

Esercizio 1.

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 1. Esso è costituito da una sfera di massa m posta all'interno di un cilindro cavo e di massa trascurabile posto trasversalmente all'estremità di un'asta di inerzia $J = 2m\ell^2$ e lunghezza ℓ . L'asta è fissata ad una cerniera priva di attrito, mentre la massa è collegata con una molla di costante elastica K in corrispondenza del punto O e può muoversi lungo le pareti interne del cilindro che oppongono un attrito viscoso caratterizzato da un coefficiente β . Il dispositivo è attuato per mezzo di una coppia di controllo τ . Indicando con x l'elongazione della molla rispetto al punto O e con θ l'angolo di rotazione dell'asta rispetto alla posizione di riferimento, la dinamica del sistema nel piano verticale è descritta dalle equazioni

$$B \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Kx - mg \sin \theta - \beta \dot{x} \\ -mg(x \cos \theta - \ell \sin \theta) + \tau \end{bmatrix}$$

dove

$$B^{-1} = \frac{1}{2m\ell^2} \begin{bmatrix} 3\ell^2 & -\ell \\ -\ell & 1 \end{bmatrix}.$$

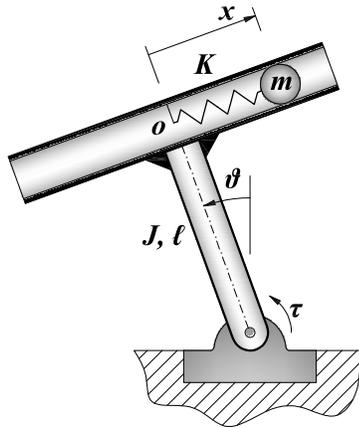


Figure 1: Schema meccanico del sistema.

Qualora si consideri il sistema nel piano orizzontale, la dinamica è ottenuta semplicemente ponendo $g = 0$.

- 1.A** Si determinino i punti di equilibrio del sistema corrispondenti ad una coppia di ingresso nulla ($\bar{\tau} = 0$) e si determini il sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio con $\theta = 0$;
- 1.B** Si discutano la osservabilità e la dettabilità del sistema linearizzato calcolato al punto precedente al variare dei parametri del sistema, considerando alternativamente i casi $g = 0$ e con $g \neq 0$, e θ e x come misure. Si dia una interpretazione fisica dei risultati ottenuti.

Si considerino adesso i seguenti valori numerici: $m = 0.5$ Kg, $\ell = 1$ m, $K = 2$ N/m, $b = 8$ Ns/m, $g = 9.81$ m/s².

- 1.C** Si progetti un compensatore basato su regolatore, che, per mezzo dell'ingresso τ ed usando la misura dell'uscita θ , sia in grado di stabilizzare asintoticamente la posizione angolare θ del sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio, garantendo le seguenti specifiche:
 - errore nullo a regime per riferimento a gradino;
 - tempo di assestamento al 5% inferiore a 1.5 s.
- 1.D** Si realizzi in ambiente Matlab/Simulink una simulazione del sistema linearizzato chiuso in anello con il regolatore progettato al passo precedente, verificando il soddisfacimento delle specifiche;
- 1.E** Si effettui una simulazione del sistema originale chiuso in anello con il regolatore progettato, realizzando separatamente la dinamica non lineare del sistema di partenza.

Esercizio 2.

Si consideri il seguente sistema dinamico non lineare tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 - x_1^3 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -2a^2x_2 - 2x_1x_2,\end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

2.A Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$;

2.B Si studi, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la stabilità dell'equilibrio nell'origine utilizzando eventualmente la seguente famiglia di funzioni: $V_k(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{k}{2}x_2^2$, con $k \in \mathbb{R}$ e $k > 0$.

Soluzione

Esercizio 1.

A Il sistema è descritto da due variabili di stato: la posizione x della massa all'interno del cilindro rispetto al punto O in cui è fissata per mezzo della molla, e la posizione angolare θ dell'asta di lunghezza ℓ rispetto alla verticale. Essendo l'equilibrio con ingresso τ nullo, caratterizzato da $\dot{x} = \dot{\theta} = 0$ così come le loro derivate, sostituendo nelle equazioni dinamiche, si ottiene

$$\begin{cases} 0 = -Kx - mg \sin \theta \\ 0 = -mg(x \cos \theta - \ell \sin \theta) . \end{cases}$$

Ricavando la variabile x dalla prima equazione e sostituendo nella seconda e semplificando opportunamente, si ha

$$\begin{cases} x = -\frac{mg}{K} \sin \theta \\ 0 = \sin \theta \left(\frac{mg}{K} \cos \theta + \ell \right) . \end{cases}$$

L'analisi di queste due ultime equazioni permette di concludere che gli equilibri del sistema sono complessivamente quattro e, indicando con $q = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]^T$ il vettore delle variabili di stato che caratterizzano il sistema, sono:

$$\begin{cases} \bar{q}_a = [0, 0, 0, 0]^T; \\ \bar{q}_b = [0, \pi, 0, 0]^T; \\ \bar{q}_c = \left[-\frac{\sqrt{m^2 g^2 - K^2 \ell^2}}{K}, \arccos\left(-\frac{K\ell}{mg}\right), 0, 0 \right]^T; \\ \bar{q}_d = \left[\frac{\sqrt{m^2 g^2 - K^2 \ell^2}}{K}, -\arccos\left(-\frac{K\ell}{mg}\right), 0, 0 \right]^T . \end{cases}$$

L'esistenza degli equilibri \bar{q}_c e \bar{q}_d è legata ai valori assunti dai parametri, cioè solo se $K\ell \leq mg$.

Detto $\tilde{q} = [q_1 - \bar{q}_1, q_2 - \bar{q}_2, q_3, q_4]^T$ il vettore delle variabili di stato traslate nel generico equilibrio \bar{q} e $\tilde{u} = \tau$ il corrispondente ingresso, il sistema non lineare scritto in variabili traslate è

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}}_1 &= \tilde{q}_3 \\ \dot{\tilde{q}}_2 &= \tilde{q}_4 \\ \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_3 \\ \dot{\tilde{q}}_4 \end{bmatrix} &= M^{-1} \begin{bmatrix} -K(\tilde{q}_1 + \bar{q}_1) - mg \sin(\tilde{q}_2 + \bar{q}_2) - \beta(\tilde{q}_3 + \bar{q}_3) \\ -mg[(\tilde{q}_1 + \bar{q}_1) \cos(\tilde{q}_2 + \bar{q}_2) - \ell \sin(\tilde{q}_2 + \bar{q}_2)] + \tilde{u} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il linearizzato scritto in forma di stato, invece, è

$$\dot{\tilde{q}} = A\tilde{q} + B\tilde{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix} \tilde{q} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix} \tilde{u}$$

dove,

$$\begin{aligned} a_{31} &= \frac{-3K\ell + mg \cos \bar{q}_2}{2m\ell}, & a_{32} &= -\frac{g}{2\ell} (4\ell \cos \bar{q}_2 + \bar{q}_1 \sin \bar{q}_2), & a_{33} &= -\frac{3\beta}{2m} \\ a_{41} &= \frac{K\ell - mg \cos \bar{q}_2}{2m\ell^2}, & a_{42} &= \frac{g}{2\ell^2} (2\ell \cos \bar{q}_2 + \bar{q}_1 \sin \bar{q}_2), & a_{43} &= \frac{\beta}{2m\ell}, \\ b_{31} &= -\frac{1}{2m\ell}, & b_{41} &= \frac{1}{2m\ell^2}. \end{aligned}$$

In corrispondenza dell'equilibrio \bar{q}_a , i coefficienti delle matrici A e B diventano

$$\begin{aligned}
a_{31} &= \frac{mg - 3K\ell}{2m\ell}, & a_{32} &= -2g, & a_{33} &= -\frac{3\beta}{2m} \\
a_{41} &= \frac{K\ell - mg}{2m\ell^2}, & a_{42} &= \frac{g}{\ell}, & a_{43} &= \frac{\beta}{2m\ell}, \\
b_{31} &= -\frac{1}{2m\ell}, & b_{41} &= \frac{1}{2m\ell^2}.
\end{aligned}$$

ovvero,

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{mg-3K\ell}{2m\ell} & -2g & -\frac{3\beta}{2m} & 0 \\ \frac{K\ell-mg}{2m\ell^2} & \frac{g}{\ell} & \frac{\beta}{2m\ell} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_a = \frac{1}{2m\ell^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ell \\ 1 \end{bmatrix}$$

B Al fine di analizzare la osservabilità del sistema linearizzato calcolato al punto precedente rispetto alle sue uscite di misura x e θ , si considerino le seguenti matrici delle uscite:

$$\begin{aligned}
C_1 &= [1 \ 0 \ 0 \ 0], \\
C_2 &= [0 \ 1 \ 0 \ 0].
\end{aligned}$$

La matrice di osservabilità nel primo caso risulta:

$$O_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{mg-3K\ell}{2m\ell} & -2g & -\frac{3\beta}{2m} & 0 \\ -\frac{3\beta}{2m} \left(\frac{K\ell-mg}{2m\ell^2} \right) & \frac{3\beta g}{m} & \frac{mg-3K\ell}{2m\ell} + \frac{3\beta^2}{2m^2} & -2g \end{bmatrix},$$

il cui determinante, facilmente calcolabile, è pari a $-4g^2$. Questo equivale a dire che, se il dispositivo meccanico fosse utilizzato su di un piano orizzontale in maniera tale che la gravità sia bilanciata dalle reazioni vincolari, allora la matrice di osservabilità diviene:

$$O_1|_{g=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3K}{2m} & 0 & -\frac{3\beta}{2m} & 0 \\ -\frac{\beta K}{2m^2\ell} & 0 & -\frac{3K\ell}{2m\ell} + \frac{3\beta^2}{2m^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Essendo il rango di $O_1|_{g=0}$ pari a 2, esiste un sottospazio inosservabile che può essere descritto dai vettori della base

$$T_{O_1|_{g=0}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pertanto, misurando la posizione della massa, non è possibile ricostruire la posizione e la velocità angolari del cilindro. D'altra parte, si consideri la matrice dinamica del sistema A_a calcolata in $g = 0$:

$$A_a|_{g=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3K\ell}{2m\ell} & 0 & -\frac{3\beta}{2m} & 0 \\ \frac{K\ell}{2m\ell^2} & 0 & \frac{\beta}{2m\ell} & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di trasformazione T in grado di portare il sistema in forma standard di osservabilità è

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ottenendo,

$$A_a|_{g=0} = T^{-1}A_aT = \begin{bmatrix} A_{aO} & 0 \\ A_{aO\bar{O}} & A_{a\bar{O}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3K\ell}{2m\ell} & -\frac{3\beta}{2m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K\ell}{2m\ell^2} & \frac{\beta}{2m\ell} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si osserva che $A_{a\bar{O}}$ genera modi instabili e quindi il sistema non è detettabile.

Si consideri adesso l'altra uscita di misura, ovvero θ . La matrice di osservabilità calcolata utilizzando C_2 come matrice delle uscite è

$$O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K\ell-mg}{2m\ell^2} & \frac{g}{\ell} & \frac{\beta}{2m\ell} & 0 \\ -\frac{\beta}{2m\ell} \left(\frac{K\ell-mg}{2m\ell} \right) & -\frac{\beta g}{m\ell} & \frac{K\ell-mg}{2m\ell^2} - \frac{3\beta^2}{4m^2\ell} & \frac{g}{\ell} \end{bmatrix}$$

il cui determinante è pari a $g^2m^2 - \ell(\beta^2 + 2Km)g + K^2\ell^2 = 0$, ed ipotizzando $\ell \neq 0$, $K \neq 0$, $m \neq 0$ e $\beta \neq 0$, le uniche soluzioni sono

$$g_{1,2} = \frac{(\beta^2\ell + 2Km\ell) \pm \beta\ell\sqrt{(\beta^2 + 4Km)}}{2m^2}.$$

Si può verificare che le soluzioni sono entrambe positive per qualsiasi valore positivo dei parametri meccanici del sistema. Pertanto, esistono valori realistici per g che rendono il sistema non completamente osservabile anche a partire dalle misure di θ .

1.C Ai fini del progetto del regolatore, analizziamo numericamente le proprietà di raggiungibilità e osservabilità del sistema con ingresso τ e uscita di misura θ nel caso in cui il sistema meccanico lavori in un piano verticale, ovvero $g \neq 0$. Le matrici numeriche del sistema sono

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} &= A\tilde{q} + B\tilde{u} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -19.62 & -19.62 & -0.75 & 0 \\ 0 & 9.81 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \tilde{q} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{u}, \\ \tilde{y} &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \tilde{q}, \end{aligned}$$

dove $\tilde{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]^T$ e $\tilde{u} = \tau$. Inoltre, gli autovalori del sistema sono $\lambda = [-1.14 + j2.78, -1.14 - j2.78, -11.57, 1.84]$, dai quali si evince che il sistema risulta anche instabile.

La matrice di raggiungibilità è

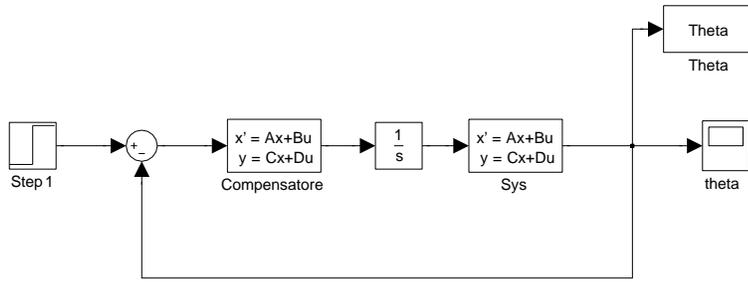
$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0.75 & -0.56 \\ 0 & 1 & -0.5 & 10.19 \\ -1 & 0.75 & -0.56 & -4.48 \\ 1 & -0.5 & 10.19 & -5.19 \end{bmatrix}$$

il cui rango è massimo, quindi il sistema è completamente raggiungibile, mentre la matrice di osservabilità è

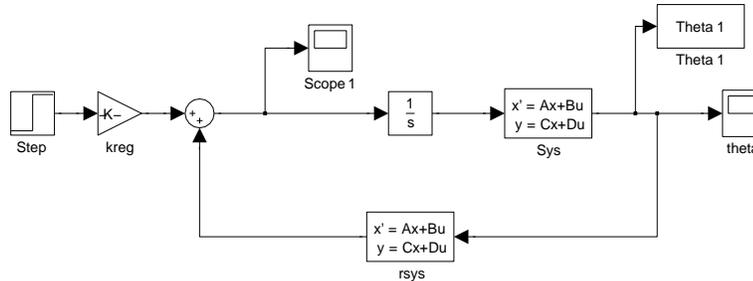
$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9.81 & 0.5 & 0 \\ -9.81 & -9.81 & -0.38 & 9.81 \end{bmatrix},$$

il cui rango è massimo, quindi il sistema è anche completamente osservabile.

Il soddisfacimento delle specifiche comportano in primo luogo l'inserimento di un polo nell'origine, in quanto il sistema non ne possiede già uno. La specifica sul tempo di assestamento si riflette sulla posizione dei poli dominanti sul piano complesso. In altre parole, si deve garantire che la parte reale dei poli sia inferiore a $-3/T_a = -2$.



(a) Montaggio del compensatore in catena diretta.



(b) Montaggio del compensatore in retroazione.

Figure 2: Schemi di montaggio.

In definitiva, scegliendo i poli del sistema in $p = [-5 \ -9 \ -10 \ -11 \ -12]^T$, una procedura per ottenere il compensatore basato su regolatore consiste nel calcolare preliminarmente la matrice K di retroazione degli stati in modo da allocare i poli della matrice $A_e - B_e K$ in p , dove A_e e B_e sono le matrici del sistema esteso, ottenuto aggiungendo il polo nell'origine necessario per rispettare la specifica sull'errore a regime. Utilizzando la funzione di Matlab $K = \text{place}(A_e, B_e, p)$, si ottiene:

$$K = 10^3 [3.03 \ 0.17 \ 1.25 \ -0.09 \ -0.055] .$$

Poichè non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile, si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice L di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore $A_e - LC_e$, dove C_e è la matrice delle uscite del sistema esteso, abbia autovalori in $q = 2p$. Sempre impiegando il comando Matlab $L = \text{transpose}(\text{place}(A_e', C_e', q))$ si ottiene:

$$L = 10^4 [0.0082 \ -0.8166 \ 0.2482 \ 1.4543 \ 3.2354]^T .$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica $K(sI - A_e + B_e K + LC_e)^{-1}L$, e si costruisce con il comando $\text{rsys} = \text{ss}(A_e - B_e K - L C_e, L, K, 0)$ ovvero, a meno di un segno, con $\text{rsys} = \text{reg}(\text{Syse}, K, L)$, ove $\text{Syse} = \text{ss}(A_e, B_e, C_e, 0)$. La sequenza di comandi Matlab necessari allo scopo è la seguente:

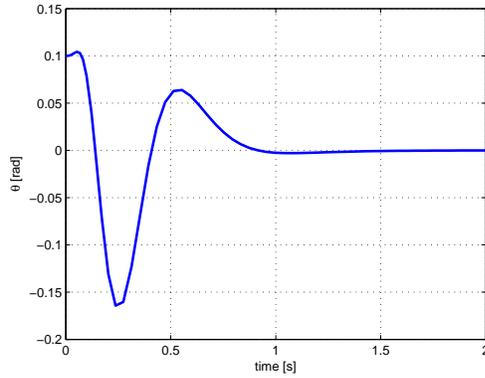
```

integrator = ss(1/tf('s'));
Syse = integrator * ss(A, B, C, 0);
p = [-5 -9 -10 -11 -12];
K = place(sys_e.a, sys_e.b, p);
q = 2*p;
L = place(sys_e.a', sys_e.c', q)';
rsys = reg(Syse, K, L);
kreg = -rsys.c * inv(-rsys.a) * rsys.b;

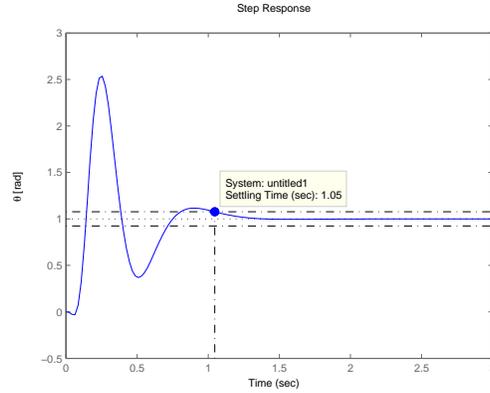
```

1.D Uno schema Simulink per la simulazione del sistema linearizzato nell'origine con il compensatore basato sul regolatore progettato al punto precedente, è riportato in figura 2a.

In figura 3a è riportato l'andamento dell'angolo θ a partire da condizioni iniziali pari a $q = [0.1 \ 0.1 \ 0 \ 0]^T$, mentre in figura 3b si può notare anche l'effetto di un ingresso a gradino unitario che

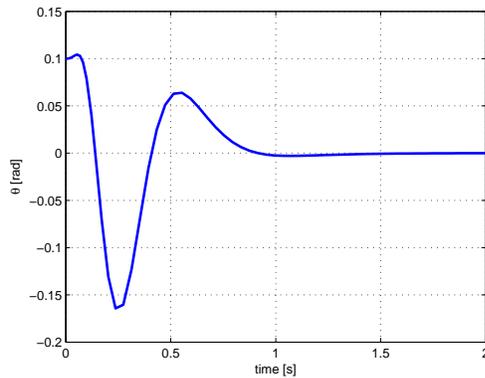


(a) Scostamento di θ dall'equilibrio

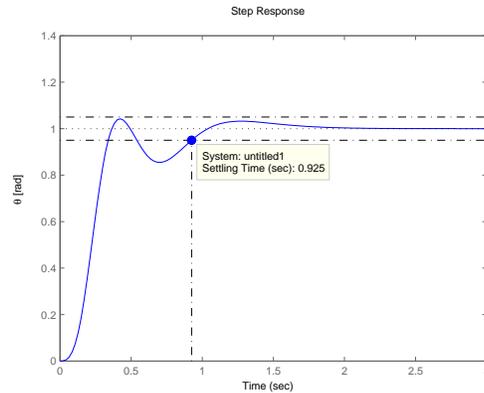


(b) Risposta al gradino unitario

Figure 3: Andamenti delle variabile θ con schema di montaggio riportato in figura 2a.



(a) Scostamento di θ dall'equilibrio



(b) Risposta al gradino unitario

Figure 4: Andamenti delle variabile θ con schema di montaggio riportato in figura 2b.

agisce all'istante $t = 0$ s. Inoltre, la funzione di trasferimento complessiva del sistema così realizzato è

$$G_c(s) = \frac{9480427699(s - 13.25)(s + 3.314)(s - 2.065)(s - 0.3842)(s^2 + 0.25s + 19.62)}{(s + 60)(s + 50)(s + 40)(s + 30)(s + 25)(s + 20)(s + 12)(s + 10)(s + 6)(s + 5)}$$

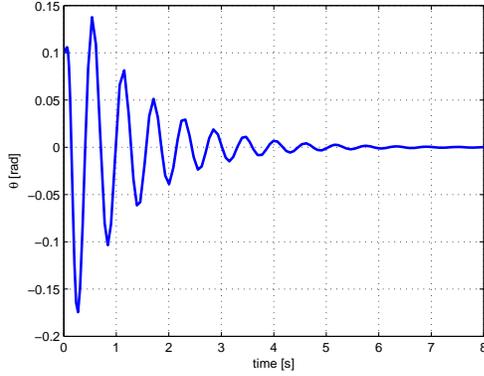
e, come si può notare, possiede sia i poli del controllore, allocati con la scelta della matrice di retroazione K sia quelli dello stimatore allocati con la matrice di iniezione delle uscite L . Gli zeri invece non sono altro che l'insieme costituito dagli zeri del sistema e gli zeri del controllore.

Un montaggio alternativo, consiste nel porre il compensatore nella catena di retroazione che deve essere positiva, ovvero secondo lo schema riportato in figura 2b. Le simulazioni sono invece riportate in figura 4. In tal caso la f.d.t. complessiva risulta

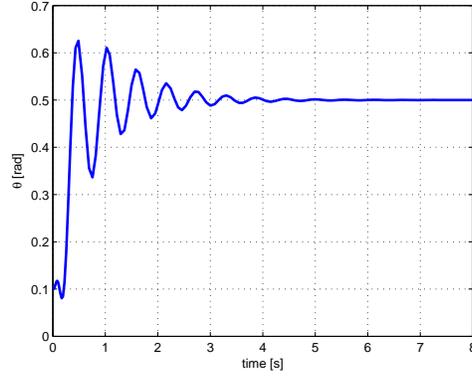
$$G_c(s) = \frac{(s - 12.61)(s^2 + 0.25s + 19.62)(s^2 + 571.8s + 1.31 \cdot 10^5)(s^2 - 301.9s + 7.3 \cdot 10^4)}{(s + 60)(s + 50)(s + 40)(s + 30)(s + 25)(s + 20)(s + 12)(s + 10)(s + 6)(s + 5)}$$

In tal caso, i poli coincidono esattamente con quelli associati al montaggio precedente, mentre gli zeri questa volta sono l'insieme costituito dagli zeri del sistema e i poli del controllore.

Di conseguenza, anche se dal punto di vista della stabilità i due montaggi risultano equivalenti, gli andamenti della variabile θ , nel caso in cui il riferimento sia diverso da zero, sono differenti nel transitorio e dipendono dalla tipologia e posizione degli zeri presenti. Le figure 3b e 4b mettono in evidenza le differenti evoluzioni della variabile θ per i due diversi montaggi con riferimento a gradino unitario.



(a) Problema di regolazione con condizioni iniziali $\theta_0 = 0.001$, $x_0 = 0.01$ e velocità nulle.



(b) Problema di controllo con gradino di ampiezza 0.5 rad e condizioni iniziali nulle.

Figure 6: Andamenti delle variabile θ con schema di montaggio riportato in figura 5.

Esercizio 2.

2.A Imponendo le condizioni di equilibrio si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= x_2^2 + x_1 (a - x_1^2) \\ 0 &= -2x_2 (x_1 + a^2), \end{aligned}$$

da cui si ricavano i seguenti equilibri:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} x_1 = \sqrt{a} \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\sqrt{a} \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} x_1 = -a^2 \\ x_2 = a\sqrt{a(1-a^3)} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -a^2 \\ x_2 = -a\sqrt{a(1-a^3)} \end{cases} \end{aligned}$$

2.B Il sistema non lineare espresso in variabili traslate $\tilde{x}_1 = x_1 - \bar{x}_1$ e $\tilde{x}_2 = x_2 - \bar{x}_2$ rispetto al generico equilibrio (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , è dato da

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= (\tilde{x}_2 + \bar{x}_2)^2 + (\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) (a - (\tilde{x}_1 + \bar{x}_1)^2) \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -2(\tilde{x}_2 + \bar{x}_2) (\tilde{x}_1 + \bar{x}_1 + a^2). \end{aligned}$$

Linearizzando rispetto a tale equilibrio si ha

$$A_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = \begin{bmatrix} a - 3\bar{x}_1^2 & 2\bar{x}_2 \\ -2\bar{x}_2 & -2(\bar{x}_1 + a^2) \end{bmatrix},$$

da cui, sostituendo l'origine come equilibrio si ottiene:

$$A_{00} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -2a^2 \end{bmatrix}.$$

Impiegando il metodo indiretto di Lyapunov, si deduce che l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile (il sistema è localmente un nodo stabile) se $a < 0$ mentre è instabile (il sistema è localmente un nodo instabile) se $a > 0$. Il caso $a = 0$ è inconcludente con il metodo indiretto di Lyapunov. Per valutarne le caratteristiche di stabilità del sistema in tal caso, si applica il metodo diretto di Lyapunov. Consideriamo quindi la funzione di Lyapunov suggerita nel testo,

$$V_k(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{k}{2}x_2^2, \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \text{ e } k > 0$$

che risulta essere globalmente definita positiva. Derivando V_k rispetto al tempo si ottiene,

$$\dot{V}_k(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 2\tilde{x}_1\dot{\tilde{x}}_1 + k\tilde{x}_2\dot{\tilde{x}}_2.$$

Sostituendo le equazioni che esprimono la dinamica del sistema calcolato nell'origine per $a = 0$, ovvero,

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_1^3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -2\tilde{x}_1\tilde{x}_2,\end{aligned}$$

si ottiene

$$\dot{V}_k(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 2\tilde{x}_1(\tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_1^3) - 2k\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2.$$

Ponendo $k = 1$,

$$\dot{V}_k(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = -2\tilde{x}_1^4.$$

da cui si deduce che $\dot{V} \leq 0$, ovvero semidefinita negativa. L'insieme dei punti per cui $\dot{V} = 0$ è dato dall'insieme $R = \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) : \tilde{x}_1 = 0\}$. Le traiettorie del sistema compatibili con la condizione $\tilde{x}_1 = 0$, ottenute per sostituzione nella dinamica del sistema stesso, si riducono ai punti caratterizzati da $\dot{\tilde{x}}_2 = \dot{\tilde{x}}_1 = 0$ e $x_2 = 0$, quindi, il massimo insieme invariante si riduce all'equilibrio stesso. Perciò, per Krasovskii il sistema convergerà asintoticamente ad esso. Inoltre, poichè la funzione di Lyapunov è radialmente illimitata, si può concludere sulla globale asintotica stabilità dell'origine con $a = 0$.