

Esercizio 1.

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 1. Esso è costituito da un disco di raggio R e inerzia J dotato di una scanalatura all'interno della quale scorre senza attrito un carrello di massa trascurabile. All'interno del carrello scorre con attrito viscoso caratterizzato da un coefficiente β una sfera di massa m collegata mediante una molla di costante elastica K in corrispondenza della mezzeria del carrello. La lunghezza a riposo della molla si assume nulla. Infine, il disco è attuato per mezzo di una coppia di controllo τ . Indicando con (O, x_R, y_R) un sistema di riferimento solidale al disco e con ρ la distanza della sfera da O , con α l'angolo che questa forma con l'asse x_R e con ω la velocità del disco, la dinamica del sistema linearizzato nell'intorno dell'unico equilibrio corrispondente a $\tau = 0$, e caratterizzato da $\bar{\rho} = \frac{gm}{K}$, $\bar{\alpha} = -\frac{\pi}{2}$, $\bar{\theta} = 0$ è descritto da

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & 0 & 0 & -\frac{\beta}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g^2 m^2}{JK} & -\frac{K}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g^2 m^2}{JK} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \tau$$

dove $\tilde{x} = [\rho - \bar{\rho} \quad \alpha - \bar{\alpha} \quad \theta - \bar{\theta} \quad \dot{\rho} \quad \dot{\alpha} \quad \dot{\theta}]^T$.

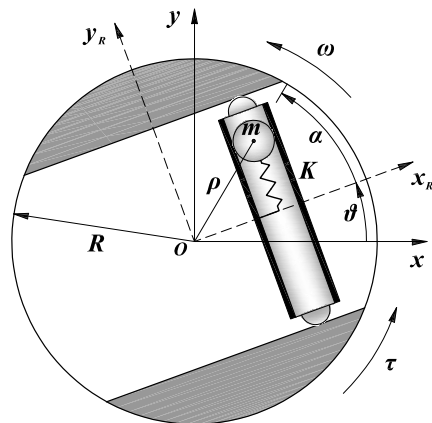


Figure 1: Schema meccanico del sistema.

- 1.A Si discutano le proprietà di raggiungibilità e stabilizzabilità del sistema, utilizzando τ come ingresso di controllo. Si dia un'interpretazione fisica dei risultati;
- 1.B Si studino le proprietà di osservabilità e detettabilità del sistema, supponendo di misurare alternativamente la posizione del carrello rispetto ad O ($y_1 = \rho \cos \alpha$), della massa m all'interno del carrello rispetto all'asse x_R ($y_2 = \rho \sin \alpha$) o l'angolo di rotazione del disco ($y_3 = \theta$). Si dia un'interpretazione fisica dei risultati;

Si considerino adesso i seguenti valori numerici: $m = 0.5$ Kg, $J = 2$ kgm², $K = 2$ N/m, $\beta = 8$ Ns/m, $g = 9.81$ m/s².

- 1.C Si progetti un regolatore costituito da un osservatore identità e da una retroazione degli stati stimati che, per mezzo dell'ingresso τ ed usando la misura dell'uscita y_1 sia in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio. Si realizzi, inoltre, in ambiente Matlab/Simulink una simulazione del sistema linearizzato chiuso in anello con il regolatore appena progettato;
- 1.D Si progetti adesso un compensatore basato sul regolatore progettato al passo precedente e si realizzi in ambiente Matlab/Simulink una simulazione del sistema linearizzato chiuso in anello con il compensatore stesso. Si confronti il risultato ottenuto con quello relativo al punto precedente.

Esercizio 2.

Si consideri il seguente sistema dinamico non lineare tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -3x_1 + x_1^3 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - ax_2,\end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

- 2.A** Determinare i punti di equilibrio del sistema con $a = 1$ e con $u \equiv 0$ e se ne studi la stabilità;
- 2.B** Si determini una legge di controllo in retroazione del tipo $u = f(x_1, x_2)$ per la quale l'origine del sistema è globalmente asintoticamente stabile;
- 3.B** Si realizzi in ambiente Matlab/Simulink una simulazione del sistema chiuso in anello con il controllore progettato al punto precedente.

Soluzione

Esercizio 1.

1.A Al fine di analizzare la raggiungibilità e la stabilizzabilità del sistema linearizzato si consideri la matrice di raggiungibilità

$$R = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad A^4B \quad A^5B] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 & -\frac{Jk^2+g^2m^3}{J^2km} & 0 & \frac{g^2m(-2J-\frac{g^2m^3}{k^2})}{J^3} \\ 0 & \frac{1}{J} & 0 & \frac{g^2m^2}{J^2k} & 0 & \frac{g^2m(J+\frac{g^2m^3}{k^2})}{J^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{J} & 0 & -\frac{Jk^2+g^2m^3}{J^2km} & 0 & \frac{g^2m(-2J-\frac{g^2m^3}{k^2})}{J^3} & 0 \\ \frac{1}{J} & 0 & \frac{g^2m^2}{J^2k} & 0 & \frac{g^2m(J+\frac{g^2m^3}{k^2})}{J^3} & 0 \end{bmatrix},$$

la quale, poichè possiede due righe nulle, ha rango pari a 4 per qualunque valore assunto dai parametri che compaiono purchè positivi e diversi da zero. Questo significa che non tutto lo spazio di stato risulterà raggiungibile. Infatti, il sottospazio raggiungibile si riduce a quello descritto dai vettori della base

$$T_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

scelti opportunamente tra gli elementi della base canonica in \mathbb{R}^6 . Fisicamente ciò significa che, agendo attraverso la coppia τ , è possibile controllare la posizione e la velocità del disco, e la posizione e la velocità angolare della massa m , mentre non è possibile fare altrettanto per la posizione ρ e la velocità $\dot{\rho}$ della massa m .

Sia poi $T_N \in \mathbb{R}^6$ una matrice di base complementare. Nelle nuove coordinate descritte da

$$x = Tz = [T_R \mid T_N] \begin{bmatrix} z_R \\ z_N \end{bmatrix},$$

ovvero, essendo T una matrice di permutazione, $z =$, il sistema diviene $Dz = T^{-1}ATz + T^{-1}B$, ovvero

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g^2m^2}{Jk} & -\frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{g^2m^2}{Jk} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D z_R \\ D z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_R & A_{RN} \\ 0 & A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_R \\ z_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_R \\ 0 \end{bmatrix} \tau =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g^2m^2}{Jk} & -\frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{g^2m^2}{Jk} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_R \\ z_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tau$$

dove $z_R \in \mathbb{R}^4$ e $z_N \in \mathbb{R}^2$.

È a questo punto facile osservare che il sottosistema formato dalle variabili $x_1 = \rho$ e $x_4 = \dot{\rho}$, che non sono raggiungibili, è caratterizzato dalla matrice dinamica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix},$$

che possiede due autovalori con parte reale negativa. Pertanto, il sistema linearizzato e quello originale non sono completamente raggiungibili, ma sono comunque stabilizzabili.

1.B Si consideri il caso in cui si dispone di un sensore che misura la posizione del carrello $y_1 = \rho \cos \alpha$. In tal caso, la matrice di uscita del sistema linearizzato calcolata in corrispondenza dell'equilibrio risulta essere $C_1 = [0 \quad \frac{gm}{K} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ e la corrispondente matrice di osservabilità risulta data da

$$O_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{gm}{k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{gm}{k} & 0 \\ 0 & \frac{g^3 m^3}{Jk^2} & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g^3 m^3}{Jk^2} & -g \\ 0 & \frac{g^3 Jk^2 m^2 + g^5 m^5}{J^2 k^3} & -\frac{g^3 m^2}{Jk} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g^3 Jk^2 m^2 + g^5 m^5}{J^2 k^3} & -\frac{g^3 m^2}{Jk} \end{bmatrix}.$$

Essendo il rango di O_1 pari a 4, esiste un sottospazio non osservabile che può essere descritto dai vettori dalla base

$$T_O^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto, misurando la posizione del carrello, non è possibile ricostruire la posizione ρ e la velocità $\dot{\rho}$ della massa m . La matrice di trasformazione T che porta il sistema nella forma standard di osservabilità è identica a quella utilizzata per porre il sistema in forma standard di controllabilità. Pertanto, il sottosistema formato dalle variabili $x_1 = \rho$ e $x_4 = \dot{\rho}$, che non sono osservabili da y_1 oltre a non essere raggiungibili dall'ingresso τ , è identico a quello associato alle variabili non raggiungibili e i suoi autovalori sono a parte reale negativa. Il sistema risulta quindi detettabile.

Si consideri adesso come uscita di misura la distanza della massa m dall'asse x_R , ovvero $y_2 = \rho \sin \alpha$. In tal caso, la matrice di uscita del sistema linearizzato calcolata in corrispondenza dell'equilibrio risulta essere $C_2 = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ e la corrispondente matrice di osservabilità risulta data da

$$O_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & 0 & 0 & \frac{\beta}{m} & 0 & 0 \\ -\frac{k\beta}{m^2} & 0 & 0 & \frac{km - \beta^2}{m^2} & 0 & 0 \\ \frac{k(-km + \beta^2)}{m^3} & 0 & 0 & \frac{-2km\beta + \beta^3}{m^3} & 0 & 0 \\ \frac{k(2km\beta - \beta^3)}{m^4} & 0 & 0 & \frac{-k^2 m^2 - 3km\beta^2 + \beta^4}{m^4} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Essendo il rango di O_2 pari a 2, esiste un sottospazio non osservabile che può essere descritto dai vettori dalla base

$$T_O^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto, misurando la distanza della massa dall'asse x_R , non è possibile ricostruire la posizione angolare θ e la velocità angolare $\dot{\theta}$ del disco e la posizione angolare α e la velocità angolare $\dot{\alpha}$ della massa. Da un'analisi della base T_O^2 e della sua complementare, si deduce che il sottosistema formato

dalle variabili $x_2 = \theta$, $x_3 = \dot{\theta}$, $x_5 = \alpha$ e $x_6 = \dot{\alpha}$, che non sono osservabili, ha una matrice dinamica associata del tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{g^2 m^2}{Jk} \\ 0 & 0 & -\frac{k}{m} & \frac{g^2 m^2}{Jk} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con autovalori anche a parte reale positiva. Il sistema risulta quindi non detettabile.

Infine, si consideri il caso in cui si dispone di un sensore che misura la posizione angolare del disco $y_3 = \theta$. In tal caso, la matrice di uscita del sistema linearizzato calcolata in corrispondenza dell'equilibrio risulta essere $C_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ e la corrispondente matrice di osservabilità risulta data da

$$O_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{g^2 m^2}{Jk} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{g^2 m^2}{Jk} & 0 \\ 0 & -\frac{g^4 m^4}{J^2 k^2} & \frac{g^2 m}{J} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{g^4 m^4}{J^2 k^2} & \frac{g^2 m}{J} \end{bmatrix}.$$

Essendo il rango di O_3 pari a 4, esiste un sottospazio non osservabile che può essere descritto dai vettori della base

$$T_{\bar{O}}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto, misurando la posizione angolare del disco, non è possibile ricostruire la posizione ρ e la velocità $\dot{\rho}$ della massa m . Similmente al caso in cui l'uscita di misura era y_1 , anche qui si può concludere sulla detettabilità del sistema.

1.C Ai fini del progetto del regolatore, analizziamo numericamente le proprietà di raggiungibilità e osservabilità del sistema con ingresso τ e uscita di misura della coordinata x_R della massa m . Le matrici numeriche del sistema sono

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \quad \tilde{y} = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \tilde{q},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9.81 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1.23 & -9.81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.23 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.0625 \\ 0.0625 \end{bmatrix} \tilde{u},$$

dove $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [\rho - \bar{\rho}, \alpha - \bar{\alpha}, \theta - \bar{\theta}, \dot{\rho}, \dot{\alpha}, \dot{\theta}]^T$ e $\tilde{u} = \tau$. Inoltre, gli autovalori del sistema sono $\lambda = [-2 + j2.41, -2 - j2.41, -2.0335, 2.0335, j1.7, -j1.7]$, dai quali si evince che il sistema risulta anche instabile.

La matrice di raggiungibilità è

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.06 & 0 & -0.69 & 0 & -1.6 \\ 0 & 0.06 & 0 & 0.077 & 0 & 0.85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.06 & 0 & -0.69 & 0 & -1.6 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0.076 & 0 & 0.85 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui rango è pari a 4, quindi il sistema non è completamente raggiungibile, mentre la matrice di osservabilità è

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1.23 & -9.81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.23 & -9.81 \\ 0 & 13.5 & -12.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13.5 & -12.03 \end{bmatrix},$$

il cui rango è ancora 4, quindi il sistema non è neanche completamente osservabile, come tra l'altro è stato già studiato simbolicamente.

Ai fini del progetto di un del regolatore è necessario considerare soltanto il sottosistema raggiungibile e osservabile, ovvero il sottosistema caratterizzato dalle seguenti matrici¹:

$$A_{R,O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1.23 \\ 0 & 0 & -9.81 & 1.23 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{R,O} = \begin{bmatrix} 0.0625 \\ -0.0625 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_{R,O} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1].$$

La matrice di retroazione K degli stati stimati associati al sottosistema completamente raggiungibile e osservabile può essere calcolata in modo tale da allocare i poli della matrice $A_{R,O} - B_{R,O}K$ in $p = [-2 \quad -3 \quad -4 \quad -5]$. Utilizzando il comando `Matlab Kro = place(Aro,Bro,p)` si ottiene:

$$K = [-27.17 \quad -251.17 \quad 940.28 \quad -215.34]$$

Poichè non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta detettabile, si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire le variabili associate al sottosistema osservabile. La matrice L di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore $A_{R,O} - LC_{R,O}$, dove $C_{R,O}$ è la matrice delle uscite associata al sottosistema osservabile, abbia autovalori in $q = 2p$. Sempre impiegando il comando `Matlab L = transpose(place(Aro',Cro',q))` si ottiene:

$$L = 10^4 [-196.94 \quad 285.23 \quad -125.59 \quad 28]^T.$$

Seguendo la convenzione di `Matlab` sui segni nelle retroazioni, uno schema `Simulink` del regolatore appena progettato è riportato in figura 2. Inoltre, la f.d.t. del sistema chiuso in retroazione è

$$G(s) = -\frac{0.0625(s^2 + 9.81)}{(s+5)(s+4)(s+3)(s+2)}$$

che coincide con quella ottenuta dalla retroazione degli stati effettivi: l'utilizzo degli stati stimati non ha effetti da questo punto di vista. Infine, in figura 2 sono riportati gli andamenti a zero della posizione del carrello a partire da due condizioni iniziali diverse.

1.D Per ciò che riguarda la sintesi di un compensatore basato su regolatore, la cui dinamica è data da $K(sI - A_{ro} + B_{ro}K + LC_{ro})^{-1}L$, si costruisce con il comando `rsys = ss(Aro - Bro*K - L*Cro, L, K, 0)` ovvero, a meno di un segno, con `rsys = reg(Sys, K, L)`, ove $Sys = ss(Aro, Bro, Cro, 0)$.

Uno schema `Simulink` per la simulazione del sistema linearizzato nell'origine con il compensatore basato sul regolatore appena progettato è riportato in figura 4. Nelle figure 5a e 5b sono riportati gli andamenti della posizione del carrello y_1 a partire da due condizioni iniziali diverse.

Inoltre, la funzione di trasferimento complessiva del sistema così realizzato è

$$Gc(s) = -\frac{11900.33(s+2.033)(s^2+0.9273s+1.45)(s^2+9.81)}{(s+10)(s+8)(s+6)(s+5)(s+4)^2(s+3)(s+2)}$$

e, come si può notare, possiede sia i poli del controllore, allocati con la scelta della matrice di retroazione K sia quelli dello stimatore allocati con la matrice di iniezione delle uscite L . Gli zeri invece non sono altro che l'insieme costituito dagli zeri del sistema e gli zeri del controllore.

¹Tale sistema può essere ottenuto in seguito ad una decomposizione di Kalman utilizzando come matrice di trasformazione $T = [T_R \quad T_O]$.

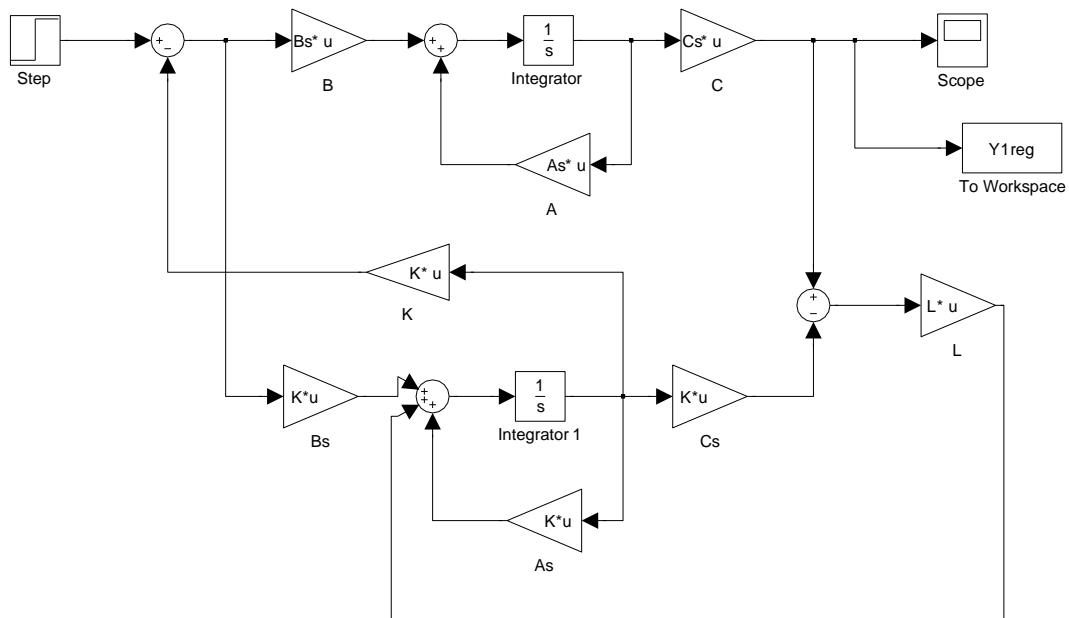
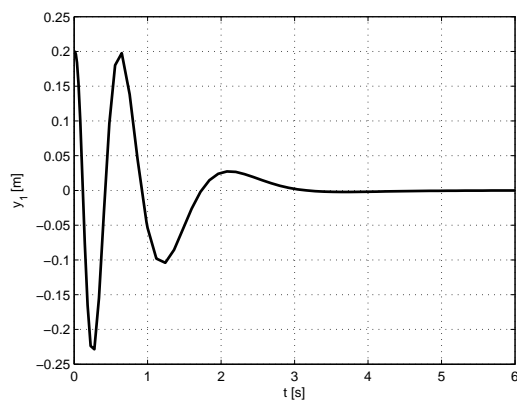
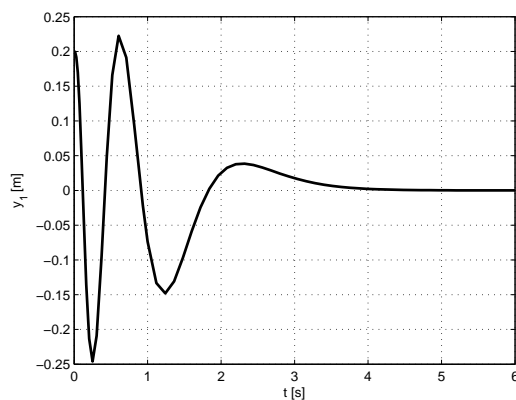


Figure 2: Schema Simulink del sistema linearizzato chiuso in retroazione con un regolatore costituito da un osservatore identità e retroazione statica degli stati.



(a) Andamento dell'uscita a partire da $\tilde{x}_0 = (0.200000)$ e con riferimento a gradino nullo.



(b) Andamento dell'uscita a partire da $\tilde{x}_0 = (0.20.10.2000)$ e con riferimento a gradino nullo.

Figure 3: Andamenti a zero dell'uscita.

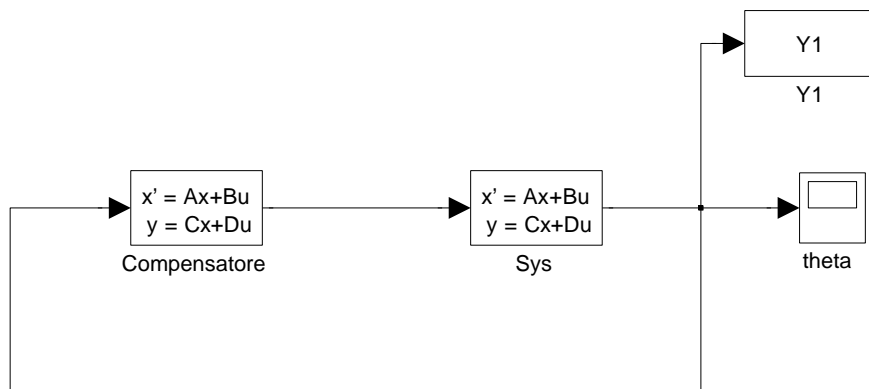
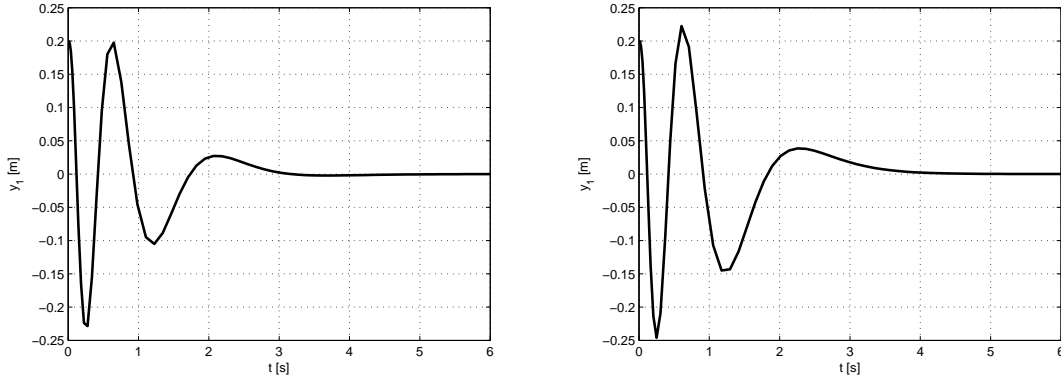


Figure 4: Montaggio del compensatore.



(a) Andamento dell'uscita a partire da $\tilde{x}_0 = (0.200000)$. (b) Andamento dell'uscita a partire da $\tilde{x}_0 = (0.20.10.2000)$.

Figure 5: Andamenti dell'uscita con schema di montaggio riportato in figura 4.

Esercizio 2.

2.A Imponendo le condizioni di equilibrio si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= -3\bar{x}_1 + \bar{x}_1^3 + \bar{x}_2 \\ 0 &= \bar{x}_1 - a\bar{x}_2, \end{aligned}$$

da cui si ricavano i seguenti equilibri:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 0, \\ \bar{x}_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = \pm \sqrt{\frac{3a-1}{a}}, \\ \bar{x}_2 = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{3a-1}{a}}. \end{cases}$$

Ponendo $a = 1$, l'equilibrio nell'origine rimane invariato, gli altri due diventano

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \pm\sqrt{2}, \\ \bar{x}_2 = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Al fine di studiare la stabilità, si consideri la matrice dinamica associata al sistema linearizzato, ovvero

$$A_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} = \begin{bmatrix} -3 + 3\bar{x}_1^2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcolando la matrice nei vari equilibri, si ottengono le seguenti matrici:

$$A_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{(\sqrt{2}, \sqrt{2})} = A_{(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

i cui polinomi caratteristici sono $\lambda^2 + 4\lambda + 2$ e $\lambda^2 - 2\lambda - 4$, rispettivamente, da cui si deduce che, per il sistema non lineare, l'origine è localmente asintoticamente stabile mentre gli altri due localmente instabili.

2.B Al fine di determinare una legge di controllo per il sistema non lineare che renda l'origine globalmente asintoticamente stabile, qualunque sia il valore assunto dal parametro reale a , si consideri la seguente candidata di Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}.$$

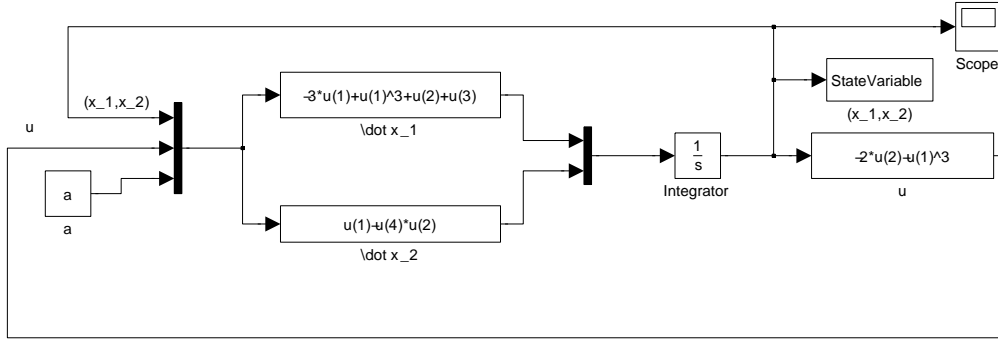


Figure 6: Schema di montaggio per la simulazione del sistema non lineare con retroazione $u = -2x_2 - x_1^3$.

Derivando V rispetto al tempo si ottiene

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = x_1(-3x_1 + x_1^3 + x_2 + u) + x_2(x_1 - ax_2) = -3x_1^2 + x_1^4 + 2x_1x_2 + x_1u - ax_2^2,$$

e scegliendo $u = -2x_2 - x_1^3$ si ottiene,

$$\dot{V} = -3x_1^2 - ax_2^2.$$

Se $a > 0$ allora $\dot{V} < 0$ e si può concludere sulla globale asintotica stabilità dell'origine. Se invece $a < 0$, allora \dot{V} non è definita in segno. Nel caso in cui $a = 0$, allora $\dot{V} \leq 0$ ovvero semi definita negativa. L'insieme dei punti per cui \dot{V} si annulla è dato da $R_o = \{x_1 = 0, \forall x_2\}$. Gli insiemi invarianti in R_o , ottenuti per sostituzione nella dinamica delle condizioni che definiscono R_o stesso, si riducono all'equilibrio $M = \{(x_1, x_2) | x_1 = 0, x_2 = 0\}$.

Per applicare il teorema di Lasalle, si consideri l'insieme $\Omega_\ell = \{x | V(x_1, x_2) < \ell\}$ con ℓ tale che $\dot{V} < 0$. L'insieme Ω_ℓ contiene il solo punto di equilibrio, come si osserva intersecando M con Ω_ℓ . Quindi per il corollario di Krasovskii, l'origine risulta asintoticamente stabile anche per $a = 0$. Essendo poi V radialmente illimitata, si può concludere sulla globale asintotica stabilità dell'equilibrio.

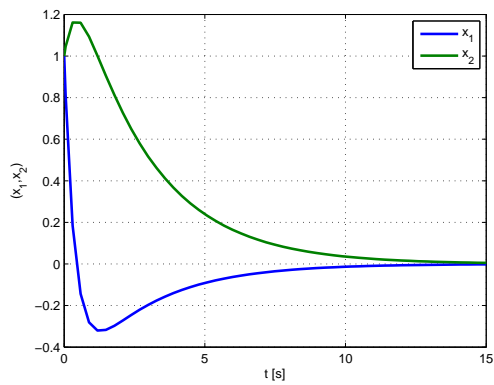
Infine, si noti che, sostituendo il controllore appena trovato nel sistema, si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - ax_2, \end{aligned}$$

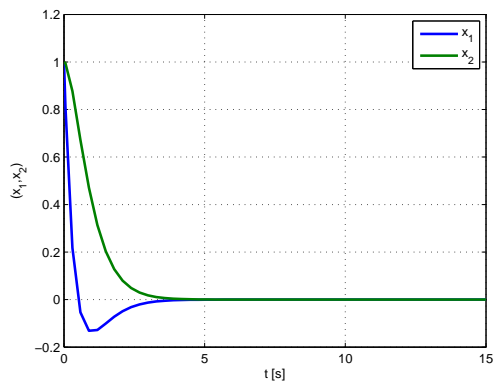
che risulta lineare. Gli autovalori di tale matrice sono a parte reale negativa per $a \geq 0$ e a parte reale positiva per $a < 0$. Questo significa che con il controllore progettato, per $a < 0$ l'origine risulta instabile.

3.B Uno schema `Simulink` utilizzabile per la simulazione del sistema non lineare chiuso in retroazione con il controllore progettato al punto precedente è riportato in figura 6.

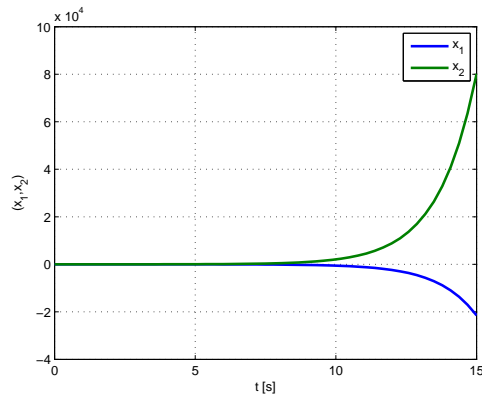
Nelle figure 7a, 7b e 7c sono riportati gli andamenti delle due variabili di stato per $a = 0$, $a = 1$ e $a = -1$, rispettivamente.



(a) Andamento dello stato (x_1, x_2) a partire da $x(0) = (1\ 1)^T$ e con $a = 0$.



(b) Andamento dello stato (x_1, x_2) a partire da $x(0) = (1\ 1)^T$ e con $a = 1$.



(c) Andamento dello stato (x_1, x_2) a partire da $x(0) = (1\ 1)^T$ e con $a = 1$.

Figure 7: Andamenti dell'uscita con schema di montaggio riportato in figura 6 e per diversi valori di a .