

## Esame di Controlli Automatici - 12 Giugno 2009

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 1. Esso è costituito da un disco di inerzia  $I$ , all'interno del quale è presente una scanalatura passante per il centro del disco stesso. Due sfere di massa  $M$  e  $m$ , collegate attraverso una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo  $d$ , sono libere di muoversi all'interno della scanalatura. Il disco può ruotare senza attrito in un piano orizzontale attorno al suo asse centrale, mentre le due sfere sono soggette ad una coppia di attrito viscoso di costante  $\beta$ . Si indichino con  $\theta$  l'angolo di rotazione del disco, con  $x_M$  la posizione della sfera di massa  $M$  rispetto ad un asse allineato alla scanalatura e con origine nel centro del disco, e con  $x_m$  quella della sfera di massa  $m$  misurata rispetto allo stesso asse. Indicando con  $\tau$  la coppia di controllo sul disco, la dinamica del sistema risulta descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} \ddot{\theta} &= -\frac{2}{J(x_M, x_m)} (M x_M \dot{x}_M + m x_m \dot{x}_m) \dot{\theta} + \frac{1}{J(x_M, x_m)} \tau, \\ \ddot{x}_M &= \frac{1}{M} (k (x_m - x_M + d) - \beta \dot{x}_M) + x_M \dot{\theta}^2, \\ \ddot{x}_m &= \frac{1}{m} (k (x_M - x_m - d) - \beta \dot{x}_m) + x_m \dot{\theta}^2, \end{cases}$$

con  $J(x_M, x_m) = I + M x_M^2 + m x_m^2$ .

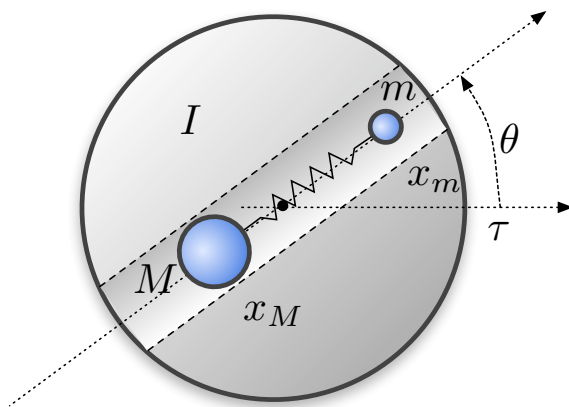


Figura 1: Schema meccanico del sistema

Con riferimento ai seguenti valori numerici per i parametri del sistema,  $I = 1.375 \text{ Kg m}^2$ ,  $M = 1 \text{ Kg}$ ,  $m = 0.5 \text{ Kg}$ ,  $\beta = 1.5 \text{ Ns/m}$ ,  $d = 10 \text{ cm}$ , e  $k = 10 \text{ N/m}$ , si risponda ai seguenti quesiti:

- A** Si calcolino gli equilibri del sistema e i relativi ingressi. Se ne discuta la stabilità;
- B** Si determinino se possibile i moti del sistema corrispondenti a velocità di rotazione costante  $\dot{\theta} = \bar{\omega}$  rad/s e posizioni radiali delle masse costanti;
- C** In corrispondenza al valore  $\bar{\omega} = 2 \text{ rad/s}$ , si discuta la stabilità dei moti trovati al punto **B**. Si discuta la raggiungibilità del sistema linearizzato attorno a tale moto utilizzando come ingresso la coppia  $\tau$ ;
- D** Potendo installare sensori per la lettura dell'angolo  $\theta$  e delle posizioni  $x_M$  e  $x_m$ , si determini una scelta minima di tali sensori che permetta di ricostruire completamente lo stato del sistema;
- E** Con la scelta dei sensori effettuata al punto **D**, si progetti un controllore in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema negli equilibri trovati al punto **B** con  $\omega = \bar{\omega}$ ;
- F** Si realizzi una simulazione in ambiente Matlab/Simulink del sistema in anello chiuso, ottenuto connettendo il modello non lineare del sistema con il controllore sopra progettato.

**Soluzione** Posto  $x = [ \theta, x_M, x_m, \dot{\theta}, \dot{x}_m, \dot{x}_m ] = [ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 ]$ , l'equazione dinamica in forma di stato del sistema ha la seguente forma:

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ -\frac{2}{J(x_2, x_3)} (M x_2 \dot{x}_5 + m x_3 \dot{x}_6) x_4 + \frac{1}{J(x_2, x_3)} \tau, \\ \frac{1}{M} (k (x_3 - x_2 + d) - \beta x_5) + x_2 x_4^2, \\ \frac{1}{m} (k (x_2 - x_3 - d) - \beta x_6) + x_3 x_4^2, \end{bmatrix}$$

con  $J(x_2, x_3) = I + M x_2^2 + m x_3^2$ .

**A** Gli equilibri ottenuti ponendo  $f(x, u) = 0$  sono dati da  $\theta = \bar{\theta}$ ,  $\bar{x}_M - \bar{x}_m = d$ , e  $\bar{\tau} \equiv 0$ . La matrice del sistema linearizzato in uno qualsiasi di questi equilibri vale

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} & 0 & -\frac{\beta}{M} & 0 \\ 0 & \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 & 0 & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 0 & -1.5 & 0 \\ 0 & 20 & -20 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

che ha tre autovalori nell'origine e gli altri a parte reale nulla. La matrice  $A$  possiede un modo polinomialmente (linearmente) divergente, ma nulla si può dire col teorema di Lyapunov indiretto sulla stabilità del sistema non lineare. Da una analisi della meccanica del sistema, comunque, si osserva facilmente che gli equilibri sono instabili: infatti, se l'equilibrio è perturbato con una piccola velocità angolare  $\dot{\theta}$ , e con un piccolo spostamento relativo delle masse che le tenga in equilibrio con la forza centrifuga creata da  $\dot{\theta}$ , il disco si allontanerà indefinitamente dall'angolo iniziale. Una dimostrazione analitica di instabilità potrebbe essere cercata ad esempio utilizzando il teorema di Cetaev con  $V = \theta \dot{\theta}$ .

**B**) Imponendo  $\dot{\theta} = 2$ ,  $\ddot{\theta} = \ddot{x}_M = \ddot{x}_m = 0$  e  $\dot{x}_M = \dot{x}_m = 0$ , si ottiene il moto nominale descritto da  $\bar{\tau} \equiv 0$ ,  $\theta(t) = \theta(0) + \bar{\omega}t$ , e

$$\bar{x}_M = \frac{d k m}{k (M + m) - m M \bar{\omega}^2} = 0.0385 m,$$

$$\bar{x}_m = -\frac{d k M}{k (M + m) - m M \bar{\omega}^2} = -0.0769 m.$$

**C**) Il sistema linearizzato attorno a questi moti ha la matrice dinamica in forma simbolica data da

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & -\frac{k}{M} + \bar{\omega}^2 & \frac{k}{M} & \frac{2dkm\bar{\omega}}{k(m+M)-mM\bar{\omega}^2} & -\frac{\beta}{M} & 0 \\ 0 & \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} + \bar{\omega}^2 & -\frac{2dkM\bar{\omega}}{k(m+M)-mM\bar{\omega}^2} & 0 & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}$$

con  $\alpha = \frac{2dkmM\bar{\omega}(k(m+M)-mM\bar{\omega}^2)}{d^2k^2mM(m+M)+I(k(m+M)-mM\bar{\omega}^2)^2}$ . Sostituendo i valori numerici, otteniamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.112 & 0.112 \\ 0 & -6 & 10 & 0.154 & -1.5 & 0 \\ 0 & 20 & -16 & -0.308 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

che possiede un autovalore a parte reale positiva, il che ci permette di concludere che il moto nominale è instabile per il sistema originale. La matrice degli ingressi del sistema linearizzato vale

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J(\bar{x}_2, \bar{x}_3)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.725 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calcolando la matrice di raggiungibilità  $R = [ B \ AB \ \dots \ A^5 B ]$ , si può verificare numericamente che il suo rango è pieno. Si può però anche osservare che il numero di condizione della matrice  $R$  (cioè il rapporto tra il massimo ed il minimo valore singolare di  $R$ ) è molto alto, dell'ordine di  $10^4$ , il che indica che esistono stati o combinazioni di stati il cui controllo è molto più difficile che per altri (la perdita di raggiungibilità corrisponde a numero di condizione infinito).

- D) La matrice di uscita corrispondente a un sensore che misuri  $\theta$  è  $C_1 = [ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ]$ , mentre  $C_2 = [ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ]$  e  $C_3 = [ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 ]$  sono quelle corrispondenti agli altri due sensori considerati. Le matrici di osservabilità corrispondenti alla seconda e terza possibilità sono singolari, quindi il sistema non è osservabile dalla sola misura delle posizioni delle masse. Questo risultato ha una ovvia interpretazione fisica: che la posizione delle masse è indifferente alla posizione angolare  $\theta$ . La matrice di osservabilità a partire dalla misura di  $\theta$  ha invece rango pieno, quindi il sistema linearizzato è osservabile da questa uscita. Anche in questo caso, comunque, si può osservare che il numero di condizione della matrice di osservabilità è dell'ordine di  $10^4$ , il che indica che esistono stati o combinazioni di stati la cui stima è molto più difficile che per altri (la perdita di osservabilità corrisponde a numero di condizione infinito). Il numero di condizionamento della matrice di osservabilità migliora (intorno a  $10^3$ ) se si usano due uscite, ad esempio  $\theta$  e  $x_M$ , ovvero ponendo  $C_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

- E) Applicando una procedura standard di sintesi al sistema con un solo sensore di  $\theta$ , ovvero ad esempio utilizzando i comandi

```
C=C1;
sys = ss(A, B, C, 0);
[K,S,E] = lqr(sys, 100*eye(6), 1)
q = 2*E;
L = transpose(place(A', C', q));
rsys = reg(sys, K, L);
```

si ottiene un controllore che stabilizza il sistema linearizzato. Nonostante il forte peso assegnato alle variazioni dello stato e il corrispondente piccolo costo del controllo, il transitorio della risposta (vedi figura 2) è pronunciatissimo. Questo comportamento è determinato dalle caratteristiche di scarsa osservabilità e raggiungibilità del sistema. Andamenti simili del transitorio nel sistema linearizzato rendono evidentemente improponibile l'utilizzo di questo controllore per stabilizzare il sistema non lineare, il quale verrebbe portato pressoché istantaneamente fuori dalla regione in cui la approssimazione lineare è valida.

Se si utilizza la matrice corrispondente ai due sensori sopra indicati, e seguendo una procedura di sintesi del tutto simile alla precedente ponendo adesso  $C = C_b$ , si può ottenere un migliore controllo del sistema linearizzato (vedi figura 3).

- E) Uno schema `Simulink` che permette di simulare l'evoluzione del sistema linearizzato, stabilizzato con il controllore lineare sopra progettato, è riportato in figura 4. Infine, è possibile simulare l'evoluzione del sistema originale non lineare, chiuso in retroazione con lo stesso controllore attraverso uno schema `Simulink` come quello riportato in figura 5. Si osservi nello schema l'utilizzo del blocco `Clock` che è necessario per effettuare la traslazione delle variabili dello stato attorno al moto nominale considerato. Nella figura 6 è infine riportata la risposta del sistema non lineare a partire da condizioni iniziali sufficientemente vicine al moto nominale.

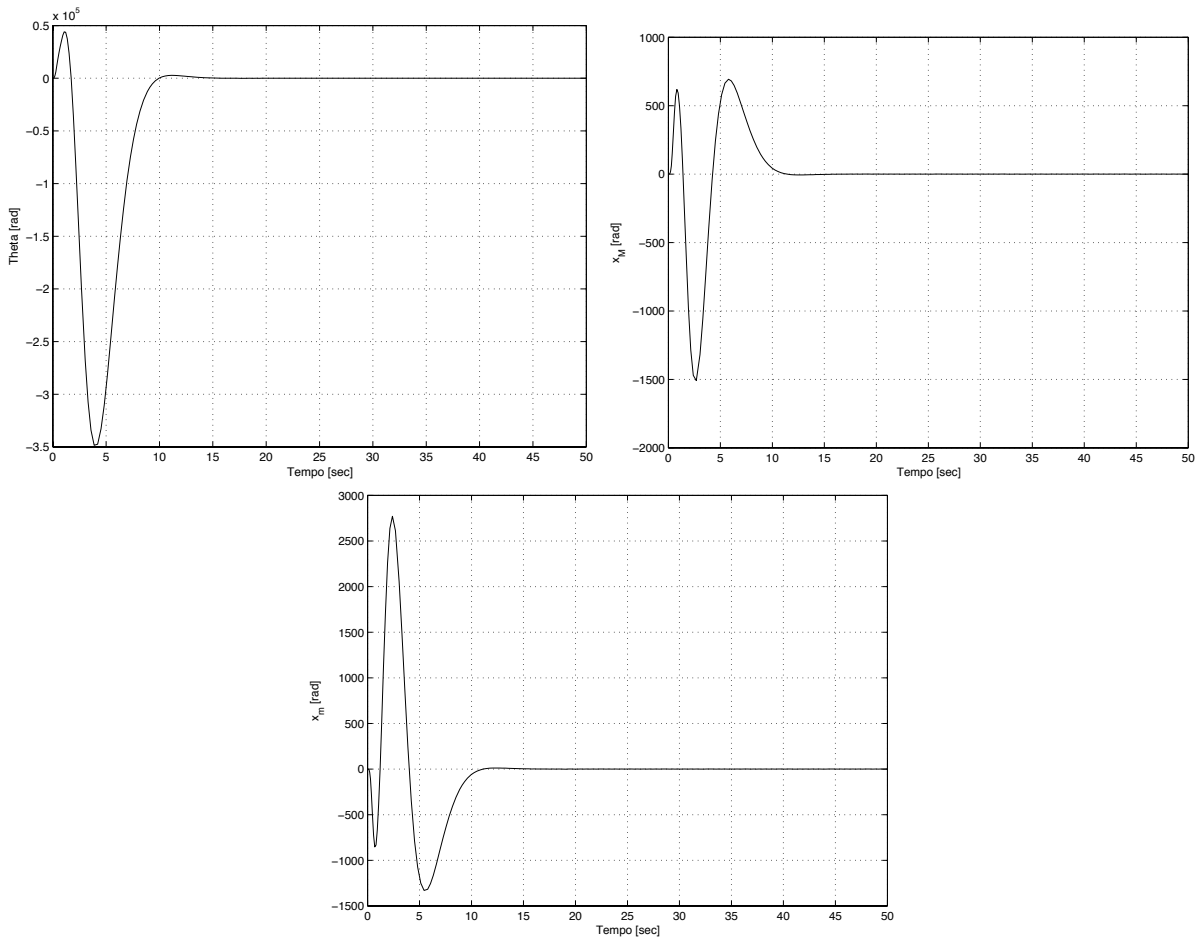


Figura 2: Evoluzione temporale delle variabili  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = x_M$ , e  $x_3 = x_m$  per il sistema linearizzato, stabilizzato con il controllore progettato sull'uscita di misura  $\theta$ , a partire da condizioni iniziali  $x_0 = 10^{-3} [0.01, 0.01, -0.04, 0.40, 0, -0.06]$ .

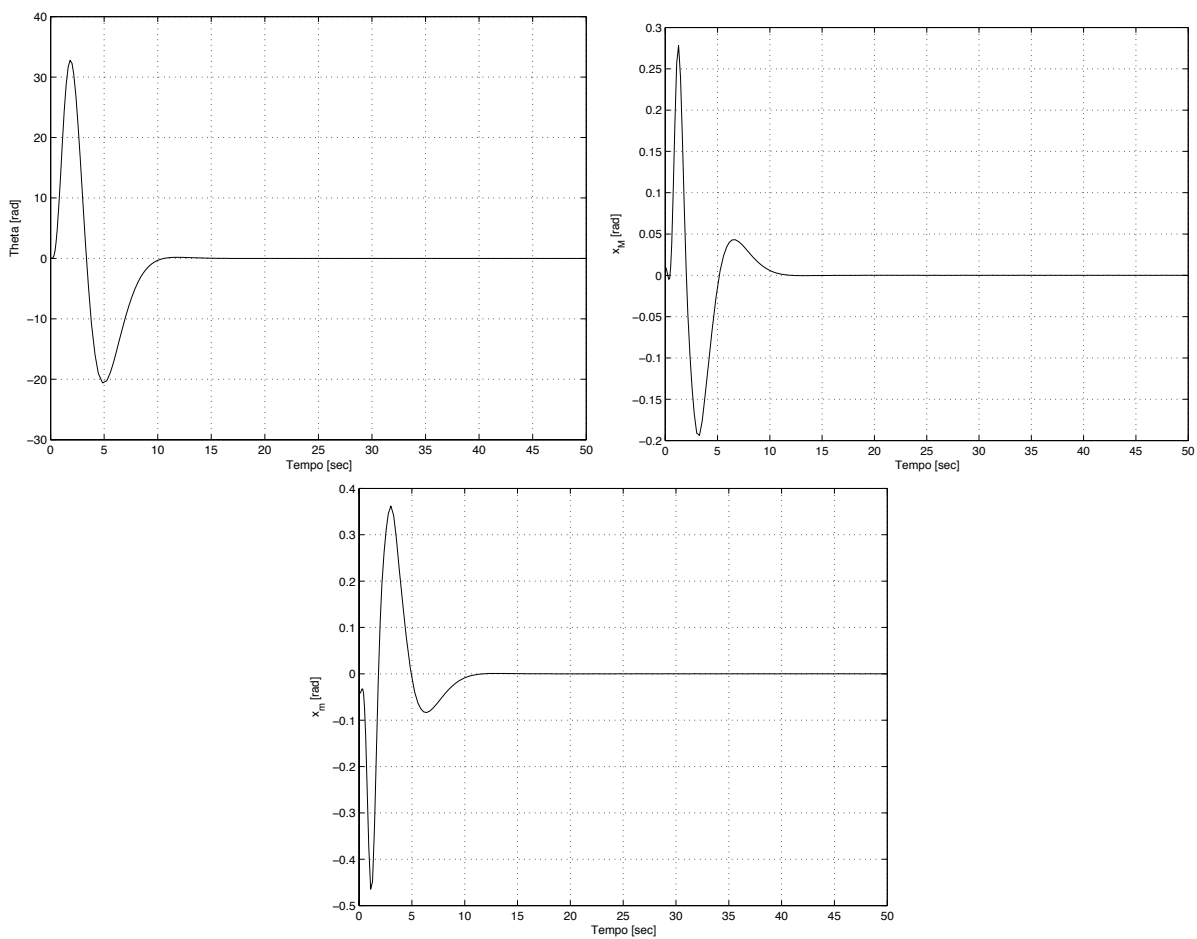


Figura 3: Evoluzione temporale delle variabili  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = x_M$ , e  $x_3 = x_m$  del sistema linearizzato, stabilizzato con il controllore progettato misurando  $\theta$  e  $x_M$ , a partire da condizioni iniziali  $x_0 = 10^{-3} [0.01, 0.01, -0.04, 0.40, 0, -0.06]$ .

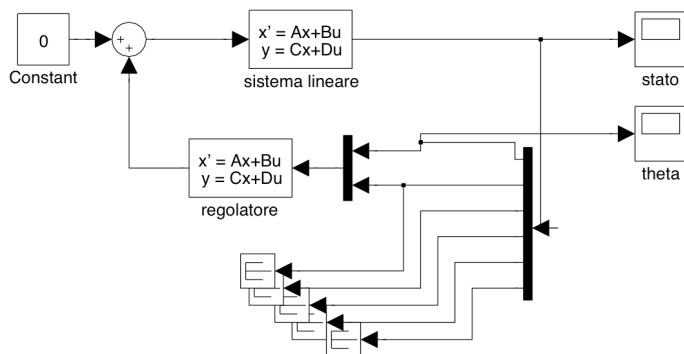


Figura 4: Schema Simulink del sistema linearizzato stabilizzato con il controllore lineare.

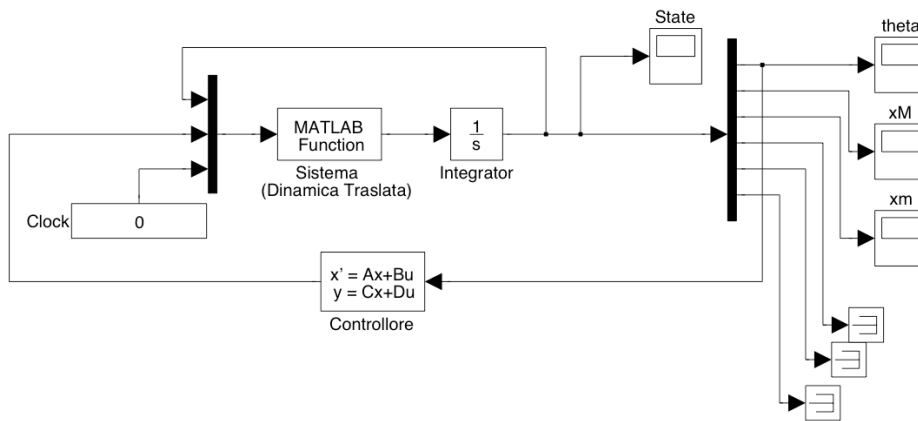


Figura 5: Schema Simulink del sistema non lineare stabilizzato con il controllore lineare.

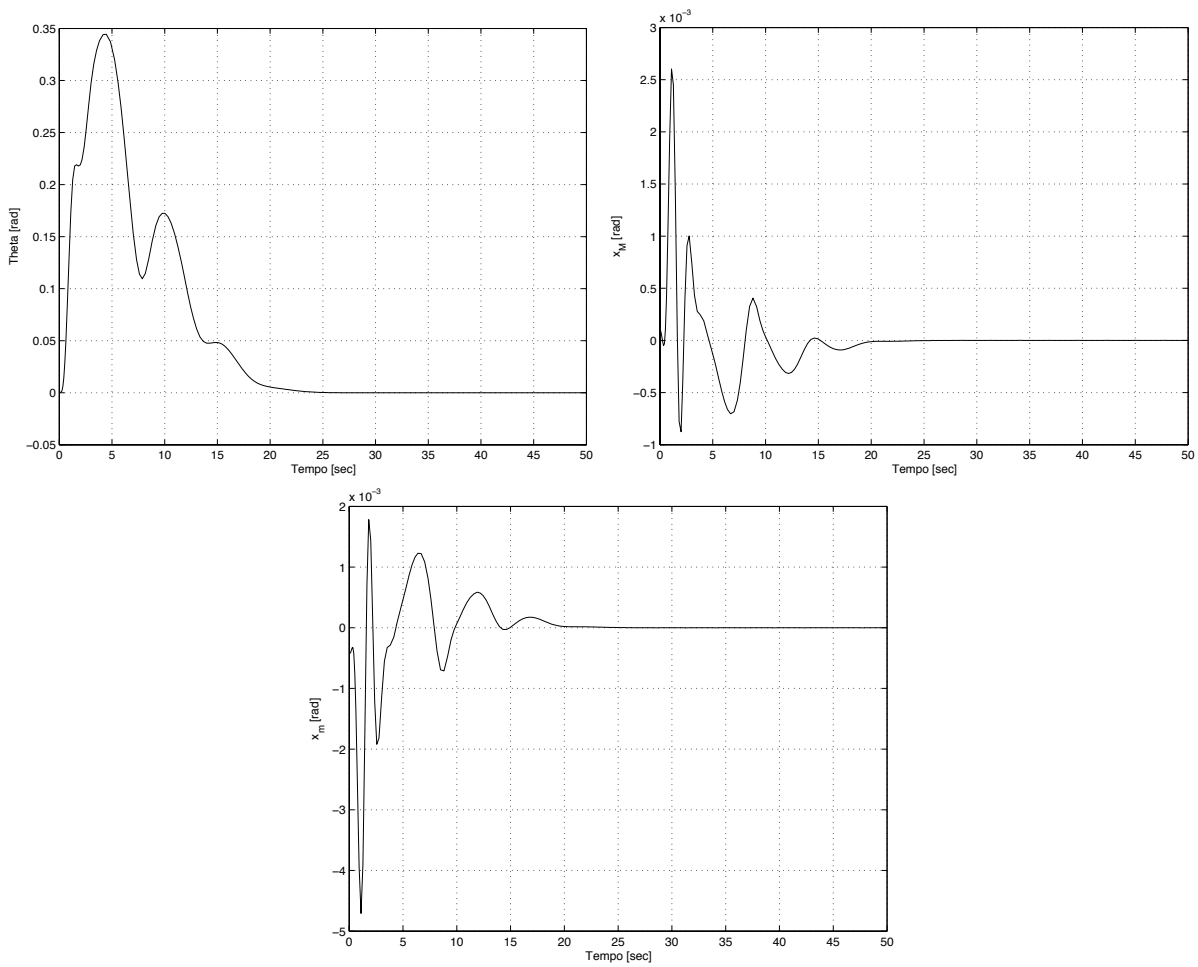


Figura 6: Evoluzione temporale delle variazioni dello stato del sistema non lineare attorno al moto nominale, partendo da perturbazioni iniziali  $x_0 = 10^{-3} [0.01, 0.01, -0.04, 0.40, 0, -0.06]$ .