Esame di Controlli Automatici — 14-02-2012

Esercizio 1.

Si consideri il modello dinamico del sistema meccanico rappresentato in figura 1, relativo ad un braccio rigido con riduttore e trasmissione elastica di coppia al giunto. Il sistema è descritto dalle

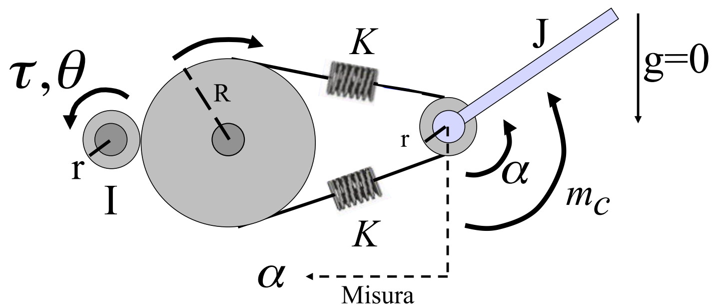


Figura 1: Sistema meccanico

equazioni dinamiche

$$J\,\ddot{\alpha} = -2r^2\sigma(\alpha,\theta) + m_c$$
$$I\,\ddot{\theta} = -2r^2\sigma(\alpha,\theta) + \tau$$

dove τ è la coppia motrice in ingresso e m_c la coppia dovuta al carico esterno; r il raggio della puleggia motrice e R il raggio della ruota condotta; I il momento di inerzia delle ruote ridotto all'asse del motore; θ la posizione angolare dell'asse motore. Si consideri pari a r anche il raggio della puleggia del braccio, il cui momento di inerzia è J, e la cui posizione angolare è indicata da α. La cinghia di trasmissione è modellata da una elasticità nonlineare la cui funzione caratteristica è $\sigma(\alpha,\theta) = K(\alpha+\theta)^3$.

A.1 Si consideri una configurazione di equilibrio nella quale il carico esterno m_c sia costante e pari a $\bar{m}_c$, e si linearizzi il sistema intorno a tale equilibrio;

Si considerino adesso i seguenti valori numerici: $J = I = 1$ kg m^2, $k = 10$ N/m, $r = 0.5$ m e $\bar{m}_c = 2$ N m.

B.1 Si progetti un compensatore basato su regolatore in grado di stabilizzare l'equilibrio facendo in modo che l'effetto di un disturbo di coppia δ_1 agente sull'asse motore (cioè sommato a τ) sia completamente reiettato sull'uscita q;

C.1 Si realizzi una simulazione del sistema linearizzato con il regolatore appena progettato;

D.1 Considerando l'applicazione di questo controllore al sistema nonlineare, si dia una stima dell'ampiezza del bacino di attrazione dell'equilibrio;

E.1 Si realizzi una simulazione del sistema nonlineare con il controllore appena progettato, cercando di verificare la validità della stima precedente.

Esercizio 2.

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -kh(x)x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 &= -h(x)x_2 - x_1^3.\end{aligned}$$

Detto S il cerchio di raggio unitario, e data $V = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2$, si determinino le proprietà di stabilità o instabilià dell'origine nei seguenti casi:

1. $k > 0,\ h(x) > 0, \forall x \in S$;
2. $k > 0,\ h(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^2$;
3. $k > 0,\ h(x) < 0, \forall x \in S$;
4. $k > 0,\ h(x) = 0, \forall x \in S$;
5. $k = 0,\ h(x) > 0, \forall x \in S$;
6. $k = 0,\ h(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^2$;

Soluzione

Esercizio 1.

A.1 Il sistema è descritto dal vettore di variabili di stato $q = [\alpha,\ \theta,\ \dot{\alpha},\ \dot{\theta}]^T$. Poichè l'equilibrio corrispondente ad ingresso $m_c = \bar{m}_c =$ cost. è caratterizzato da $\dot{\alpha} = \dot{\theta} = \ddot{\alpha} = \ddot{\theta} = 0$, si ottiene:

$$2r^2\sigma(\bar{\alpha},\bar{\theta}) = \bar{m}_c \tag{1}$$

$$2r^2\sigma(\bar{\alpha},\bar{\theta}) = \bar{\tau} \tag{2}$$

da cui si ricava che $\bar{\tau} = \bar{m}_c$ e quindi

$$\bar{\alpha} + \bar{\theta} = \sqrt[3]{\frac{\bar{m}_c}{2Kr^2}}\,.$$

Si consideri quindi il vettore delle variabili di stato traslate nell'equilibrio generico $\bar{q}$, ovvero $\tilde{q} = [\tilde{q}_1,\ \tilde{q}_2,\ \tilde{q}_3,\ \tilde{q}_4]^T = [\alpha - \bar{\alpha},\ \theta - \bar{\theta},\ \dot{\alpha},\ \dot{\theta}]^T$ e il vettore degli ingressi anch'esso traslato $\tilde{u} = [\tilde{u}_1,\ \tilde{u}_2]^T = [m_c - \bar{m}_c,\ \tau - \bar{\tau}]^T$. Il sistema non lineare traslato è

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{q}}_1 &= \tilde{q}_3\\
\dot{\tilde{q}}_2 &= \tilde{q}_4\\
\dot{\tilde{q}}_3 &= -\frac{2Kr^2}{J}[\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 - (\bar{q}_1 + \bar{q}_2)]^3 + \frac{\tilde{u}_1 + \bar{m}_c}{J}\\
\dot{\tilde{q}}_4 &= -\frac{2Kr^2}{I}[\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 - (\bar{q}_1 + \bar{q}_2)]^3 + \frac{\tilde{u}_2 + \bar{\tau}}{I}\,.
\end{aligned}$$

Il sistema linearizzato può essere poi facilmente determinato nella consueta forma di stato

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{q}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ a & a & 0 & 0\\ b & b & 0 & 0 \end{bmatrix}\tilde{q} + \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\\ \frac{1}{J} & 0\\ 0 & \frac{1}{I} \end{bmatrix}\tilde{u}\\
\tilde{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tilde{q}\,,
\end{aligned}$$

dove, $a = -\frac{6Kr^2}{J}[-(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)]^2$ e $b = -\frac{6Kr^2}{I}[-(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)]^2$.

B.1 Ai fini del progetto del compensatore basato su regolatore, è necessario in maniera preliminare analizzare le proprietà di reggiungibilità e osservabilità del sistema con ingresso $\tilde{u}_2$ e uscita di misura $\tilde{q}_1$. Sostituendo i valori numerici nelle matrici del sistema linearizzato approssimato si conclude sia sulla completa raggiungibilità che sulla completa osservabilità del sistema.

La coppia di attuazione è affetta da una componente costante di valore non definito il cui effetto sull'uscita $\tilde{q}_1$ deve essere completamente annullato. Affinchè ciò accada, è necessario l'inserimento di un polo nell'origine a monte del punto in cui il disturbo si inserisce nell'anello, ovvero, in tal caso nel controllore stesso. Il progetto del compensatore si effettuerà quindi sul sistema esteso ottenuto aggiungendo detto polo nell'origine.

Per la determinazione della matrice di retroazione degli stati, si sceglie di fissare i poli del sistema in anello chiuso in $p = [-2\ \ -3\ \ -4\ \ -5\ \ -6]^T$. Il comando `place` di `Matlab` fornisce automaticamente la matrice di retroazione:

$$K = \begin{bmatrix} -88.42 & 10.51 & 138.71 & -51.22 & 20.00 \end{bmatrix}\,.$$

Poichè non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile, si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice L di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore $A_e - LC_e$, dove C_e è la matrice delle uscite del sistema esteso, abbia autovalori in $q = 2p$. Impiegando il comando `Matlab`, `L = transpose(place(Ae',Ce',q))` si ottiene:

$$L = 10^3\begin{bmatrix} 0.04 & 0.60 & -1.45 & 3.99 & 1.16 \end{bmatrix}^T\,.$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica $K(sI - A_e + B_eK + LC_e)^{-1}L$, e si costruisce con il comando rsys = ss(Ae-Be*K-L*Ce,L,K,0) ovvero, a meno di un segno, con rsys = reg(Syse,K,L), ove Syse = ss(Ae,Be,Ce,0).

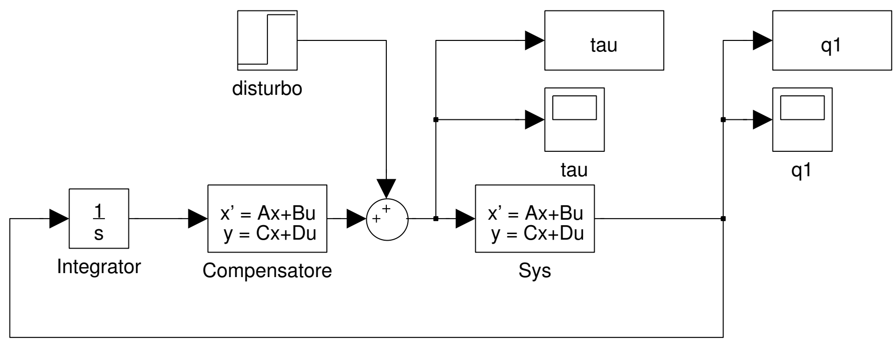
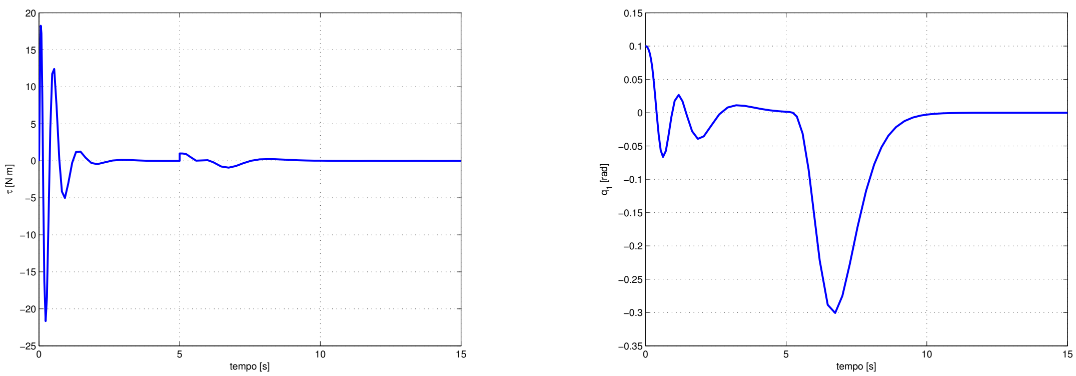


Figura 2: Schema `Simulink` del sistema tempo continuo chiuso in retroazione con il compensatore basato su regolatore al quale viene applicato un disturbo di attuazione di ampiezza 1 N m all'istante $t = 5$ s.



(a) Andamento del segnale di controllo $\tilde{\tau}$ in ingresso al sistema.

(b) Andamento dell'uscita $\tilde{q}_1$ relativa alla posizione dell'asta.

Figura 3: Andamento del controllo $\tilde{\tau}$ e dell'uscita q_1 ottenute con lo schema simulink di figura 2

C.1 In figura 2 è riportato lo schema `Simulink` utilizzato per la simulazione mentre in figura 3 è riportato l'andamento del controllo e dell'uscita.

D.1

D.2

Esercizio 2.

Si con consideri l'intorno dell'origine $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \, : \, \|x\|_2 < 1\}$ cosi come indicato nel testo. Calcolando la derivata rispetto al tempo di V si ottiene

$$\dot{V} = x_1^3\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = -k\,h(x)x_1^4 + x_2x_1^3 - h(x)x_2^2 - x_1^3x_2 = -h\,h(x)x_1^4 - h(x)x_2^2\,.$$

1. Essendo $k > 0$ e $h(x) > 0$ in S, si ha che $\dot{V}$ è negativa definita e quindi si conclude sulla asintotica stabilità dell'origine.
2. Essendo nelle medesime condizioni di cui al punto precedente, ed essendo la funzione V è radialmente illimitata, si conclude sulla globale asintotica stabilità.
3. Essendo $k > 0$ ed $h(x) < 0$ in S, si ha che l'origine è instabile. Infatti, applicando il criterio di Cetaev, si ha che l'insieme $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \, : \, V(x) > 0\} = \mathbb{R}^2$ ha come punto di accumulazione l'origine e $\dot{V}$ è definita positiva in $P \cap S(0, r)$ per ogni $r < 1$.
4. Essendo $k > 0$ ma $h(x) = 0$ in S, si ha che $\dot{V}(x)$ è identicamente nulla per qualsiasi valore di x. Dunque, l'origine è semplicemente stabile.
5. Essendo $k = 0$ con $h(x) > 0$ in S, si ha che $\dot{V} = -h(x)x_2^2$ che è semidefinita negativa in S. Applicando il teorema dell'insieme invariante massimo si ha che $R = \{x \in \mathbb{R}^2 \, : \, \dot{V} = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \, : \, x_2 = 0\}$. Sostituendo nelle equazioni della dinamica si ha

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k\,h(x)x_1 = 0 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3\,. \end{aligned}$$

Poichè $x_2 = 0$ in P, allora $\dot{x}_2 = 0$. Di conseguenza anche $x_1 = 0$. Se ne deduce che il massimo insieme invariante contennuto in P si riduce alla sola origine e quindi, per il corollario di Krasovskii, l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile.

6. Essendo nelle medesime condizioni di cui al punto precedente, ed essendo la funzione V è radialmente illimitata, si conclude sulla globale asintotica stabilità.