

Esercizio

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 1. Esso è costituito da un pendolo inverso di massa M e lunghezza R , soggetto all'accelerazione di gravità g e attuato attraverso un motore in grado di fornire una coppia τ . Il motore risulta caratterizzato dalla funzione di trasferimento tra la tensione di alimentazione v e la coppia di uscita τ indicata nella figura, con costanti $a, p, q > 0$ e $a \neq p \neq q$. Il pendolo risulta incernierato attraverso un giunto rotoidale, che oppone al moto del pendolo stesso una forza di attrito viscoso di costante β . Si supponga di disporre di un sensore che misura la velocità di rotazione del pendolo. Detto θ l'angolo compreso tra il piano orizzontale e il pendolo, la dinamica che ne descrive il moto risulta descritta da

$$\begin{cases} MR^2 \ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} + MgR \cos \theta = \tau, \\ y = \dot{\theta}. \end{cases}$$

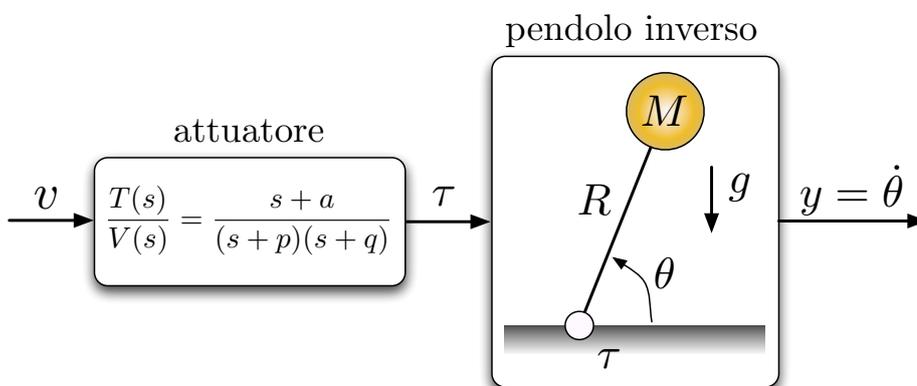


Figura 1: Schema meccanico del sistema

Si risponda ai seguenti quesiti:

- A** Si determinino i punti di equilibrio del sistema costituito dalla serie del pendolo e dell'attuatore, corrispondenti ad un valore costante \bar{v} della tensione di ingresso;
 - B** Si discuta la stabilità degli equilibri al variare della costante di attrito viscoso β mediante il metodo indiretto di Lyapunov, assumendo il valore $\bar{v} = \frac{MRpqg\sqrt{2}}{2a}$ per la tensione di ingresso dell'attuatore;
- Considerando l'equilibrio corrispondente all'angolo $\bar{\theta}$ più vicino alla posizione verticale superiore del pendolo, si risponda ai seguenti quesiti:
- C** Si discutano le proprietà di raggiungibilità e osservabilità al variare del parametro β del sistema lineare approssimato, $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{v}$, attorno all'equilibrio considerato;
 - D** Assumendo i valori numerici $M = 1$ Kg, $R = 0.4$ m, $g = 9.81$ m/s², $a = 2$, $p = 10$ e $q = 5$, si progetti una retroazione lineare K degli stati del sistema, in funzione del parametro β , in grado di allocare gli autovalori della matrice dinamica $A + BK$ nella posizione $(-10, -20, -30, -40)$;
 - E** Assumendo il valore numerico $\beta = 0.5$ Nm sec/rad, si progetti un regolatore basato su un osservatore asintotico dello stato e sulla retroazione lineare del passo precedente, che sia in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio;
 - F** Si realizzi in ambiente Matlab/Simulink una simulazione del sistema linearizzato chiuso in anello con il regolatore progettato al passo precedente;
 - G** Si effettui una simulazione del sistema originale chiuso in anello con il regolatore progettato, realizzando separatamente la dinamica non lineare del sistema di partenza.

Soluzione esercizio

A) Una realizzazione minima della funzione di trasferimento $T(s)/V(s)$ dell'attuatore è rappresentata dalla forma canonica di controllo

$$\Sigma_{att} : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -pq & -(p+q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v, \\ \tau = (a \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Inoltre, definendo $x_3 = \theta$ e $x_4 = \dot{\theta}$, la dinamica del pendolo può essere scritta nella forma di stato

$$\Sigma_{pend} : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ -\frac{g}{R} \cos(x_3) - \frac{\beta}{MR^2} x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{MR^2} \end{pmatrix} \tau. \\ y = x_4. \end{cases}$$

Pertanto, definendo lo stato complessivo $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, la dinamica della serie formata dall'attuatore e dal pendolo ammette la forma di stato non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -pq x_1 - (p+q) x_2 + v, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \frac{a}{MR^2} x_1 + \frac{1}{MR^2} x_2 - \frac{g}{R} \cos(x_3) - \frac{\beta}{MR^2} x_4, \\ y = x_4, \end{cases}$$

in cui si è sostituita alla coppia τ la sua espressione in funzione dello stato dell'attuatore.

Imponendo $\dot{x} = 0$ e assumendo una tensione di ingresso costante, $v = \bar{v}$, si ottengono gli equilibri

$$\bar{x} = \left(\frac{\bar{v}}{pq}, 0, \arccos\left(\frac{a\bar{v}}{MRpqg}\right), 0 \right)^T.$$

B) Al fine di studiare la stabilità del sistema nell'intorno del generico equilibrio $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$, si consideri la sua approssimazione lineare data da

$$\dot{\tilde{x}} = A \tilde{x} + B \tilde{v}, \quad \tilde{y} = C \tilde{x}$$

con

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -pq & -(p+q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{a}{MR^2} & \frac{1}{MR^2} & \frac{g}{R} \sin(\bar{x}_3) & -\frac{\beta}{MR^2} \end{array} \right), \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad 0 \mid 0 \quad 1).$$

Il polinomio caratteristico della matrice dinamica A risulta essere

$$\pi_A(s) = (s+p)(s+q)\pi(s), \quad \text{con } \pi(s) = \left(s^2 + s \frac{\beta}{MR^2} - \frac{g}{R} \sin(\bar{x}_3) \right),$$

che ammette come radici $s_1 = -p < 0$, $s_2 = -q < 0$ e i valori s_3 ed s_4 che risolvono $\pi(s) = 0$. Sostituendo il valore $\bar{v} = \frac{MRpqg\sqrt{2}}{2a}$ nell'espressione della terza componente dello stato all'equilibrio, si ricavano i due valori $\bar{x}_{3a} = \frac{\pi}{4} \pm 2\pi k$ e $\bar{x}_{3b} = -\frac{\pi}{4} \pm 2\pi k$, con k naturale.

Nel caso dell'equilibrio corrispondente a $\bar{x}_{3a} = \frac{\pi}{4}$ e per $\beta > 0$, $\pi(s)$ presenta una permanenza e una variazione di segno, il che consente di concludere che una delle sue soluzioni è positiva (secondo la regola di Cartesio) e quindi che l'equilibrio è instabile. Per $\beta = 0$ le soluzioni, calcolate direttamente, sono $s_3 = \sqrt{\frac{g\sqrt{2}}{2R}} > 0$ e $s_4 = -s_3$, che permette di concludere anche in questo caso per l'instabilità. Invece, per l'equilibrio corrispondente a $\bar{x}_{3b} = -\frac{\pi}{4}$ e per $\beta > 0$, $\pi(s)$ presenta due permanenze di segno che indicano due radici con parte reale negativa e quindi che l'equilibrio è stabile asintoticamente. Infine, per $\beta = 0$, le soluzioni sono $s_3 = i\sqrt{\frac{g\sqrt{2}}{2R}}$ e $s_4 = -s_3$, per cui il sistema linearizzato risulta meta-stabile, ma nulla si può dire sulla stabilità del sistema originale.

- C) Al fine di studiare la raggiungibilità del sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio $\bar{x}_a = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_{3a}, \bar{x}_4)$, si può procedere secondo la procedura usuale, calcolando la matrice di raggiungibilità

$$R = (B, AB, A^2B, A^3B)$$

e studiando per quali valori di β il suo determinante si annulla. In questo modo si ottiene

$$\det(R) = -\frac{2a\beta - 2MR^2a^2 + \sqrt{2}gR}{2M^3R^6} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{\beta} = \frac{MR(2Ra^2 - \sqrt{2}g)}{2a},$$

se $2Ra^2 - \sqrt{2}g \geq 0$ (che garantisce la non negatività di $\bar{\beta}$), mentre non esiste nessun valore altrimenti.

Alternativamente, si può sfruttare il fatto che il sistema complessivo è ottenuto dalla serie del sotto-sistema attuatore Σ_{att} e del sotto-sistema pendolo Σ_{pend} . La dinamica linearizzata del sistema pendolo è caratterizzata dalle matrici

$$A_{pend} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}g}{2R} & -\frac{\beta}{MR^2} \end{pmatrix}, \quad B_{pend} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_{pend} = (0 \quad 1)$$

e la corrispondente f.d.t. è

$$G_{pend}(s) = \frac{Y(s)}{T(s)} = C_{pend}(sI - A_{pend})^{-1}B_{pend} = \frac{s}{s^2 + \frac{\beta}{MR^2}s - \frac{\sqrt{2}g}{2R}}.$$

Essendo le due rappresentazioni minime, il sistema complessivo risulta raggiungibile se e solo se il numeratore della f.d.t. dell'attuatore non ha radici comuni con il denominatore della f.d.t. del pendolo $\frac{Y(s)}{T(s)}$. Le radici di quest'ultima sono gli autovalori della matrice dinamica relativa al solo sotto-sistema pendolo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}g}{2R} & -\frac{\beta}{MR^2} \end{pmatrix},$$

e valgono

$$s_{3,4} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 2\sqrt{2}gM^2R^3}}{2MR^2}.$$

Dunque il sistema perde di completa raggiungibilità quando lo zero dell'attuatore in $s = -a$ coincide con uno dei poli del pendolo, ovvero quando è vera la condizione

$$-a = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 2\sqrt{2}gM^2R^3}}{2MR^2}.$$

che risolta dà ovviamente la stessa soluzione $\bar{\beta}$.

Analogamente si può procedere per lo studio dell'osservabilità, calcolando la matrice di osservabilità O , il cui determinante

$$\det(O) = \frac{(a-p)(a-q)\sqrt{2}pqg}{2M^2R^5}$$

è sempre diverso da zero, il che garantisce la completa osservabilità dello stato per qualunque valore di β . Alternativamente, si può sfruttare il fatto che, nell'interconnessione serie dei due sistemi, si perde di osservabilità se e solo se si ha una cancellazione tra un polo della f.d.t. dell'attuatore e uno zero della f.d.t. del pendolo. Essendo $p, q \neq 0$, non si possono avere cancellazioni, il che garantisce che il sistema risulti sempre osservabile.

- D Si richiede di progettare una retroazione lineare $\tilde{u} = K\tilde{x}$, con $K = K(\beta) = (k_1, k_2, k_3, k_4)$, in modo che gli autovalori della matrice dinamica controllata siano allocati in $p = (-10, -20, -30, -40)$. Il valore di K si può ottenere imponendo l'uguaglianza tra il polinomio caratteristico desiderato

$$\hat{\pi}(s) = (s+10)(s+20)(s+30)(s+40) = s^4 + 100s^3 + 3500s^2 + 50000s + 240000,$$

e il polinomio caratteristico della matrice

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_1 - pq & k_2 - (p+q) & k_3 & k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{a}{MR^2} & \frac{1}{MR^2} & \frac{\sqrt{2}g}{2R} & -\frac{\beta}{MR^2} \end{pmatrix}.$$

Sostituendo i valori numerici specificati, si ha

$$\begin{aligned}\pi_{A+BK}(s) &= \det(sI - (A + BK)) = \\ &= s^4 + \left(\frac{25}{4}\beta - k_2 + 15\right) s^3 + \left(\frac{375}{4}\beta - \frac{25}{4}k_4 - k_1 - \frac{25}{4}\beta k_2 - \frac{981}{80}\sqrt{2} + 50\right) s^2 + \\ &+ \left(\frac{625}{2}\beta - \frac{25}{2}k_4 - \frac{25}{4}k_3 + \frac{981}{80}\sqrt{2}k_2 - \frac{25}{4}k_1\beta - \frac{2943}{16}\sqrt{2}\right) s + \frac{981}{80}\sqrt{2}k_1 - \frac{25}{2}k_3 - \frac{4905}{8}\sqrt{2}\end{aligned}$$

e quindi la matrice K cercata è la soluzione del sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{25}{4}\beta - k_2 + 15 = 100, \\ \frac{375}{4}\beta - \frac{25}{4}k_4 - k_1 - \frac{25}{4}\beta k_2 - \frac{981}{80}\sqrt{2} + 50 = 3500, \\ \frac{625}{2}\beta - \frac{25}{2}k_4 - \frac{25}{4}k_3 + \frac{981}{80}\sqrt{2}k_2 - \frac{25}{4}k_1\beta - \frac{2943}{16}\sqrt{2} = 50000, \\ \frac{981}{80}\sqrt{2}k_1 - \frac{25}{2}k_3 - \frac{4905}{8}\sqrt{2} = 240000. \end{cases}$$

E Assumendo anche il valore numerico per β , la matrice di guadagno calcolata al passo precedente vale $K = 10^3(7.6807, -0.0819, -8.6136, -1.7352)$. Allo stesso risultato si sarebbe giunti anche utilizzando il comando `place` di Matlab, utilizzabile però solo una volta noto il valore di β . Il progetto dell'osservatore può essere svolto con la usuale procedura di sintesi, ad esempio utilizzando i comandi

```
p = [-10, -20, -30, -40];
q = 2*p;
G = -place(A', C', q)';
```

che consentono di calcolare la matrice di iniezione delle uscite

$$G = 10^4(-0.4200, 1.8900, -0.4430, -0.0182)^T.$$

F Uno schema **Simulink** che permette di simulare l'evoluzione del sistema in anello chiuso con il regolatore progettato al punto precedente è riportato in figura 2. La figura 3 mostra l'evoluzione dell'uscita

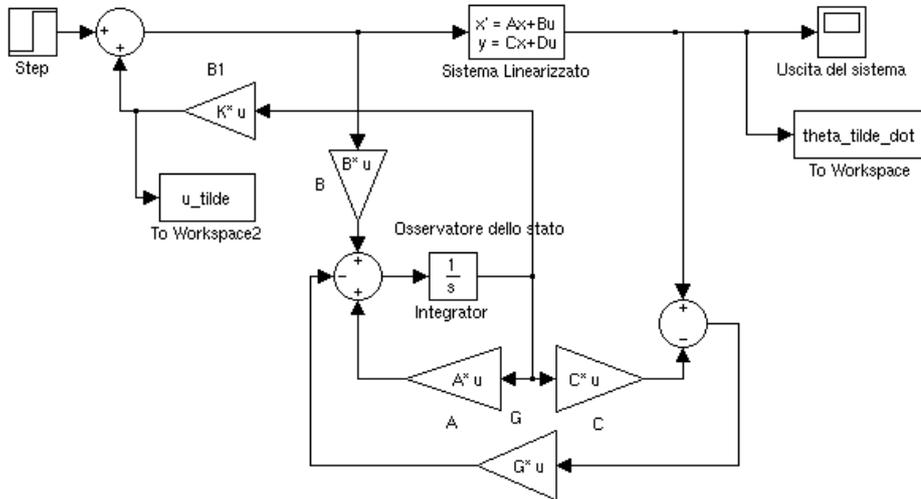


Figura 2: Schema **Simulink** che consente la simulazione del sistema chiuso in retroazione con il regolatore sopra progettato.

$\tilde{y} = \dot{\tilde{\theta}}$, a partire da $\tilde{x}(0) = 0$ e stato dell'osservatore $\tilde{x}_R(0) = (0.1, 5, 0.345, 1)$ e il corrispondente segnale di controllo \tilde{v} generato dal regolatore.

G) Uno schema **Simulink** che permette di simulare l'evoluzione del sistema non lineare in anello chiuso con il regolatore progettato per il sistema linearizzato è riportato in figura 4. Nella figura sono evidenziati in verde i blocchi che realizzano la dinamica del sistema. Una possibile realizzazione degli script utilizzati nei blocchi è riportata di seguito:

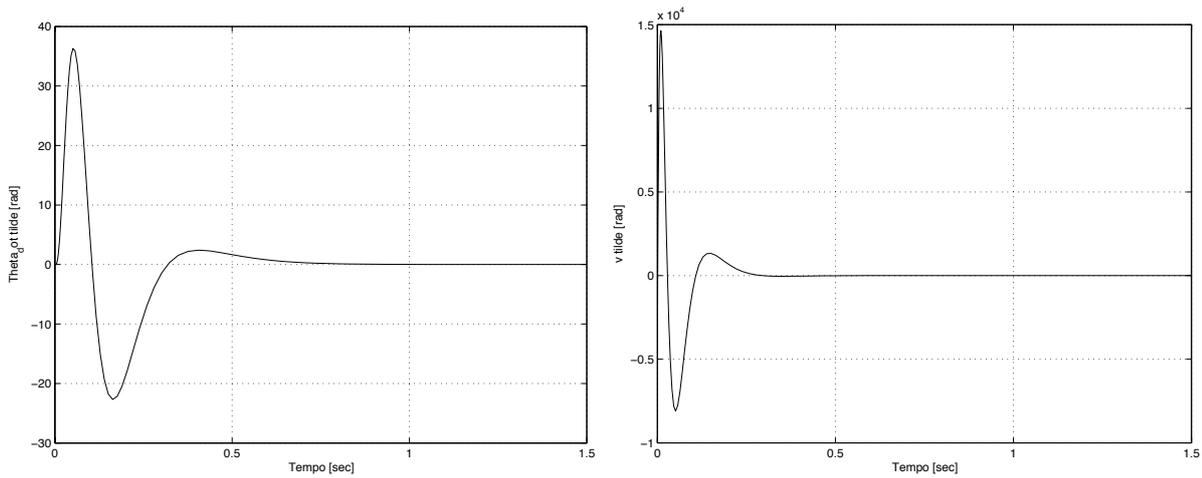


Figura 3: Evoluzione dell'uscita $\tilde{y} = \dot{\theta}$, a partire da $\tilde{x}(0) = 0$ e stato dell'osservatore $\tilde{x}_R(0) = (0.1, 5, 0.345, 1)$ e il corrispondente segnale di controllo \tilde{v} generato dal regolatore.

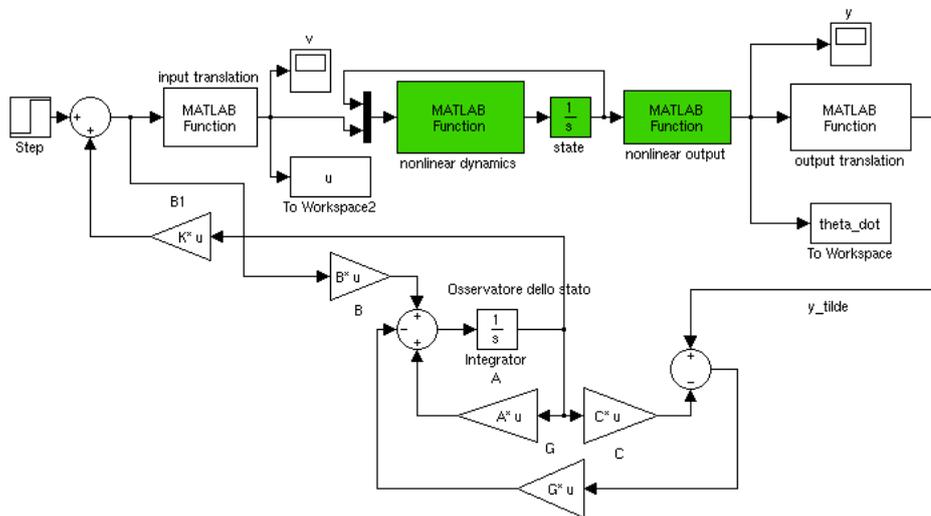


Figura 4: Schema Simulink che consente la simulazione del sistema non lineare chiuso in retroazione con il regolatore progettato per il sistema linearizzato.

```

function dx = nonlinear_dynamics(in)
x = in(1:4);
v = in(5);
load_parameters
dx = [...
    x(2);
    -p*q*x(1) - (p+q)*x(2) + v;...
    x(4);...
    a/(M*r^2)*x(1) + 1/(M*r^2)*x(2) - g/r*cos(x(3)) - mybeta/(M*r^2)*x(4);...
];
end

function y = nonlinear_output(in)
x = in(1:4);
y = x(4);
end

function u = input_translation(u_tilde)

```

```

load_parameters
u = u_bar + u_tilde;
end

function y_tilde = output_translation(y)
load_parameters
y_bar = nonlinear_output(x_bar);
y_tilde = y - y_bar;
end

```

La figura 5 mostra l'evoluzione dell'uscita $y = \dot{\theta}$, a partire da $x(0) = \bar{x} + (0.01, -0.3, -0.05, 0.1)$ e stato dell'osservatore $\hat{x}_R(0) = 10^{-1}(0.01, 0.5, 0.0345, 0.1)$ e il corrispondente segnale di controllo v .

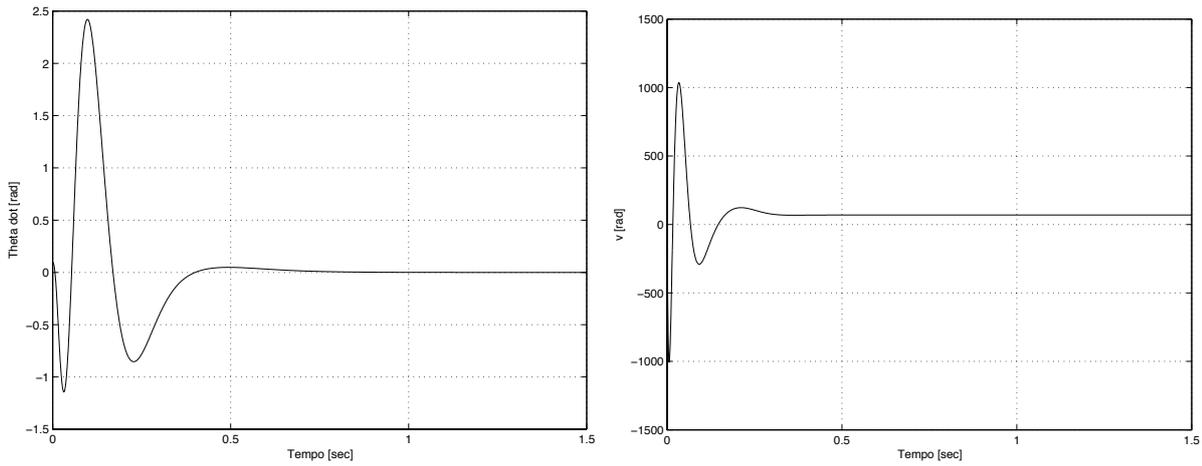


Figura 5: L'evoluzione dell'uscita $y = \dot{\theta}$, a partire da $x(0) = \bar{x} + (0.01, -0.3, -0.05, 0.1)$ e stato dell'osservatore $\hat{x}_R(0) = 10^{-1}(0.01, 0.5, 0.0345, 0.1)$ e il corrispondente segnale di controllo v .