

Esame di Controlli Automatici — 19-07-2011

Si consideri il modello dinamico di un attuatore elettrico con elasticità in serie, figura 1).

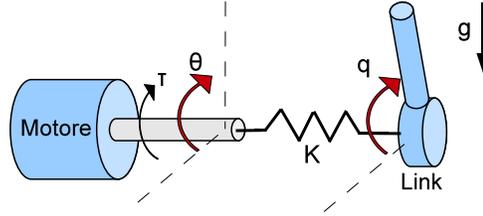


Figure 1: Modello di attuatore elettrico con elasticità in serie

L'attuatore composto da un motore il cui albero è connesso attraverso un elemento elastico (molla torsionale) ad un carico inerziale (link). Il modello dinamico del sistema è dato da

$$\begin{cases} I\ddot{q} = -b\dot{q} - k(q - \theta) - Mgl \cos(q) \\ J\ddot{\theta} = -c\dot{\theta} - k(\theta - q) + \tau \end{cases}$$

dove è stato indicato con q l'angolo del link rispetto all'orizzontale, I l'inerzia del link, b il coefficiente di attrito viscoso sull'asse del link, con k la costante elastica della molla torsionale che collega l'albero motore al link, con M la massa del link, con l la distanza del baricentro del link dall'asse, con J l'inerzia dell'albero motore, con c il coefficiente di attrito viscoso dell'albero motore e con θ la posizione angolare dell'albero motore. La coppia motrice che agisce sull'albero del motore è considerata l'ingresso del sistema ed è indicata da τ .

a1) Si determinino in forma simbolica gli equilibri corrispondenti ad una coppia di ingresso costante e pari a $\tau = \bar{\tau}$.

Si considerino i seguenti valori numerici: $J = 6 \text{ Kg m}^2 / \text{rad}$; $c = 5 \text{ Kg m}^2 / (\text{rad s})$; $M = 0.15 \text{ Kg}$; $l = 0.5 \text{ m}$; $g = 9.81 \text{ m/s}^2$; $I = 2 \text{ Kg m}^2 / \text{rad}$; $b = 1.2 \text{ Kg m}^2 / (\text{rad s})$; $\bar{\tau} = 0.2 \text{ N m}$; $k = 200 \text{ N/rad}$.

a2) Si scriva il sistema linearizzato attorno a tutti gli equilibri trovati e se ne discuta la stabilità;

a3) Per gli eventuali equilibri stabili, se ne studi il bacino di attrazione;

Si consideri dapprima il caso di non disporre di alcuna misura, e di poter quindi solo controllare il sistema in anello aperto con una azione di controllo pre-pianificata "in avanti". Si desidera calcolare una funzione di ingresso $\tilde{\tau}(t) = \tau(t) - \bar{\tau}$ che possa far compiere al modello linearizzato del link, a partire da un equilibrio con $q < 0$, una rotazione di 2π , riportando il sistema in posizione di equilibrio dopo esattamente un giro in un tempo T . Si scelga a tal fine un ingresso costante a tratti per N intervalli temporali di lunghezza $T_s = T/N$, e si usi un modello a tempo discreto del sistema.

b1) Si discuta il minimo valore di N che garantisce una soluzione;

b2) Si considerino le condizioni seguenti:

- i) $T = 0.1 \text{ s}$ e $N = 100$;
- ii) $T = 0.01$ e $N = 10$;
- iii) $T = 0.1$ e $N = 10$;

Supponendo che un indice di costo del controllo sia dato dalla espressione

$$C = \sum_{i=1}^N \tilde{\tau}^2(i),$$

si calcoli e si confronti il valore del costo nei tre casi, e si discuta il risultato;

Si consideri adesso invece di disporre della misura della deflessione della molla $\sigma = q - \theta$.

c1) Si progetti un compensatore basato sul regolatore che per mezzo dell'ingresso τ e avendo a disposizione l'uscita σ stabilizzi asintoticamente il sistema nell'intorno dell'equilibrio con $q > 0$.

c2) Si realizzi in ambiente **Matlab/Simulink** una simulazione sia del sistema linearizzato che di quello non lineare chiuso in anello con il compensatore stesso.

Soluzione

- a1) Il sistema è descritto da quattro variabili di stato q, θ, \dot{q} e $\dot{\theta}$. Poichè l'equilibrio corrispondente ad un ingresso costante è caratterizzato da $\dot{q} = \dot{\theta} = \ddot{q} = \ddot{\theta} = 0$, dalla seconda equazione si ricava che $\bar{\theta} = \bar{q} + \frac{\bar{\tau}}{K}$, mentre dalla prima equazione si ricava che $\bar{q} = \arccos\left(\frac{\bar{\tau}}{Mgl}\right) + k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$. Per $\bar{\tau} \leq Mgl$, il sistema ha quindi due punti di equilibrio simmetrici, dipendenti da $\bar{\tau}$, uno con $\bar{q} > 0$ e l'altro con $\bar{q} < 0$. Per valori $\bar{\tau} > Mgl$ non esistono equilibri possibili.
- a2) Indicando con $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [q - \bar{q}, \theta - \bar{\theta}, \dot{q}, \dot{\theta}]^T$ le variabili di stato traslate nel generico equilibrio calcolato in precedenza e con $\tilde{u} = \tau - \bar{\tau}$ l'ingresso anche esso traslato, si ottiene il seguente sistema non lineare traslato nel generico equilibrio:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = -\frac{b}{I}\tilde{x}_3 - \frac{k}{I}(\tilde{x}_1 + \bar{q} - \tilde{x}_2 - \bar{\theta}) - \frac{Mgl}{I}\cos(\tilde{x}_1 + \bar{q}) \\ \dot{\tilde{x}}_4 = -\frac{c}{J}\tilde{x}_4 - \frac{k}{J}(\tilde{x}_2 + \bar{\theta} - \tilde{x}_1 - \bar{q}) + \frac{\tilde{u} + \bar{\tau}}{J} \end{cases}$$

Il sistema linearizzato approssimato nell'intorno del suddetto equilibrio diventa:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{Mgl}{I}\sin\bar{q} - \frac{k}{I} & \frac{k}{I} & \frac{b}{I} & 0 \\ \frac{k}{J} & -\frac{k}{J} & 0 & \frac{c}{J} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \tilde{u}.$$

Sostituendo i valori numerici, le matrici dinamiche corrispondenti ai due equilibri con $\bar{q} > 0$ e $\bar{q} < 0$ sono:

$$A_{\bar{q}>0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10^2 & 10^2 & -0.6 & 0 \\ 33 & -33 & 0 & -0.83 \end{bmatrix}, \quad A_{\bar{q}<0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -99 & 10^2 & -0.6 & 0 \\ 33 & -33 & 0 & -0.83 \end{bmatrix}.$$

Per ispezione diretta degli autovalori si può concludere che per $\bar{q} > 0$ il sistema ha un autovalore a parte reale positiva e che quindi il sistema linearizzato approssimato è instabile, mentre per $\bar{q} < 0$, il sistema ha tutti gli autovalori a parte reale negativa, quindi il sistema linearizzato approssimato è asintoticamente stabile. Applicando il metodo indiretto di Lyapunov, in un intorno di ciascun equilibrio, analoghe considerazioni possono essere fatte anche per il sistema non lineare di partenza.

- a3) Per valutare la regione di asintotica stabilità dell'equilibrio stabile relativo al sistema non lineare di partenza, si può procedere nel seguente modo. Per il sistema linearizzato, si può agevolmente trovare una funzione di Lyapunov del tipo $V_Q = \mathbf{z}^T P_Q \mathbf{z}$, con P_Q soluzione dell'equazione di Lyapunov $A_f^T P_Q + P_Q A_f = -Q$ per qualche Q simmetrica positiva definita.

Per stimare (per difetto) la regione di asintotica stabilità del sistema non lineare stabilizzato, si deve quindi valutare la regione in cui vale la disequazione $\dot{V}_Q = -\mathbf{z}^T Q \mathbf{z} + 2\mathbf{z}^T P_Q \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z})$, dove $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z})$ è la differenza tra il sistema non lineare e il sistema linearizzato approssimato, e trovare la più grande curva di livello di V_Q interamente contenuta in quella regione. La disequazione può essere studiata numericamente generando valori casualmente distribuiti sulla curva $V_Q = R^2$ e guardando al segno di \dot{V}_Q al variare di R . La procedura può essere iterata modificando il valore di Q , e facendo l'unione insiemistica delle stime della RAS così ottenute.

- b1) Non avendo a disposizione nessun tipo di misura, l'unica strategia di controllo possibile è quella in anello aperto. Supponendo di conoscere il modello del sistema, e che questo sia completamente raggiungibile, è possibile trovare una legge di controllo $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ capace di portare il sistema da una qualsiasi condizione iniziale x_o ad una finale x_f in un tempo T in teoria arbitrariamente breve. Per calcolare i valori di questo controllo, è conveniente comunque approssimare il sistema

tempo continuo con un modello tempo discreto. A tale fine, si può procedere, come suggerito nel testo, a restringere la scelta dell'ingresso $u(t)$ ad una funzione costante a tratti, su intervalli di lunghezza T_s .

Procediamo dunque a trovare un modello tempo discreto che approssimi il comportamento del vero sistema soggetto a questo tipo di ingresso.

Un primo metodo consiste nella applicazione della tecnica di discretizzazione detta di "Eulero in avanti", corrispondente alla approssimazione

$$\dot{x}(kT_s) = \frac{x(kT_s + T_s) - x(kT_s)}{T_s}.$$

Le matrici del sistema discretizzato assumono in questo caso la seguente forma

$$A_d = I + AT_s, \quad B_d = BT_s.$$

Esistono metodi di approssimazione più precisi di questo, ed in particolare, per ingressi costanti a tratti (detti Zero Order Hold o ZOH), è possibile avere una formula di discretizzazione che produce valori esatti ad ogni multiplo del tempo di campionamento. È infatti sufficiente utilizzare la formula di soluzione dei sistemi lineari,

$$x(t') = e^{A(t'-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t'} e^{A(t'-t_0-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

ponendo $t_0 = kT_s$, $t' = (k+1)T_s$ e osservando che, essendo $u = u(k)$ costante tra kT_s e $(k+1)T_s$, si ha

$$x((k+1)T_s) = e^{A(T_s)}x(kT_s) + \left(\int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)}d\tau \right) Bu(k)$$

ottenendo quindi il sistema t.d.

$$x_{ZOH}(k+1) = A_{ZOH}x_{ZOH}(k) + B_{ZOH}u(k)$$

con

$$A_{ZOH} = e^{AT_s},$$

e

$$B_{ZOH} = \int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)}d\tau B,$$

per il quale vale l'esatta uguaglianza con il sistema originale tempo continuo agli istanti di campionamento, cioè $x_{ZOH}(kT_s) = x(kT_s)$. Vale infine la pena di notare che l'uguaglianza

$$e \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{T_s} = \begin{bmatrix} A_{ZOH} & B_{ZOH} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

produce una efficace formula per il calcolo delle matrici del modello discretizzato ZOH (gli zeri nella matrice che appare nell'esponenziale sono di dimensioni tali da rendere la matrice stessa quadrata). Per completezza, verifichiamo la formula applicando la definizione di esponenziale di matrice

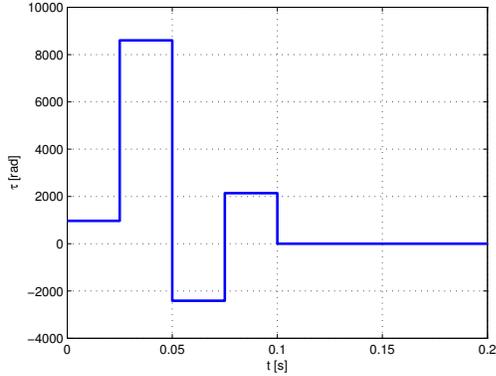
$$e \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{T_s} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k \frac{T_s^k}{k!}$$

Osserviamo che, per $k > 0$,

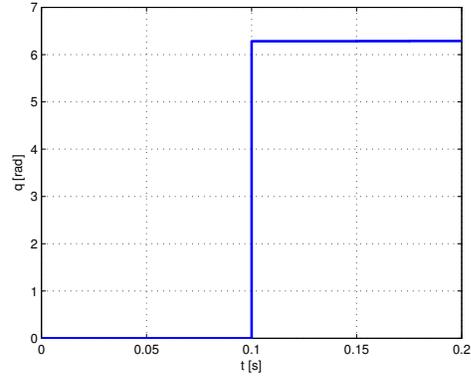
$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} A^k & A^{k-1}B \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mentre per $k = 0$ si ha la matrice identica. Si ha quindi

$$e \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{T_s} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{T_s^k}{k!} & \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} B \frac{T_s^k}{k!} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



(a) Sequenza ottima dei valori di coppia τ .



(b) Sequenza delle posizioni q assunte dal link.

Figure 2: Valori di coppia e sequenza di controllo per $T = 0.1$ s e $N = 4$ passi.

Vale ovviamente $e^{AT_s} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{T_s^k}{k!}$ per definizione. Considerando poi la funzione

$$F(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau,$$

ed il suo sviluppo di Taylor nell'origine

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \\ &= F(0) + F'(0)t + F^{(2)}(0) \frac{t^2}{2!} + \dots \\ &= 0 + (A \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau + I) \Big|_{t=0} t + (A^2 \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau + A) \Big|_{t=0} \frac{t^2}{2!} + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} \frac{t^k}{k!}, \end{aligned}$$

si ottiene il risultato anticipato.

Una legge di controllo “pre-pianificata” in grado di far raggiungere al sistema un arbitrario stato finale x_f può essere trovata (in modo approssimato o esatto) su uno dei corrispondenti sistemi tempo discreto se la completa raggiungibilità del sistema è conservata in questo passaggio (questa proprietà non è detto che si conservi, e deve quindi essere verificata), e se la sequenza è lunga almeno quanto la dimensione dello spazio di stato.

Il sistema a tempo discreto risulta completamente raggiungibile, perciò il minimo valore che garantisce una soluzione è $N = 4$. Ad esempio, per $T = 0.1$ s, la sequenza di ingresso è data da

$$\tilde{\tau}_{T=0.1 \ N=4} = R_4^{-1} \bar{x}_o.$$

Le figure 2(a) e 2(b) mostrano il controllo e la posizione del link, rispettivamente. Si noti in figura 2(b) che la posizione del link rimane invariata sino al quarto passo di campionamento: si lascia allo studente mettere in relazione questo fatto col grado relativo del sistema allo studio.

- b2)** Per sequenze sufficientemente lunghe, vi sono infinite possibili soluzioni in grado di assolvere al compito. In tal caso la scelta potrà ricadere sulle sequenze a minima norma. Questo tipo di problema di *Pianificazione Ottima* può essere formulato come segue:

$$\min_u \|u\|_2$$

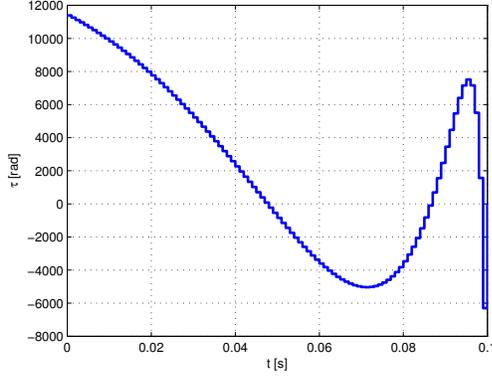
soggetto a:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k$$

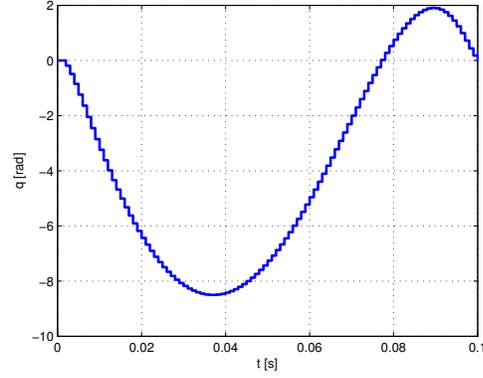
$$x_0 = \bar{x}_0$$

$$x_N = \bar{x}_f,$$

dove $\bar{x}_o = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e $\bar{x}_f = [2\pi \ 2\pi \ 0 \ 0]^T$ sono lo stato iniziale e quello finale, rispettivamente, relativo al sistema linearizzato e traslato attorno all'equilibrio corrispondente a $\bar{q} > 0$. Quest'ultimo



(a) Sequenza ottima dei valori di coppia τ .



(b) Sequenza delle posizioni q assunte dal link.

Figure 3: Valori di coppia e sequenza di controllo per $T = 0.1$ s e $N = 100$ passi.

ammette soluzione se lo stato \bar{x}_f è raggiungibile da \bar{x}_o in un numero di passi $l \leq N$. Per calcolare tale soluzione è sufficiente esplicitare i primi N passi dell'evoluzione completa del sistema:

$$\begin{aligned} x_N &= A_d^N x_0 + A_d^{N-1} B_d u_0 + \dots + B_d u_{N-1} \\ &= A_d^N x_0 + R_N \begin{bmatrix} u_{N-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dove R_N è la matrice di raggiungibilità in N passi. Si ha, pertanto, che \bar{x}_f è raggiungibile da \bar{x}_o in N passi se e solo se $\bar{x}_f - A_d^N \bar{x}_o \in \mathcal{R}_N = \text{Im}(R_N)$, dove \mathcal{R}_N è il sottospazio di raggiungibilità in N passi. Si ricava facilmente che

$$\tilde{\tau} = R_N^\dagger (\bar{x}_f - A_d^N \bar{x}_o) \quad (1)$$

dove la pseudoinversa R_N^\dagger consente di trovare la $\tilde{\tau}$ a minima norma euclidea.

Consideriamo quindi i vari casi richiesti:

i) $T = 0.1$, $N = 100$. In tal caso il tempo di campionamento è pari a $T_s = T/N = 0.001$ s. Il sistema discretizzato è dato da,

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d \tau_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.001 \\ -1 & 1 & 0.94 & 0 \\ 3.3 & -3.3 & 0 & 0.58 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.017 \end{bmatrix} \tau_k$$

e la sequenza di controlli è data da:

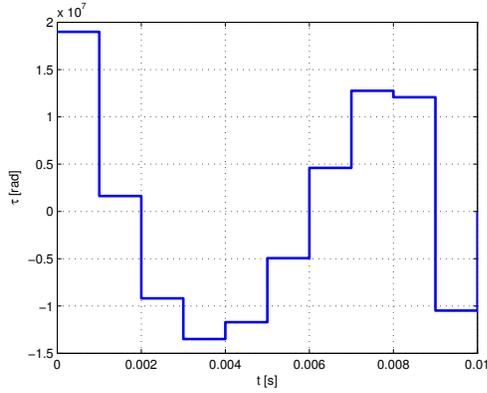
$$\tilde{\tau}_{T=0.1 \ N=100} = R_{100}^\dagger \bar{x}_o.$$

Le figure 3(a) e 3(b) mostrano il controllo e la posizione del link, rispettivamente. Come si può notare il modello tempo discreto del sistema raggiunge esattamente la posizione desiderata compiendo un giro completo. Il costo del controllo è in tal caso pari a $\mathcal{C} = 5.85 \cdot 10^4$.

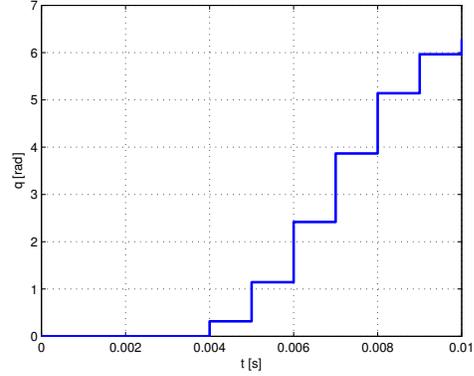
ii) $T = 0.01$, $N = 10$. In tal caso il tempo di campionamento è identico a quello precedente. Tuttavia, l'arco temporale entro il quale il sistema deve compiere un giro completo è inferiore rispetto a quello relativo al caso precedente. Ci aspettiamo quindi un valore del costo del controllo più elevato rispetto al prima. La sequenza di controlli è data da

$$\tilde{\tau}_{T=0.01 \ N=10} = R_{10}^\dagger \bar{x}_o.$$

Le figure 4(a) e 4(b) mostrano il controllo e la posizione del link, rispettivamente. Come si può notare, anche in tal caso il modello tempo discreto del sistema raggiunge esattamente la posizione desiderata compiendo un giro completo. Il costo del controllo è in tal caso pari a $\mathcal{C}_{ii} = 3.51 \cdot 10^7 > \mathcal{C}_i$.

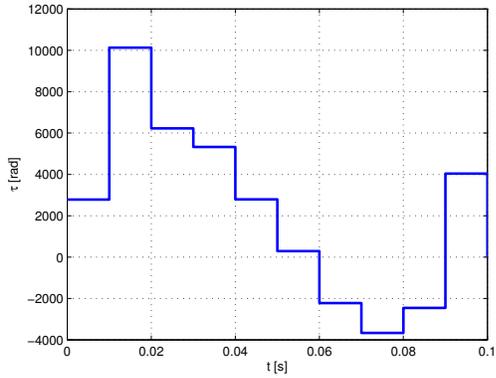


(a) Sequenza ottima dei valori di coppia τ .

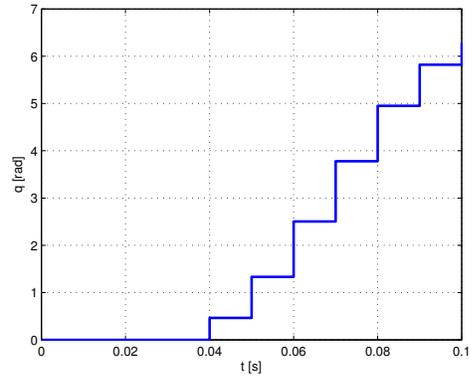


(b) Sequenza delle posizioni q assunte dal link.

Figure 4: Valori di coppia e sequenza di controllo per $T = 0.01$ s e $N = 10$ passi



(a) Sequenza ottima dei valori di coppia τ .



(b) Sequenza delle posizioni q assunte dal link.

Figure 5: Valori di coppia e sequenza di controllo per $T = 0.1$ s e $N = 10$ passi.

- iii) $T = 0.1$, $N = 10$. In questo ultimo caso, l'arco temporale entro il quale il sistema deve compiere un giro completo è identico a quello relativo al caso i). Tuttavia, essendo il numero di passi temporali inferiore, il tempo di campionamento è diverso rispetto al caso i) e quindi anche il discretizzato. Il fatto che diminuisca il numero di passi temporali non implica perciò un maggior costo del controllo. Infatti, data la sequenza di controlli

$$\tilde{\tau}_{T=0.1, N=10} = R_{10}^\dagger \bar{x}_o,$$

il costo di tale controllo è pari a $C_{iii} = 1.5 \cdot 10^4$. Le figure 5(a) e 5(b) mostrano il controllo e la posizione del link, rispettivamente. Come si può notare il modello tempo discreto del sistema raggiunge esattamente la posizione desiderata compiendo un giro completo.

Per completezza, in figura sono riportati gli andamenti della posizione del link nel caso in cui la sequenza di controllo calcolata ai punti i) e iii) siano applicati al sistema tempo continuo. Da tali risultati risulta evidente come il tempo di campionamento influenzi il valore finale raggiunto: esso risulta tanto più inaccurato quanto maggiore è il tempo di campionamento scelto.

D'altra parte, questo tipo di problema non viene riscontrato nel caso in cui la sequenza di controlli applicata al sistema linearizzato approssimato tempo continuo sia applicata la sequenza di controlli ottenuta utilizzando l'approssimazione tempo discreta ricavata mediante tecniche di linearizzazione esatta come descritto in precedenza (ZOH). La figura evidenziano come il valore finale raggiunto in tal caso sia esattamente quello desiderato.

Per concludere, applichiamo la sequenza di controlli calcolati in precedenza anche al sistema nonlineare di partenza secondo lo schema in figura 8. In particolare, le figure e riportano gli andamenti della posizione del link applicando al sistema non lineare le sequenze calcolate al

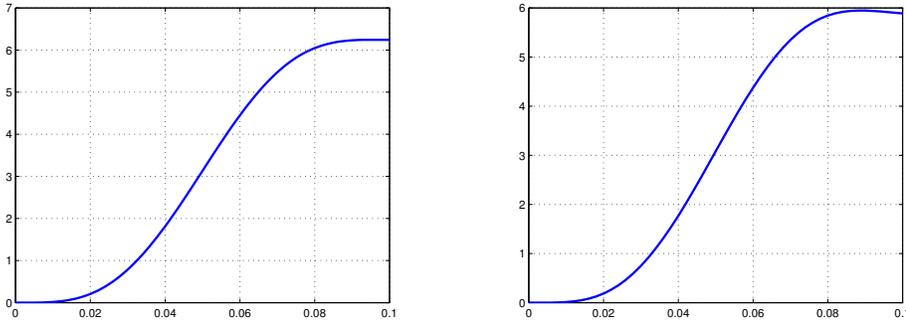


Figure 6: Risultato della applicazione del controllo costante a tratti (ottenuto discretizzando il sistema con Eulero in avanti) valutato con $T = 0.1$ e $N = 100$ (sx) e con $T = 0.1$ e $N = 10$ (dx) al sistema continuo linearizzato. Risulta evidente come il tempo di campionamento inferiore nel secondo caso fa sì che il valore finale raggiunto sia inaccurato, conseguenza del fatto che il modello tempo discreto ottenuto con Eulero in avanti approssima peggio il sistema continuo.

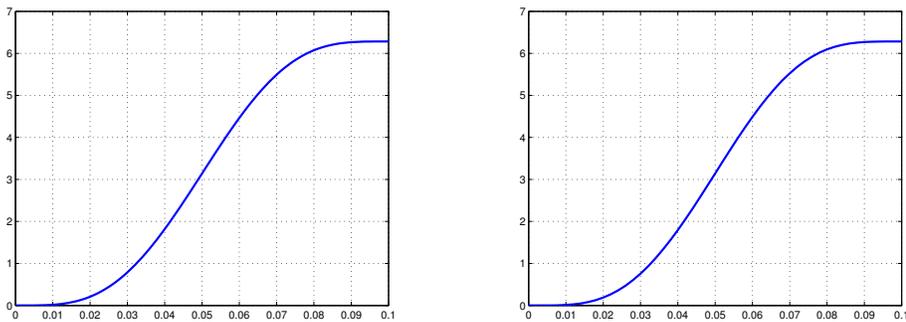


Figure 7: Risultato della applicazione del controllo costante a tratti (ottenuto discretizzando esattamente il sistema tempo continuo (ZOH)) valutato con $T = 0.1$ e $N = 100$ (sx) e con $T = 0.1$ e $N = 10$ (dx) al sistema continuo linearizzato.

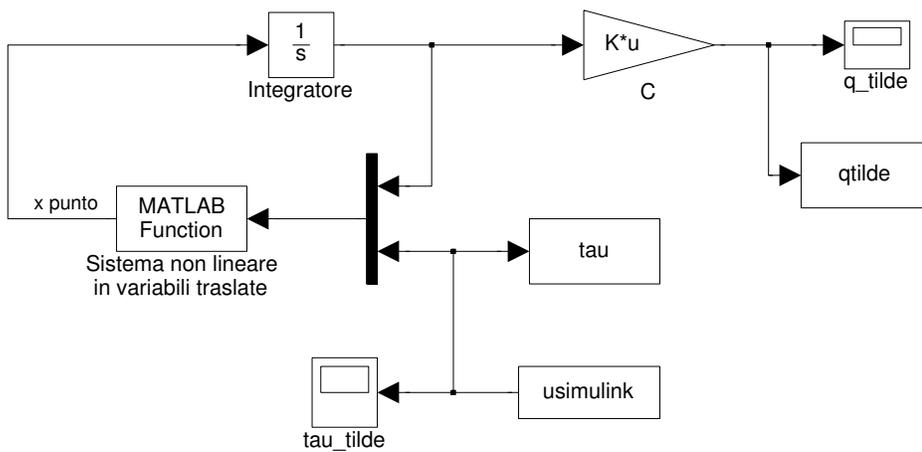


Figure 8: Sequenza di controllo ottimo (*usimulink*) in anello aperto applicata sul sistema non lineare.

punto *i*) ottenuti discretizzando il sistema linearizzato approssimato sia con Eulero in avanti che con il metodo di discretizzazione esatta (ZOH).

c1) Supponendo di avere adesso una misura della deflessione della molla $\sigma = q - \theta$, la matrice delle uscite relative al sistema linearizzato è $C = [1 \ -1 \ 0 \ 0]$. Poichè in tal caso il sistema risulta

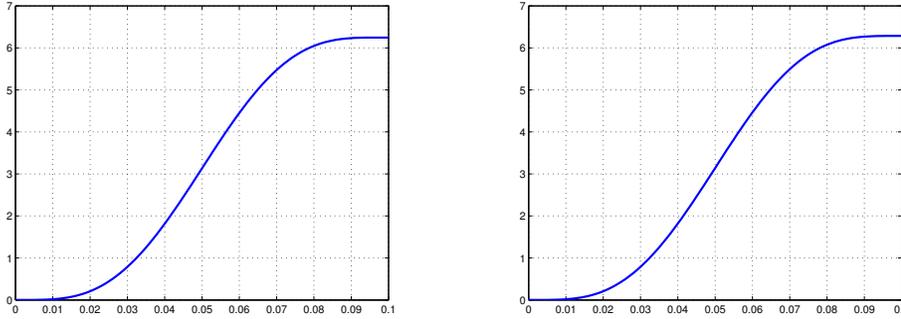


Figure 9: Risultato della applicazione al sistema nonlineare (vedi lo schema simulink riportato in figura 8) del controllo costante a tratti ottenuto discretizzando il sistema con il metodo di Eulero in avanti (sx) ed esattamente (ZOH) (dx) entrambi valutati con $T = 0.1$ e $N = 100$.

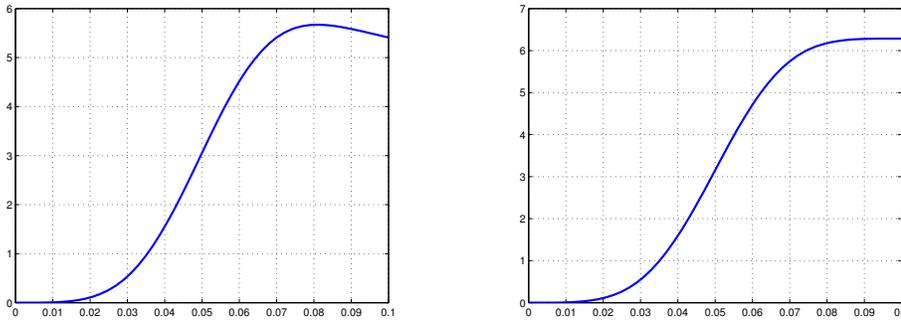


Figure 10: Risultato della applicazione al sistema nonlineare (vedi lo schema simulink riportato in figura 8) del controllo costante a tratti ottenuto discretizzando il sistema con il metodo di Eulero in avanti (sx) ed esattamente (ZOH) (dx) entrambi valutati con $T = 0.1$ e $N = 4$.

completamente raggiungibile ed osservabile, una procedura per ottenere il compensatore basato su regolatore consiste nel calcolare preliminarmente la matrice K di retroazione degli stati in modo da allocare i poli della matrice $A - BK$ in $p = [-2 \ -3 \ -4 \ -5]^T$, dove A e B sono le matrici del sistema linearizzato approssimato. Utilizzando il comando `Matlab K = place(A,B,p)`, si ottiene:

$$K = [435.3 \quad -426.5 \quad -70.4 \quad 75.4] .$$

Poichè non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile, si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice L di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore $A - LC$, dove C è la matrice delle uscite del sistema, abbia autovalori in $q = 2p$. Sempre impiegando il comando `Matlab L = transpose(place(A',C',q))` si ottiene:

$$L = 10^3 [-1.8 \quad -1.83 \quad -1 \quad -1.16]^T .$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica $K(sI - A + BK + LC)^{-1}L$, e si costruisce con il comando `rsys = ss(A-B*K-L*C,L,K,0)` ovvero, a meno di un segno, con `rsys = reg(Sys,K,L)`, ove `Sys = ss(A,B,C,0)`.

Uno schema `Simulink` per la simulazione del sistema con il compensatore basato sul regolatore appena progettato è riportato in figura 11. Nella figura 12(b) è riportato l'andamento della deflessione σ della molla a partire da condizioni iniziali $x_o = [2\pi \ 2\pi \ 0 \ 0]$.

Inoltre, la funzione di trasferimento complessiva del sistema così realizzato è

$$Gc(s) = \frac{-3027(s + 0.7551)(s^2 + 0.6s + 0.708)(s^2 - 12.04s + 139.4)}{(s + 10)(s + 8)(s + 6)(s + 5)(s + 3)(s + 2)(s + 4)^2}$$

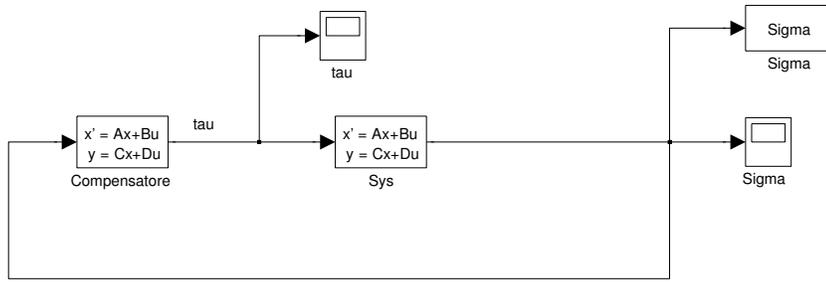
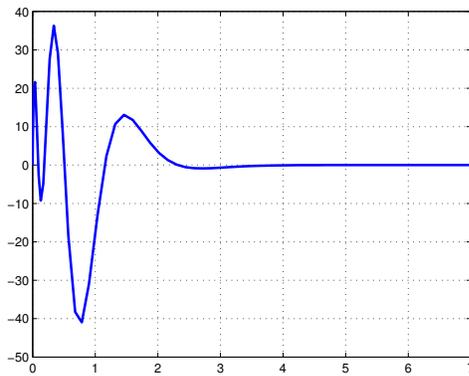
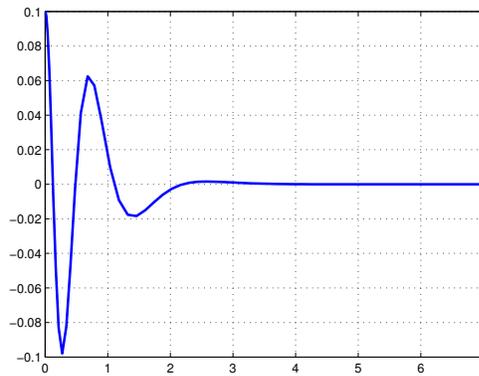


Figure 11: Montaggio del compensatore sul sistema linearizzato approssimato.



(a) Andamento della coppia di controllo τ .



(b) Andamento della deflessione σ della molla.

Figure 12: Simulazione sul sistema linearizzato approssimato per condizioni iniziali $x_o = [0.3 \ 0.2 \ 0 \ 0]^T$.

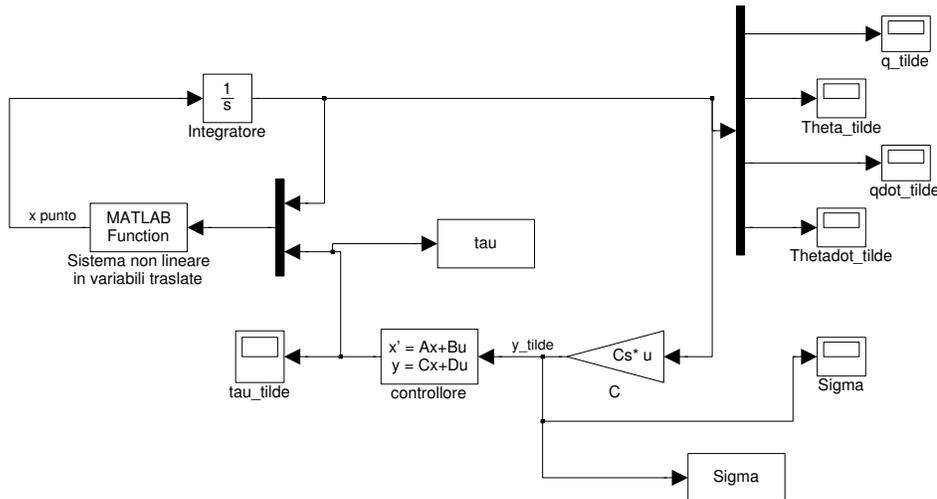
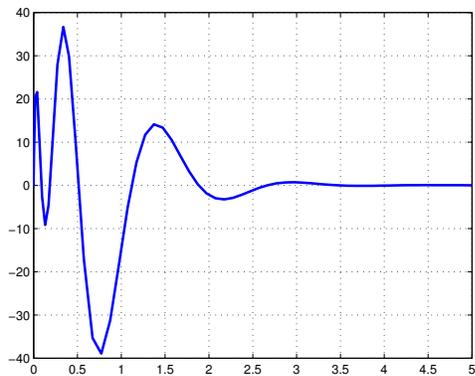


Figure 13: Montaggio del compensatore sul sistema nonlineare.

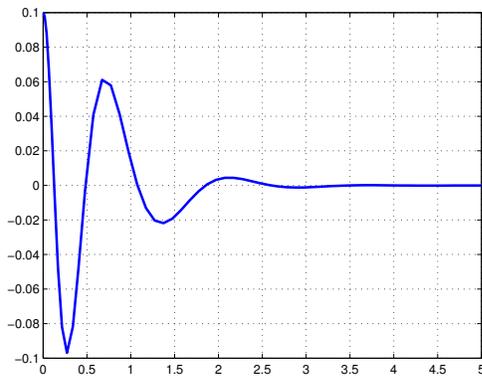
e, come si può notare, possiede sia i poli del controllore, allocati con la scelta della matrice di retroazione K sia quelli dello stimatore allocati con la matrice di iniezione delle uscite L . Gli zeri invece non sono altro che l'insieme costituito dagli zeri del sistema e gli zeri del controllore.

In figura 13 e figura 12 sono riportati lo schema **Simulink** e l'andamento della coppia di controllo τ (figura 12(a)) e l'andamento della deflessione σ della molla (figura 12(b)) nel caso in cui il compensatore è connesso con il sistema linearizzato approssimato.

Per completezza, in figura 13 e figura 14 sono riportati lo schema **Simulink** e l'andamento della coppia di controllo τ (figura 14(a)) e l'andamento della deflessione σ della molla (figura 14(b)) nel



(a) Andamento della coppia di controllo τ .



(b) Andamento della deflessione σ della molla.

Figure 14: Simulazione sul sistema nonlineare di partenza per condizioni iniziali $x_o = [0.3 \ 0.2 \ 0 \ 0]^T$.

caso in cui il compensatore è connesso con il sistema nonlineare di partenza traslato nel punto di equilibrio di interesse.