione desiderata per un tempo indefinito. Tale soluzione si ottiene come

$$\begin{bmatrix} u(N) \\ u(N-1) \\ u(N-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \bar{R}_p^\dagger \left(\begin{bmatrix} q_s \\ q_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^{N-1}\bar{q} \\ A^N\bar{q} \end{bmatrix} \right)$$

dove,

$$\bar{R}_p = \begin{bmatrix} 0 & B & AB & A^2B & \dots & A^{N-2}B \\ B & AB & A^2B & \dots & A^{N-2}B & A^{N-1}B \end{bmatrix}.$$

Il numero minimo di passi N necessario per soddisfare la specifica sul mantenimento dello stato desiderato è pari a $N=n+1=5$ (si noti che il numero minimo di passi per raggiungere lo stato desiderato senza richiederne il mantenimento è pari a 4).

In figura 4(a) è ripostato l'andamento del controllo f , mentre nelle figure 4(b) e 4(c) sono ripostati gli andamenti delle uscite y corrispondenti.

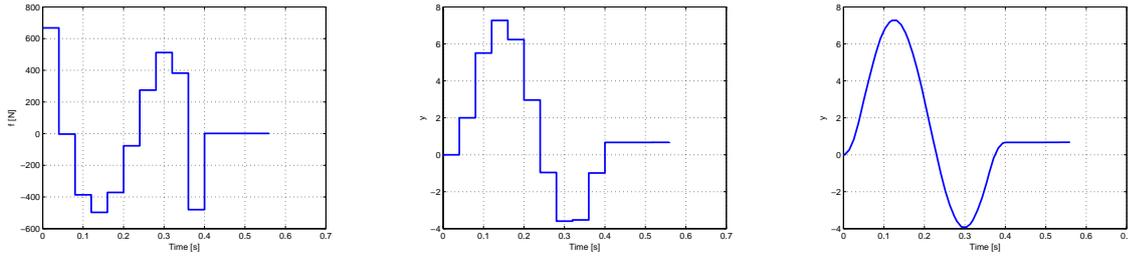
Il costo del controllo può essere facilmente calcolato tramite la formula $J = \sum_{k=1}^N f_k^2 T_s$, ottenendo $J = 1.073 \cdot 10^7$.

b2.1)

b2.1-a) Si richiede di ripetere quanto svolto in precedenza raddoppiando il numero di passi e mantenendo un tempo di campionamento pari a $T_s = 0.04$ s. In figura 5(a) è ripostato l'andamento del controllo f , mentre nelle figure 5(b) e 5(c) sono ripostati gli andamenti delle uscite y corrispondenti.

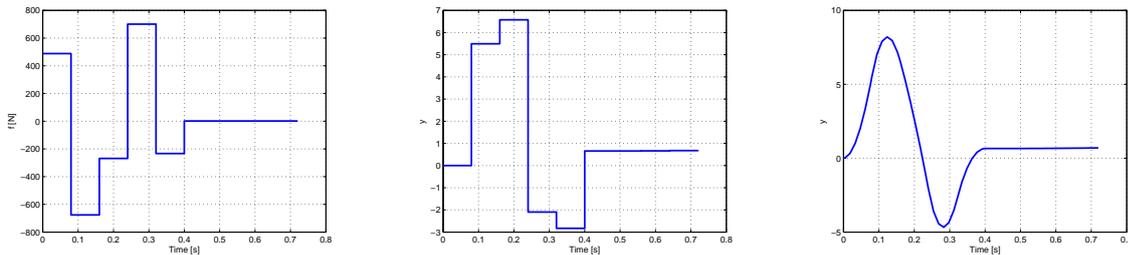
Come si può notare sia il controllo che l'uscita assumono valori decisamente più bassi rispetto al caso con $N = 5$ passi. In effetti il tempo richiesto per portare il sistema alla configurazione desiderata si è raddoppiato, richiedendo quindi meno energia. Infatti, il costo del controllo è pari a $J = 6.8 \cdot 10^4$, riducendosi di tre ordini di grandezza rispetto al caso precedente.

b2.1-b) Si richiede di mantenere il numero di passi minimo, ovvero $N = 5$ e raddoppiare il tempo di campionamento, ovvero $T_s = 0.08$ s. In figura 5(a) è ripostato l'andamento del controllo f , mentre nelle figure 5(b) e 5(c) sono ripostati gli andamenti delle uscite y corrispondenti.



(a) Sequenza ottima dei valori di forza f con $T = 0.04$ s e $N = 10$. (b) Sequenza dei valori assunti dall'uscita y per il sistema tempo discreto. (c) Sequenza dei valori assunti dall'uscita y per il sistema tempo continuo.

Figura 5: Sequenza di controllo f e andamenti dell'uscita y ottenuta raddoppiando il numero di passi ($N = 10$).



(a) Sequenza ottima dei valori di forza f con $T = 0.08$ s e $N = 5$. (b) Sequenza dei valori assunti dall'uscita y per il sistema tempo discreto. (c) Sequenza dei valori assunti dall'uscita y per il sistema tempo continuo.

Figura 6: Sequenza di controllo f e andamenti dell'uscita y ottenuta raddoppiando il tempo di campionamento ($T_s = 0.08$ s).

Come si può notare, ancora una volta, sia il controllo che l'uscita assumono valori decisamente più bassi rispetto al caso con $N = 5$ passi e con $T_s = 0.04$ s (b1.1). In effetti il tempo per portare il sistema alla configurazione desiderata si è raddoppiato (come nel caso b2.1-a) rispetto al caso considerato al punto b1.1), richiedendo quindi meno energia. Il costo, infatti, è $J = 1.05 \cdot 10^5$, riducendosi di due ordini di grandezza rispetto al caso b1.1). La ulteriore riduzione del costo relativa al caso b2.1-a rispetto al caso b2.1-b è imputabile al maggior numero di valori di f assegnabili (10 valori nel caso b2.1-a anziché 5 nel caso b2.1-b) e quindi una maggiore finezza di controllo.

Esercizio 2.

A.2) L'origine è un punto di equilibrio del sistema per $u = 0$. Al fine di analizzarne le proprietà di stabilità, si consideri il linearizzato approssimato nell'intorno dell'origine. Si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poichè uno degli autovalori è sull'asse immaginario, non si può concludere nulla con il metodo indiretto di Lyapunov. Consideriamo quindi la funzione candidata di Lyapunov suggerita nel testo, $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$, e, derivandola rispetto al tempo e sostituendo la dinamica del sistema con $u = 0$, si ottiene

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -4x_1^3(1 + x_1^2)$$

che è semidefinita negativa. L'insieme dei punti per cui $\dot{V} = 0$ è dato da $R_o = \{x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Gli insiemi invarianti in R_o , ottenuti per sostituzione nella dinamica del sistema delle condizioni che definiscono R_o stesso, si riducono alla sola origine e, quindi per il Teorema di Krasovskii-Lasalle, l'equilibrio è asintoticamente stabile. Inoltre, poichè V è radialmente illimitata si può concludere sulla globale asintotica stabilità dell'origine.

B.2) Sostituendo l'ingresso nella dinamica del sistema e procedendo alla linearizzazione nell'intorno dell'origine, si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix},$$

da cui si deduce facilmente che l'origine è localmente asintoticamente stabile per $k_2 < 0$ e $\forall k_1 \in \mathbb{R}$.