

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 1.

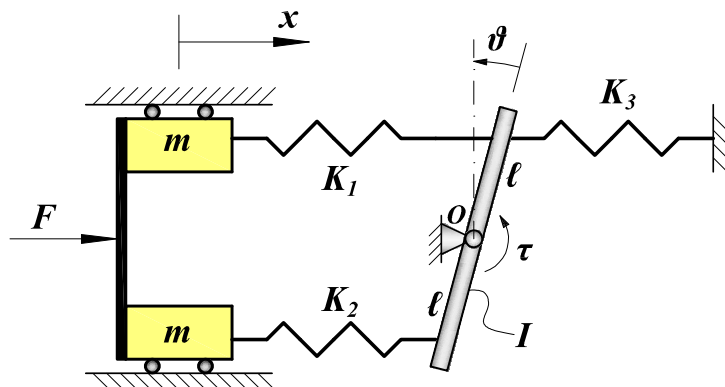


Figure 1: Schema meccanico del sistema.

Esso è costituito da due carrelli entrambi di massa  $m$  connessi tra loro per mezzo di una sbarra rigida. Inoltre, i due carrelli sono collegati per mezzo di due molle di costante elastica  $K_1$  e  $K_2$  ad un'asta lunga  $2\ell$  incernierata nel punto  $O$  e si muovono nella direzione individuata dall'asse  $x$  con attrito dinamico caratterizzato da un coefficiente  $\beta$ . L'asta di inerzia  $I$ , è libera di ruotare rispetto al punto  $O$  ed è connessa con una molla di costante elastica  $K_3$  ad un supporto fisso. Il sistema meccanico può essere attuato sia per mezzo di una forza  $F$  applicata ad entrambe le masse sia per mezzo di una coppia  $\tau$  applicata in corrispondenza del punto  $O$  dove l'asta è incernierata. Indicando con  $\theta$  l'angolo che l'asta forma con la verticale per il punto  $O$ , con  $x$  la posizione delle due masse rispetto all'equilibrio, la dinamica del sistema corrispondente a piccoli spostamenti angolari  $\theta$  è descritta da

$$2m\ddot{x} + K_1(x - \theta\ell) + K_2(x + \theta\ell) = F - \beta\dot{x}$$

$$I\ddot{\theta} - K_1\ell(x - \theta\ell) + K_2\ell(x + \theta\ell) + K_3\ell^2\theta = \tau.$$

- A** Si discutano le proprietà di raggiungibilità e stabilizzabilità del sistema corrispondente al punto di equilibrio ottenuto con  $F = \tau = 0$ , utilizzando alternativamente  $F$  e  $\tau$  come ingresso di controllo. Si dia un'interpretazione fisica dei risultati;
- B** Si studino le proprietà di osservabilità e detettabilità del sistema corrispondente al punto di equilibrio ottenuto ancora con  $F = \tau = 0$ , supponendo di misurare alternativamente la posizione dei carrelli  $x$  e la posizione angolare  $\theta$  dell'asta incernierata in  $O$ . Si dia un'interpretazione fisica dei risultati;

Si considerino adesso i seguenti valori numerici:  $m = 1$  Kg,  $I = 2$  kg m<sup>2</sup>,  $K_1 = 2$  N/m,  $K_2 = 3$  N/m,  $K_3 = 4$  N/m  $\beta = 5$  N s/m e  $\ell = 1$  m.

- C** Si progetti un regolatore costituito da un osservatore identità e da una retroazione degli stati stimati che, per mezzo dell'ingresso  $\tau$ , sia in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema nell'intorno dell'equilibrio. Si scelga come uscita di misura la posizione angolare  $\theta$  dell'asta. Si realizzi, inoltre, in ambiente **Matlab/Simulink** una simulazione del sistema linearizzato chiuso in anello con il regolatore appena progettato;
- D** Supponendo che l'ingresso  $F$  sia un disturbo costante ( $F = \bar{F} = \text{cost.}$ ) si desidera garantire che il suo effetto sull'uscita sia completamente annullato. Si progetti quindi un compensatore basato sul regolatore che per mezzo dell'ingresso  $\tau$  e avendo a disposizione l'uscita  $\theta$  stabilizzi asintoticamente il sistema nell'intorno dell'equilibrio. Si realizzi in ambiente **Matlab/Simulink** una simulazione del sistema linearizzato chiuso in anello con il compensatore stesso.
- E** Si progetti nuovamente il regolatore costituito da un osservatore identità e da una retroazione degli stati stimati come al punto C) ma considerando il caso in cui  $K_1 = K_2$ . Si realizzi in ambiente **Matlab/Simulink** una simulazione del sistema chiuso in anello con il regolatore appena progettato.
- F** Si consideri nuovamente il sistema di cui sopra, nel caso in cui  $K_1 = K_2 + \epsilon$  con  $\epsilon$  piccolo (ad esempio  $\epsilon = 0.01$  N/m). Si progetti nuovamente il regolatore e si discutano le differenze con il risultato dei punti (C) ed (F).

## Soluzione

### Esercizio 1.

A Al fine di studiare la raggiungibilità e la stabilizzabilità del sistema è necessario preliminarmente porre il sistema, già lineare, in forma di stato nell'intorno dell'equilibrio corrispondente a  $F = \tau = 0$ . Detto  $q = [x \ \theta \ \dot{x} \ \dot{\theta}]^T$  il vettore delle variabili di stato, l'equilibrio corrispondente a ingressi nulli è dato da  $\bar{q} = 0$ . Pertanto, assumendo come vettore degli ingressi  $u = [u_1 \ u_2] = [F \ \tau]^T$ , il sistema scritto in forma di stato assume la seguente forma:

$$\dot{q} = Aq + B_1 u_1 + B_2 u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_1+K_2}{2m} & -\frac{\ell(K_2-K_1)}{2m} & -\frac{\beta}{2m} & 0 \\ -\frac{\ell(K_2-K_1)}{I} & -\frac{\ell^2(K_1+K_2+K_3)}{I} & 0 & 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2m} \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} u_2$$

$$y_1 = C_1 q = [1 \ 0 \ 0 \ 0] q$$

$$y_2 = C_2 q = [0 \ 1 \ 0 \ 0] q$$

Iniziamo studiando la raggiungibilità del sistema dall'ingresso  $u_1 = F$ . La matrice di raggiungibilità è data da

$$R_1 = [B_1 \ AB_1 \ A^2 B_1 \ A^3 B_1] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2m} & -\frac{\beta}{4m^2} & -\frac{2m(K_1+K_2)-\beta^2}{8m^3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\ell(K_2-K_1)}{2Im} \\ \frac{1}{2m} & -\frac{\beta}{4m^2} & -\frac{2m(K_1+K_2)-\beta^2}{8m^3} & \frac{4m(K_1+K_2)-\beta^2}{16m^4} \\ 0 & 0 & -\frac{\ell(K_2-K_1)}{Im} & \frac{\ell(K_2-K_1)\beta}{4Im^2} \end{bmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è dato da

$$\det(R_1) = -\frac{\ell^2(K_2 - K_1)^2}{16m^4 I^2}$$

che si annulla se e soltanto se  $K_1 = K_2 = K$ . In tal caso la matrice di raggiungibilità diviene

$$R_1|_{K_1=K_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2m} & -\frac{\beta}{4m^2} & -\frac{4mK-\beta^2}{8m^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2m} & -\frac{\beta}{4m^2} & -\frac{4mK-\beta^2}{8m^3} & \frac{8mK-\beta^2}{16m^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, poichè ha due righe nulle, ha rango pari a due. Una base per il sottospazio di raggiungibilità è quindi dato da

$$T_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Queste vuol dire che il sottospazio raggiungibile dall'ingresso  $u_1 = F$  è costituito dal piano delle variabili di stato  $x$  e  $\dot{x}$ . Sia  $T_N$  una base complementare al sottospazio raggiungibile, ad esempio gli altri due elementi della base canonica in  $\mathbb{R}^4$ . Detto  $q = Tz = [T_R|T_N]z$ , con  $z$  il vettore delle nuove variabili di stato, il sistema posto in forma standard di raggiungibilità è dato da:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{\beta}{2m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\ell^2(2K+K_3)}{I} & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1.$$

Poichè il sottosistema non raggiungibile ha poli marginalmente stabili (sull'asse immaginario), il sistema per  $K_1 = K_2$  risulta non stabilizzabile.

Si consideri adesso l'altro ingresso a disposizione:  $u_2 = \tau$ . In tal caso la matrice di raggiungibilità è data da

$$R_2 = [B_2 \ AB_2 \ A^2 B_2 \ A^3 B_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\ell(K_2-K_1)}{2Im} \\ 0 & \frac{1}{I} & 0 & -\frac{\ell^2(K_1+K_2+K_3)}{I^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\ell(K_2-K_1)}{2Im} & \frac{\ell(K_2-K_1)\beta}{Im^2} \\ \frac{1}{I} & 0 & -\frac{\ell^2(K_1+K_2+K_3)}{I^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è dato da

$$\det(R_2) = -\frac{\ell^2(K_2 - K_1)^2}{4m^2 I^4}$$

che si annulla ancora se e soltanto se  $K_1 = K_2 = K$ . In tal caso la matrice di raggiungibilità diviene

$$R_2|_{K_1=K_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I} & 0 & -\frac{\ell^2(2K+K_3)}{I^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I} & 0 & -\frac{\ell^2(2K+K_3)}{I^2} & 0 \end{bmatrix}$$

e, poichè ha due righe nulle, ha rango pari a due. Una base per il sottospazio di raggiungibilità è quindi dato da

$$T_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Queste vuol dire che il sottospazio raggiungibile dall'ingresso  $u_2 = \tau$  è costituito dal piano delle variabili di stato  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ . Sia  $T_N$  una base complementare al sottospazio raggiungibile, ossia gli altri due elementi della base canonica in  $\mathbb{R}^4$ . Detto  $q = Tz = [T_R|T_N]z$ , con  $z$  il vettore delle nuove variabili di stato, il sistema posto in forma standard di raggiungibilità è dato da:

$$\dot{z} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\ell^2(2K+K_3)}{I} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{K}{m} & -\frac{\beta}{2m} \end{array} \right] z + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_2.$$

Poichè il sottosistema non raggiungibile ha poli a parte reale negativa ovvero è asintoticamente stabile, il sistema è stabilizzabile. La differenza tra questo ed il caso precedente è data dalla presenza degli attriti dinamici sui carrelli, laddove le oscillazioni dell'asta, non raggiungibile da  $u_1$ , non sono smorzate.

**B** Per lo studio dell'osservabilità del sistema, si consideri inizialmente di misurare la posizione dei carrelli di massa  $m$ , ovvero  $x$ . Considerando  $C_1$  come matrice delle uscite, la matrice di osservabilità è data da

$$O_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_1+K_2}{2m} & -\frac{\ell(K_2-K_1)}{2m} & -\frac{\beta}{2m} & 0 \\ \frac{\beta(K_1+K_2)}{4m^2} & \frac{\ell(K_2-K_1)\beta}{4m^2} & -\frac{2m(K_1+K_2)-\beta^2}{4m^2} & -\frac{K_2-K_1}{2m} \end{bmatrix}$$

Il determinante di  $O_1$  è dato da

$$\det(O_1) = -\frac{\ell^2(K_2 - K_1)^2}{4m^2}$$

che si annulla se e soltanto se  $K_1 = K_2 = K$ . In tal caso la matrice di osservabilità diviene

$$O_1|_{K_1=K_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K}{m} & 0 & -\frac{\beta}{2m} & 0 \\ \frac{\beta K}{2m^2} & 0 & -\frac{4mK-\beta^2}{4m^2} & 0 \end{bmatrix}$$

e, poichè ha due colonne nulle, ha rango pari a due. Una base per il sottospazio inosservabile è quindi dato da

$$T_{\bar{O}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Questo vuol dire che il sottospazio inosservabile dalla misura della posizione dei due carrelli è costituito dal piano delle variabili di stato  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ . In altri termini, due condizioni iniziali che differiscono solo per una posizione o velocità dell'asta, producono identiche funzioni di uscita (qualsiasi sia l'ingresso). Sia  $T_O$  una base complementare al sottospazio inosservabile, ossia gli altri due elementi della base canonica in  $\mathbb{R}^4$ . Detto  $q = Tz = [T_O|T_{\bar{O}}]z$ , con  $z$  il vettore delle nuove variabili di stato, il sistema posto in forma standard di osservabilità è dato da:

$$\dot{z} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{\beta}{2m} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\ell^2(2K+K_3)}{I} & 0 \end{array} \right] z$$

$$y_1 = [1 \ 0 \ | \ 0 \ 0] z.$$

La matrice dinamica è identica a quella ottenuta per lo studio di raggiungibilità con ingresso  $F$ . Poichè il sottosistema inosservabile ha poli a parte reale nulla ovvero è marginalmente stabile, il sistema non è detettabile.

Infine, si consideri come uscita di misura la posizione angolare  $\theta$ . La matrice di osservabilità in tal caso è data da

$$O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\ell(K_2-K_1)}{I} & -\frac{\ell^2(K_1+K_2+K_3)}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\ell(K_2-K_1)}{I} & -\frac{\ell^2(K_1+K_2+K_3)}{I} \end{bmatrix}$$

Il determinante di  $O_2$  è dato da

$$\det(O_2) = -\frac{\ell^2(K_2 - K_1)^2}{I^2}$$

che si annulla se e soltanto se  $K_1 = K_2 = K$ . In tal caso la matrice di osservabilità diviene

$$O_2|_{K_1=K_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\ell^2(2K+K_3)}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\ell^2(2K+K_3)}{I} \end{bmatrix}$$

e, poichè ha due colonne nulle, ha rango pari a due. Una base per il sottospazio inosservabile è quindi dato da

$$T_{\bar{O}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Questo vuol dire che il sottospazio inosservabile dalla misura della posizione angolare  $\theta$  è costituito dalle variabili di stato  $x$  e  $\dot{x}$ . Sia  $T_O$  una base complementare al sottospazio inosservabile, ossia gli altri due elementi della base canonica in  $\mathbb{R}^4$ . Detto  $q = Tz = [T_O|T_{\bar{O}}]z$ , con  $z$  il vettore delle nuove variabili di stato, il sistema posto in forma standard di osservabilità è dato da:

$$\dot{z} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\ell^2(2K+K_3)}{I} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{K}{m} & -\frac{\beta}{2m} \end{array} \right] z$$

$$y_2 = [1 \ 0 \ | \ 0 \ 0] z.$$

La matrice dinamica è identica a quella ottenuta per lo studio di raggiungibilità con ingresso  $\tau$ . Poichè il sottosistema inosservabile ha poli a parte reale negativa ovvero è asintoticamente stabile, il sistema è detettabile.

- C** Sulla base dello studio svolto nei punti precedenti, scegliendo come ingresso  $\tau$  e come uscita di misura la posizione angolare  $\theta$  dell'asta, poichè  $K_1 \neq K_2$ , il sistema risulta completamente raggiungibile e osservabile. Infatti, la matrice di raggiungibilità, ottenibile con il comando `ctrb(A,B)` di `Matlab`, è data da

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0.5 & 0 & -2.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0.63 \\ 0.5 & 0 & -2.25 & 0 \end{bmatrix},$$

il cui rango è 4. La matrice di osservabilità invece, ottenibile con il comando `obsv(A,B)` di `Matlab`, è data da

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -4.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & -4.5 \end{bmatrix},$$

di rango pieno, pari cioè a 4.

Ai fini del progetto del regolatore è necessario determinare le matrici di retroazione statica degli stati stimati e quella di iniezione delle uscite. La matrice di retroazione  $K$  degli stati stimati associati all'intero sistema, in quanto completamente raggiungibile, può essere calcolata in modo tale da allocare i poli della matrice  $A_{R,O} - B_{R,O}K$  ad esempio in  $p = [-2 \ -3 \ -4 \ -5]$ . Utilizzando il comando `Matlab Kro = place(Aro,Bro,p)` si ottiene:

$$K = [-83.5 \ 70.5 \ -103.5 \ 23].$$

Poichè non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile, si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire le variabili non misurate. La matrice  $L$  di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore  $A_{R,O} - LC_{R,O}$ , dove  $C_{R,O}$  è la matrice delle uscite, abbia autovalori in  $q = 2p$ . Sempre impiegando il comando `Matlab L = transpose(place(Aro',Cro',q))` si ottiene:

$$L = [-1248 \ 25.5 \ 376.6 \ 213.3]^T.$$

Seguendo la convenzione di `Matlab` sui segni nelle retroazioni, uno schema `Simulink` del regolatore appena progettato è riportato in figura 2. Inoltre, la f.d.t. del sistema chiuso in retroazione è

$$G(s) = \frac{0.5(s^2 + 2.5s + 2.5)}{(s + 5)(s + 4)(s + 3)(s + 2)}$$

che coincide con quella ottenuta dalla retroazione degli stati effettivi: l'utilizzo degli stati stimati non ha effetti da questo punto di vista. Infine, nelle figure 3a e 3b sono riportati gli andamenti a zero della posizione del carrello e dell'asta a partire da condizioni iniziali  $q_o = [0.2 \ 0.1 \ 0 \ 0.2]$ .

- D** Prima di procedere alla realizzazione del compensatore basato sul regolatore, è necessario determinare le condizioni che garantiscono errore nullo a regime in seguito ad un disturbo generato applicando una forza  $F$  costante ai due carrelli di massa  $m$ . Le f.d.t.  $G_\tau$  tra l'ingresso manipolabile  $\tau$  e l'uscita di misura  $\theta$  e la f.d.t.  $G_F$  tra l'ingresso  $F$ , equivalente ad un disturbo in questa fase di progetto, e l'uscita  $\theta$  sono:

$$G_\tau = \frac{0.5(s^2 + 2.5s + 2.5)}{(s^2 + 2.481s + 2.436)(s^2 + 0.01941s + 4.516)}$$

e

$$G_F = \frac{-0.25}{(s^2 + 2.481s + 2.436)(s^2 + 0.01941s + 4.516)}$$

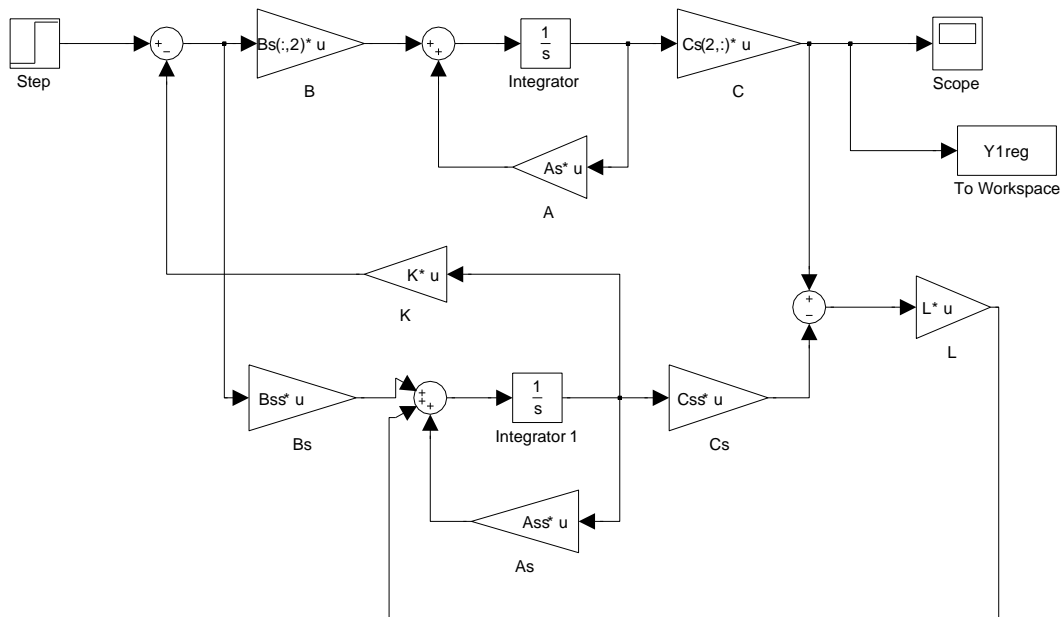
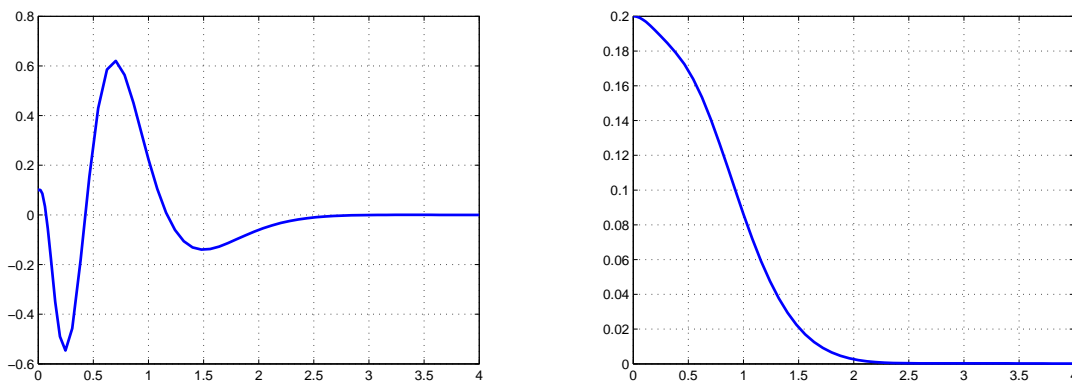


Figure 2: Schema Simulink del sistema linearizzato chiuso in retroazione con un regolatore costituito da un osservatore identità e retroazione statica degli stati.



(a) Andamento dell'uscita  $\theta$  a partire da  $q_0$  e con riferimento a gradino nullo.

(b) Andamento della posizione  $x$  dei carrelli a partire da  $q_0$  e con riferimento a gradino nullo.

Figure 3: Andamenti della variabile  $\theta$  e  $x$ .

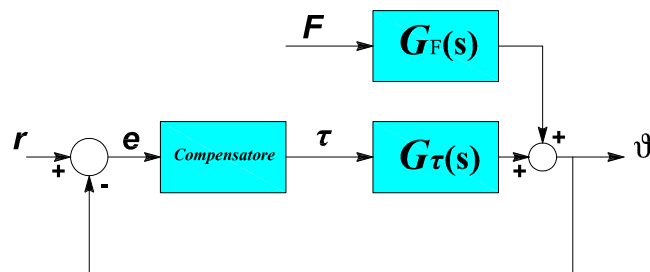


Figure 4: Schema a blocchi del sistema con compensatore e disturbo  $F$ .

Facendo riferimento ad uno schema a blocchi del tipo riportato in figura 4, affinché l'effetto di un disturbo costante sia completamente annullato sull'uscita, è necessario che la funzione di trasferimento a monte rispetto al punto di ingresso di  $F$  abbia un polo nell'origine. Poiché il sistema non ne possiede già uno, è necessario inserirlo nel controllore.

In definitiva, una procedura per ottenere il compensatore basato su regolatore consiste nel calcolare

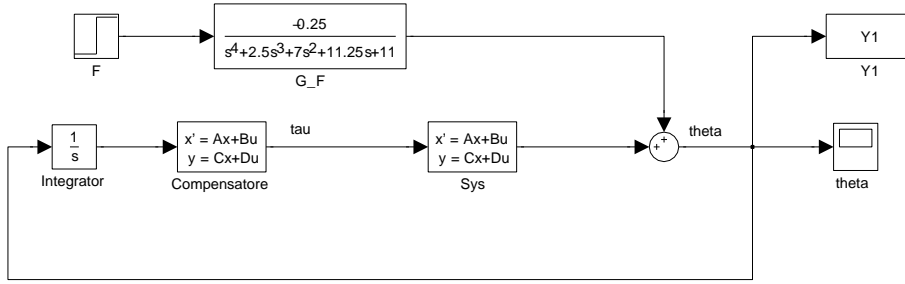


Figure 5: Montaggio del compensatore.

preliminarmente la matrice  $K$  di retroazione degli stati in modo da allocare i poli della matrice  $A_e - B_e K$  in  $p = [-2 \ -3 \ -4 \ -5 \ -7]^T$ , dove  $A_e$  e  $B_e$  sono le matrici del sistema esteso, ottenuto aggiungendo il polo nell'origine necessario per rispettare la specifica sull'errore a regime dovuto ad un disturbo costante. Utilizzando la funzione di **Matlab**  $K = \text{place}(A_e, B_e, p)$ , si ottiene:

$$K = [576 \quad -209.5 \quad 208.55 \quad 94.5 \quad 35] .$$

Poichè non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile, si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice  $L$  di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore  $A_e - LC_e$ , dove  $C_e$  è la matrice delle uscite del sistema esteso, abbia autovalori in  $q = 2p$ . Sempre impiegando il comando **Matlab**  $L = \text{transpose}(\text{place}(A_e', C_e', q))$  si ottiene:

$$L = 10^4 [0.00375 \quad -1.4605 \quad 0.0519 \quad 0.66 \quad 0.307]^T .$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica  $K(sI - A_e + B_e K + LC_e)^{-1}L$ , e si costruisce con il comando  $\text{rsys} = \text{ss}(A_e - B_e K - L C_e, L, K, 0)$  ovvero, a meno di un segno, con  $\text{rsys} = \text{reg}(\text{Syse}, K, L)$ , ove  $\text{Syse} = \text{ss}(A_e, B_e, C_e, 0)$ . La sequenza di comandi **Matlab** necessari allo scopo è la seguente:

```

integrator = ss(1/tf('s'));
Syse = integrator * ss(A, B, C, 0);
p = [-2 -3 -4 -5 -7];
K = place(sys_e.a, sys_e.b, p);
q = 2*p;
L = place(sys_e.a', sys_e.c', q)';
rsys = reg(Syse, K, L);
kreg = -rsys.c * inv(-rsys.a) * rsys.b;

```

Uno schema Simulink per la simulazione del sistema con il compensatore basato sul regolatore appena progettato è riportato in figura 5. Nella figura 6 è riportato l'andamento della posizione angolare  $\theta$  dell'asta a partire da condizioni iniziali  $q_o = [0.2 \ 0.1 \ 0 \ 0.2]$  e nel caso in cui si applichi al sistema un disturbo  $F = \bar{F} = 10 \text{ N}$  costante a partire dall'istante  $t = 4 \text{ s}$ .

Inoltre, la funzione di trasferimento complessiva del sistema così realizzato è

$$G_c(s) = -\frac{2582367.2655(s+2.771)(s+0.2465)(s^2+2.5s+2.5)(s^2+0.02447s+5.12)}{(s+14)(s+10)(s+8)(s+7)(s+6)(s+5)(s+4)^2(s+3)(s+2)}$$

e, come si può notare, possiede sia i poli del controllore, allocati con la scelta della matrice di retroazione  $K$  sia quelli dello stimatore allocati con la matrice di iniezione delle uscite  $L$ . Gli zeri invece non sono altro che l'insieme costituito dagli zeri del sistema e gli zeri del controllore.

**E** Sulla base dello studio svolto nei precedenti punti (A) e (B), scegliendo come ingresso  $\tau$  e come uscita di misura  $\theta$ , il sistema risulta non completamente raggiungibile ed osservabile solo nel caso in cui  $K_1 = K_2$ . Tuttavia, il sistema risulta stabilizzabile e detettabile. In particolare, si è visto che il sottosistema relativo alle variabili non raggiungibili e quello relativo alle variabili inosservabili coincidono ( $x$  e  $\dot{x}$ ) e sono asintoticamente stabili.

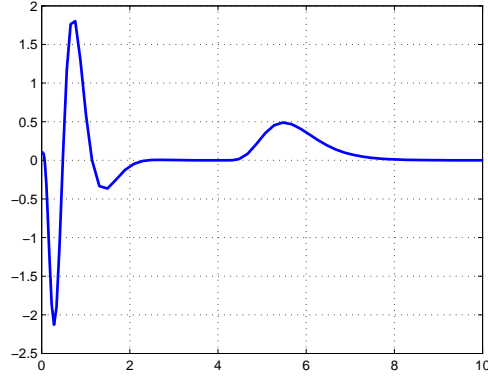


Figure 6: Andamento dell'uscita  $\theta$  a partire da  $q_o$  e disturbo costante a partire dall'istante  $t = 4$  s.

Nel caso in cui  $K_1 = K_2$ , ai fini del progetto del regolatore è necessario considerare soltanto il sottosistema raggiungibile e osservabile, ovvero il sottosistema caratterizzato dalle seguenti matrici<sup>1</sup>:

$$A_{R,O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\ell^2(2\bar{K}+K_3)}{I} & 0 \end{bmatrix} \quad B_{R,O} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} \quad C_{R,O} = [1 \quad 0],$$

ottenute ponendo  $K_1 = K_2 = \bar{K} = 3$  N/m

La matrice di retroazione  $K$  degli stati stimati associati al sottosistema completamente raggiungibile e osservabile può essere calcolata in modo tale da allocare i poli della matrice  $A_{R,O} - B_{R,O}K$  in  $p = [-2 \quad -3]$ . Utilizzando il comando `Matlab Kro = place(Aro, Bro, p)` si ottiene:

$$K = [4 \quad 10]$$

La matrice  $L$  di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore  $A_{R,O} - LC_{R,O}$ , dove  $C_{R,O}$  è la matrice delle uscite associata al sottosistema osservabile, abbia autovalori in  $q = 2p$ . Sempre impiegando il comando `Matlab L = transpose(place(Aro', Cro', q))` si ottiene:

$$L = [10 \quad 20]^T.$$

Seguendo la convenzione di `Matlab` sui segni nelle retroazioni, lo schema `Simulink` del regolatore utilizzato è equivalente a quello di figura 2. Inoltre, la f.d.t. del sistema chiuso in retroazione è

$$G(s) = \frac{0.5}{(s+3)(s+2)}.$$

In figura 7 sono riportati gli andamenti della posizione angolare  $\theta$  dell'asta e della posizione dei carrelli  $x$  a partire da condizioni iniziali  $q_o = [0.2 \quad 0.1 \quad 0 \quad 0.2]$ .

**F** Nel caso in cui  $K_1 = K_2 + \epsilon = 3.01$  N/m, il sistema risulta comunque completamente raggiungibile ed osservabile. Seguendo la medesima procedura seguita per lo svolgimento del punto (C), la matrice di retroazione degli stati stimati necessaria al piazzamento dei poli in  $p = [-2 \quad -3 \quad -4 \quad -5]$  è

$$K = 10^3 [0.83 \quad 0.069 \quad 8.53 \quad 0.023]$$

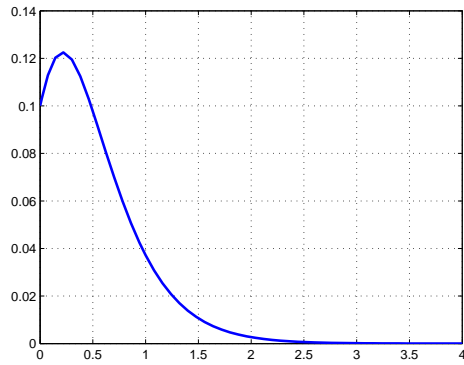
mentre la matrice di iniezione delle uscite è

$$L = 10^5 [1.22 \quad 0.0003 \quad -0.527 \quad 0.0021].$$

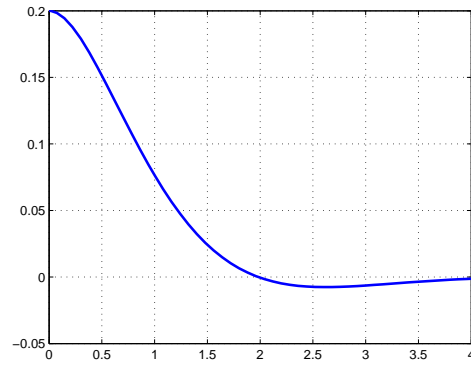
<sup>1</sup>Tale sistema può essere ottenuto in seguito ad una decomposizione di Kalman utilizzando come matrice di trasformazione

$$T = [T_R \quad T_O] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





(a) Andamento dell'uscita  $\theta$  a partire da  $q_o$  nel caso in cui  $K_1 = K_2$ .



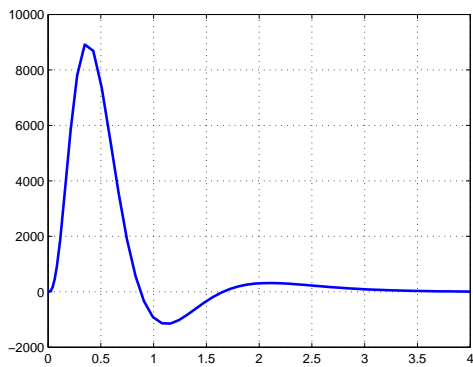
(b) Andamento della posizione  $x$  dei carrelli a partire da  $q_o$  nel caso in cui  $K_1 = K_2$ .

Figure 7: Andamenti di  $\theta$  e  $x$  nel caso in cui  $K_1 = K_2$ .

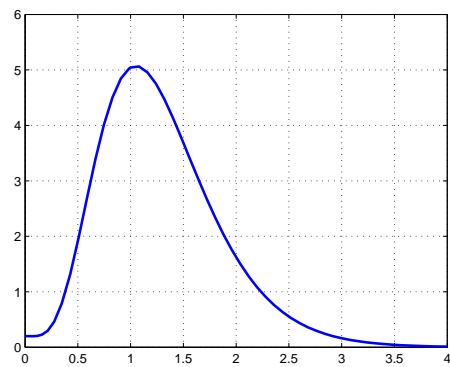
La f.d.t. del sistema chiuso in retroazione è

$$G(s) = \frac{0.5(s^2 + 2.5s + 3.005)}{(s + 5)(s + 4)(s + 3)(s + 2)}.$$

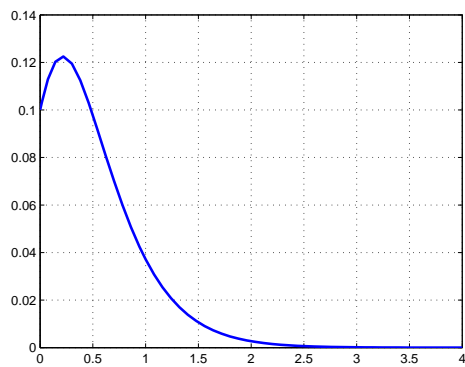
In figura 8 sono riportati gli andamenti dell'uscita  $\theta$  e della posizione  $x$  dei carrelli nei due casi  $K_1 \approx K_2$  e  $K_1 = K_2$  ottenuto al punto precedente con condizioni iniziali  $q_o = [0.2 \ 0.1 \ 0 \ 0.2]$ . Si può notare come la risposta ottenuta sia più energica nel caso in cui  $K_1 \approx K_2$ , rispetto al caso in cui  $K_1 = K_2$ , dove il progetto del regolatore viene effettuato considerando soltanto il sottosistema raggiungibile ed osservabile.



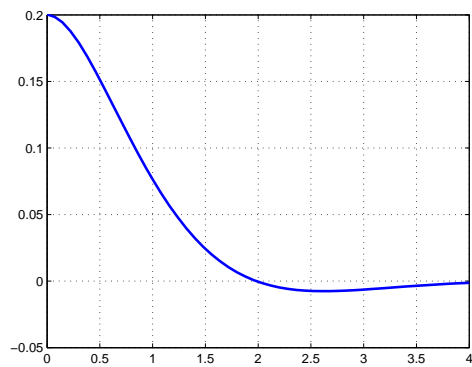
(a) Andamento dell'uscita  $\theta$  a partire da  $q_o$  nel caso in cui  $K_1 \approx K_2$ .



(b) Andamento della posizione  $x$  dei carrelli a partire da  $q_o$  nel caso in cui  $K_1 \approx K_2$ .



(c) Andamento dell'uscita  $\theta$  a partire da  $q_o$  nel caso in cui  $K_1 = K_2$ .



(d) Andamento della posizione  $x$  dei carrelli a partire da  $q_o$  nel caso in cui  $K_1 = K_2$ .

Figure 8: Confronto negli andamenti di  $\theta$  e  $x$  nei due casi in cui  $K_1 \approx K_2$  e  $K_1 = K_2$ .