

Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 9-1-2009

Si consideri il modello elementare planare di un razzo a ugello direzionabile riportato in figura 1.

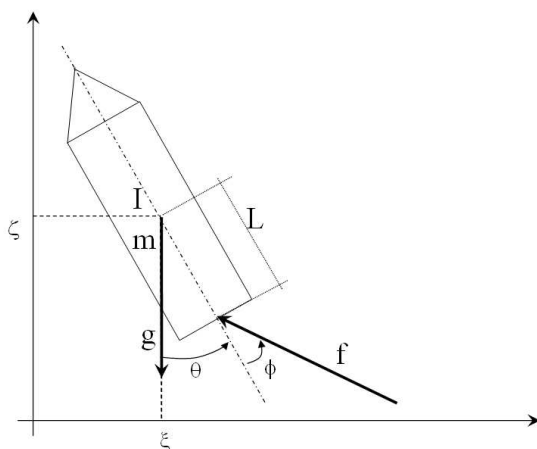


Figura 1: Modello elementare di razzo a ugello direzionabile.

Siano ξ, ζ le coordinate del baricentro del razzo, θ la inclinazione dell'asse del razzo rispetto alla verticale, f la spinta applicata all'ugello nella direzione individuata dalla deviazione ϕ rispetto all'asse. Sia inoltre $m = 500\text{Kg}$ la massa del razzo, $I = 1000\text{Kg m}^2$ il suo momento di inerzia baricentrale nel piano del moto, $L = 1\text{m}$ la distanza del baricentro dall'ugello.

Le equazioni del moto del sistema sono date da

$$\begin{aligned} m\ddot{\zeta} &= -mg + f \cos(\theta + \phi) \\ m\ddot{\xi} &= -f \sin(\theta + \phi) \\ I\ddot{\theta} &= -L \sin(\phi)f \end{aligned} \quad (1)$$

Si considerano ingressi di controllo per il sistema la spinta f e la direzione ϕ . Si considerano uscite del sistema le posizioni ξ, ζ del baricentro.

- A** Si calcolino gli equilibri del sistema ed i corrispondenti ingressi e uscite, e si ricavi un modello linearizzato approssimato del sistema;
- B** Si studi la stabilità degli equilibri trovati (suggerimento: $V(x) = \zeta\dot{\zeta}$);
- C** Si discuta la raggiungibilità del sistema linearizzato nell'origine considerando gli ingressi $u_1 = f$ e $u_2 = \phi$ prima separatamente, poi insieme.
- D** Si discuta la osservabilità del sistema linearizzato nell'origine considerando le uscite $y_1 = \xi$ e $y_2 = \zeta$ prima separatamente, poi insieme.
- E** Sulla base della discussione precedente, si deduca la scomposizione del sistema linearizzato nell'origine in sottosistemi raggiungibili e osservabili, e si diano le funzioni di trasferimento dai diversi ingressi alle diverse uscite.
- F** Si progetti un compensatore che, usando la misura delle uscite, stabilizzi asintoticamente il sistema linearizzato nell'origine;
- E** Si effettui una simulazione del sistema a ciclo chiuso ottenuto connettendo il controllore con il modello non lineare del sistema.

Soluzione

A) Posto $x = [\xi \quad \zeta \quad \theta \quad \dot{\xi} \quad \dot{\zeta} \quad \dot{\theta}]$, $u_1 = f$, $u_2 = \phi$, il sistema in forma di stato diviene

$$\dot{x} = F(x, u) = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ -\frac{1}{m} \sin(x_3 + u_2)u_1 \\ -g + \frac{1}{m} \cos(x_3 + u_2)u_1 \\ -\frac{L}{I} \sin(u_2)u_1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} h_1(x, u) \\ h_2(x, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Gli equilibri si ottengono immediatamente imponendo $\dot{x} = 0$. Si ha infatti subito $\bar{x}_4 = \bar{x}_5 = \bar{x}_6 = 0$. Inoltre, dalla $\dot{x}_5 = 0$ si ricava che \bar{u}_1 non può essere nullo, quindi dalla $\dot{x}_6 = 0$ deriva $\bar{u}_2 = \mu\pi$, $\mu = 0, 1, 2, \dots$. Dalla $\dot{x}_3 = 0$ deriva poi $\bar{x}_3 = \nu\pi$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$. Infine, si ha $\bar{u}_1 = mg$ per $x_3 = \mu\pi$ e $u_2 = \mu\pi$; oppure $\bar{u}_1 = -mg$ per $x_3 = \mu\pi$ e $u_2 = (\mu + 1)\pi$. Gli equilibri sono indifferenti rispetto alla posizione del baricentro nel piano verticale, cioè si hanno infiniti equilibri sotto le condizioni precedenti per qualsiasi valore di x_1, x_2 .

Tra le possibili configurazioni di equilibrio, due sole sono significativamente diverse, in corrispondenza ai due casi in cui il l'ugello è posto sulla verticale al di sotto o al di sopra del baricentro, rispettivamente. Fissiamo ad esempio

$$(\bar{x}, \bar{u})\bar{x} = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \forall \bar{x}_1, \bar{x}_2; \quad \bar{u} = [mg \quad 0]$$

$$(\bar{x}', \bar{u}')\bar{x} = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad \pi \quad 0 \quad 0 \quad 0], \forall \bar{x}_1, \bar{x}_2; \quad \bar{u} = [-mg \quad 0]$$

Il modello linearizzato intorno alla coppia di equilibrio di (\bar{x}, \bar{u}) è dato dalle matrici (A, B, C, D) :

$$A = \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right];$$

$$B = [B_1 \mid B_2] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial F(x, u)}{\partial u_1} & \frac{\partial F(x, u)}{\partial u_2} \end{array} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -g \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{Lm}{I}g \end{array} \right];$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial h_1(x, u)}{\partial x} \\ \frac{\partial h_2(x, u)}{\partial x} \end{array} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$D = \left. \frac{\partial h(x, u)}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per la coppia di equilibrio (\bar{x}', \bar{u}') , il modello linearizzato ha identiche matrici A, C, D ma vale

$$B = [B_1 \mid B_2] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial F(x, u)}{\partial u_1} & \frac{\partial F(x, u)}{\partial u_2} \end{array} \right]_{\bar{x}', \bar{u}'} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -g \\ -\frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{Lm}{I}g \end{array} \right].$$

B) Come prima osservazione, la presenza di una infinità continua di equilibri indifferenti al variare di \bar{x}_1, \bar{x}_2 implica che, laddove si trattasse di equilibri stabili, essi non potrebbero che essere marginalmente stabili. Per fissare le idee, scegliamo tra questi il caso $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$.

La matrice dinamica A del modello linearizzato, coincidente per i due equilibri allo studio, ha tutti gli autovalori coincidenti nell'origine, pertanto nulla si può dire sulla stabilità degli equilibri per il sistema originale mediante il metodo indiretto di Lyapunov.

Ad un esame fisico intuitivo, gli equilibri del razzo nelle configurazioni (\bar{x}, \bar{u}) e (\bar{x}', \bar{u}') appaiono instabili. La instabilità del primo equilibrio può essere dimostrata mediante l'utilizzo del teorema di Chetaev con la funzione $V(x) = x_2x_5$. Posto $u_1 = mg$ e $u_2 = 0$, infatti, si ha $L_F(x) = x_5^2 - x_2g(1 - \cos x_3)$. Per l'insieme $U = \{x \in \mathbb{R}^6 | x_2 < 0, x_5 < 0\}$ valgono le ipotesi del teorema di Chetaev: infatti, $0 \in \partial U$; $\forall x \in \partial U, V(x) = 0$, e $\forall x \in U, V(x) > 0$ e $L_F V(x) > 0$. La instabilità del secondo equilibrio si dimostra in modo del tutto analogo.

C) L'insieme di raggiungibilità dal primo ingresso è dato da

$$\mathcal{R}_1 = \text{span } R_1 = \text{span} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mentre per il secondo ingresso vale

$$\mathcal{R}_2 = \text{span } R_2 = \text{span} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & Lmg/I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Lm/I & 0 & 0 \\ -1 & 0 & Lmg/I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Lm/I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema linearizzato nell'origine è quindi completamente raggiungibile solo utilizzando entrambe gli ingressi.

D) L'insieme di inosservabilità dalla prima uscita è dato da

$$\bar{\mathcal{O}}_1 = \ker O_1 = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g \end{bmatrix} = \text{span} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mentre per la seconda uscita vale

$$\bar{\mathcal{O}}_2 = \ker O_2 = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{span} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema linearizzato nell'origine è quindi completamente osservabile solo utilizzando entrambe le uscite.

E) Dalla analisi di raggiungibilità e osservabilità risulta evidente che il sottospazio

$$\mathcal{X}_1 = \text{span} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è raggiungibile dal primo ingresso ma inosservabile dalla prima uscita. All'opposto, il sottospazio

$$\mathcal{X}_2 = \text{span} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è raggiungibile dal secondo ingresso ma inosservabile dalla prima uscita. Se ne deduce che il sottosistema formato dagli stati $z_a = [x_2, x_5]$ partecipa solo al rapporto tra l'ingresso u_1 e l'uscita y_2 , mentre il sottosistema formato dagli stati $z_b = [x_1, x_3, x_4, x_6]$ partecipa solo al rapporto tra l'ingresso u_2 e l'uscita y_1 .

Le matrici del primo sottosistema assumono infatti la forma

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}; \quad C_a = [1 \quad 0],$$

mentre le matrici del secondo sottosistema divengono

$$A_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \\ -Lmg/I \end{bmatrix}; \quad C_b = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

In conclusione, usando le funzioni di trasferimento per rappresentare i rapporti ingresso-uscita, si ha dunque

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = [C(sI - A)^{-1}B + D] u(s) = \begin{bmatrix} 0 & -g \frac{s^2 - Lmg/I}{s^4} \\ \frac{1/m}{s^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

F) La stabilizzazione del sistema può essere fatta agendo sui due sottosistemi separatamente. Procediamo quindi a progettare un compensatore basato su regolatore per il primo sottosistema. Calcoliamo la matrice K_a di retroazione degli stati in modo da allocare i poli del sistema a ciclo chiuso, cioè gli autovalori della matrice $A_a - B_a K_a$, ad esempio in $p_a = [-0.1 \quad -0.2]$. Utilizzando la funzione Matlab `place(A_a, B_a, p_a)`, si ottiene:

$$K_a = [10 \quad 150].$$

Per stimare lo stato x_a a partire dalla uscita y_2 , si può realizzare un osservatore di Luenberger. Valutiamo ad esempio la matrice L_a di iniezione delle uscite in modo che la matrice dinamica dello stimatore $A_a - L_a C_a$ abbia autovalori in $q_a = 2p_a$. Impiegando il comando Matlab `transpose(place(A'_a, C'_a, q_a))` si ottiene:

$$L_a = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.08 \end{bmatrix}.$$

La funzione di trasferimento del compensatore basato sul regolatore appena progettato vale

$$K_a (sI - A_a + B_a K_a + L_a C_a)^{-1} L_a = \frac{18(s + 0.04444)}{(s^2 + 0.9s + 0.28)}$$

Il compensatore si può costruire con il comando `Rsys_a = ss(A_a - B_a * K_a - L_a * C_a, L_a, K_a, 0)` ovvero con `Rsys_a = -reg(Sys_a, K_a, L_a)`, ove `Sys_a = ss(A_a, B_a, C_a, 0)`.

Per quel che riguarda il compensatore del secondo sottosistema, ponendo $p_b = [-1 \quad -3 \quad -5 \quad -7]$ si ottiene

$$K_b = [2.2 \quad -22 \quad 3.7 \quad -11].$$

Per stimare lo stato x_b a partire dalla uscita y_1 , ponendo $q_b = 1.5p_b$, si costruisce un osservatore di Luenberger con matrice di iniezione delle uscite L_b

$$L_b = \begin{bmatrix} 24 \\ -61 \\ 190 \\ -54 \end{bmatrix}.$$

La funzione di trasferimento del compensatore basato sul regolatore appena progettato vale

$$K_b (sI - A_b + B_b K_b + L_b C_b)^{-1} L_b = -\frac{2654.299(s + 0.6017)(s^2 + 0.8206s + 0.7251)}{(s + 41.59)(s + 2.217)(s^2 - 3.81s + 738.2)}.$$

Uno schema Simulink del sistema stabilizzato è riportato in figura 2.

Il blocco Simulink **Sistema Non Lineare** contiene la seguente funzione:

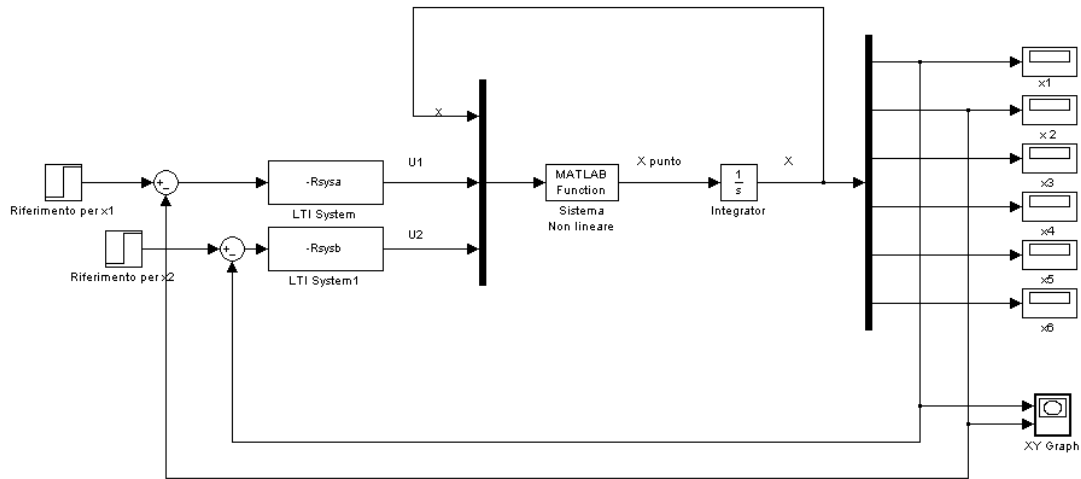


Figura 2: Schema Simulink del sistema non lineare stabilizzato con controllori lineari.

```

function out = SistemaNONLineare(in)
% Parametri del sistema
L=1; I=1000; m=500; g=9.818;
% Ingressi;
% a) Stato
x1 = in(1);
x2 = in(2);
x3 = in(3);
x4 = in(4);
x5 = in(5);
x6 = in(6);
% b) Ingressi
u1 = in(7) + m*g;
u2 = in(8);
% Dinamica non lineare
x1_p = x4;
x2_p = x5;
x3_p = x6;
x4_p = -1/m*sin(x3+u2)*u1;
x5_p = -g + 1/m*cos(x3+u2)*u1;
x6_p = -L/I*sin(u2)*u1;
% Uscite
out (1) = x1_p;
out (2) = x2_p;
out (3) = x3_p;
out (4) = x4_p;
out (5) = x5_p;
out (6) = x6_p;

```

Le figure seguenti riportano i risultati di una simulazione a partire da condizioni iniziali perturbate $x(0) = [0 \quad 0.1 \quad \pi/10 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$.

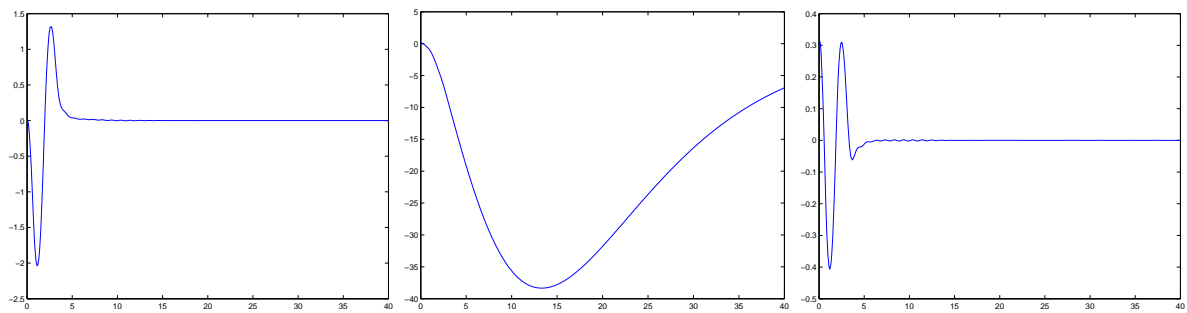


Figura 3: Andamento nel tempo delle variabili $x_1 = \xi$ (a sinistra), $x_2 = \zeta$ (al centro) e $x_3 = \theta$ (a destra) per il sistema stabilizzato.