

Si consideri il sistema meccanico in fig. 1.

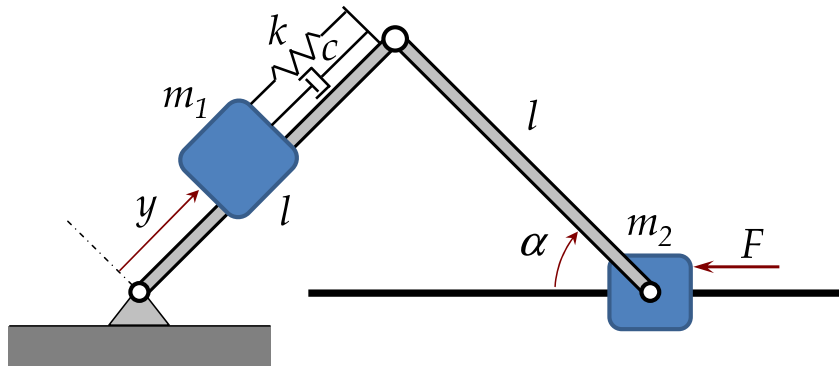


Figure 1: Sistema meccanico in esame.

Esso è costituito da un'asta di lunghezza l e massa trascurabile avente le estremità incernierate, rispettivamente, al suolo e ad un'altra asta identica. Lungo la prima asta può scorrere un manicotto di massa m_1 collegato mediante una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo $\frac{l}{2}$ e soggetto ad attrito viscoso di costante c . All'estremità libera della seconda asta è collocata una massa m_2 , vincolata a scorrere su un binario orizzontale, alla quale è applicata una forza di controllo F . Il sistema risulta descritto dalle seguenti equazioni dinamiche

$$m_1 \ddot{y} + c \dot{y} - m_1 y \dot{\alpha}^2 - k \left(\frac{l}{2} - y \right) + m_1 g \sin \alpha = 0$$

$$J(y, \alpha) \ddot{\alpha} + 2m_1 y \dot{y} \dot{\alpha} + 4m_2 l^2 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha + m_1 g y \cos \alpha = F l \sin \alpha,$$

dove $J(y, \alpha) = 4m_2 l^2 \sin^2 \alpha + m_1 y^2$, y rappresenta la distanza della massa m_1 dall'estremità dell'asta incernierata al suolo e α l'angolo formato dalla seconda asta rispetto all'asse orizzontale.

- A** Posto $\alpha = \bar{\alpha}$ costante, si calcoli il generico punto di equilibrio del sistema e la corrispondente forza;
- B** Si fornisca il modello del sistema linearizzato nell'equilibrio generico;
- C** Supponendo di disporre della misura dell'angolo α , si discutano la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema in funzione del valore di equilibrio dell'angolo ($\bar{\alpha}$);
- D** Si considerino i seguenti valori numerici: $m_1 = 0.5$ kg, $m_2 = 1$ kg, $l = 2$ m, $k = 10$ N/m, $c = 2$ N s/m, $g = 9.8$ m/s² e $\bar{\alpha} = \frac{\pi}{2}$ rad. Si porti il sistema in forma canonica (o di Kalman) e se ne studi la stabilizzabilità e la detettabilità. Si riporti esplicitamente il sottosistema raggiungibile e osservabile;
- E** Si progetti un compensatore basato sul regolatore che sia in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema nell'equilibrio dato e si effettui una simulazione del sistema a ciclo chiuso ottenuto connettendo il controllore con il modello non lineare del sistema.

Soluzione

A Imponendo le condizioni di equilibrio ($\ddot{y} = \ddot{\alpha} = \dot{y} = \dot{\alpha} = 0$) si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= -k \left(\frac{l}{2} - y \right) + m_1 g \sin \alpha \\ 0 &= m_1 g y \cos \alpha - F l \sin \alpha, \end{aligned}$$

da cui, ponendo $\alpha = \bar{\alpha} \neq 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{l}{2} - \frac{m_1}{k} g \sin \bar{\alpha} \\ \bar{F} &= \frac{m_1 g \bar{y} \cos \bar{\alpha}}{l \sin \bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

Si nota, dalle equazioni dinamiche del sistema, che $\bar{\alpha} = 0$ non può essere punto di equilibrio, poiché in tale configurazione la forza peso esercitata sulla massa m_1 non sarebbe compensata.

B Al fine di determinare il sistema linearizzato e traslato nell'equilibrio generico, definiamo il vettore delle variabili di stato $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [y - \bar{y}, \alpha - \bar{\alpha}, \dot{y}, \dot{\alpha}]^T$ e l'ingresso di controllo traslato $\tilde{u} = u - \bar{F}$. Il sistema non lineare scritto nelle nuove variabili di stato è

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= -\frac{c}{m_1} \tilde{x}_3 + (\tilde{x}_1 + \bar{y}) \tilde{x}_4^2 + \frac{k}{m_1} \left(\frac{l}{2} - (\tilde{x}_1 + \bar{y}) \right) - g \sin(\tilde{x}_2 + \bar{\alpha}) \\ \dot{\tilde{x}}_4 &= \frac{1}{J(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)} \left(-2m_1(\tilde{x}_1 + \bar{y}) \tilde{x}_3 \tilde{x}_4 - 4m_2 l^2 \tilde{x}_4^2 \sin(\tilde{x}_2 + \bar{\alpha}) \cos(\tilde{x}_2 + \bar{\alpha}) - m_1 g (\tilde{x}_1 + \bar{y}) \cos(\tilde{x}_2 + \bar{\alpha}) \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{u} + \bar{F}) l \sin(\tilde{x}_2 + \bar{\alpha}) \right). \end{aligned}$$

Il sistema linearizzato è quindi descritto dalle seguenti equazioni differenziali

$$\dot{\tilde{x}} = A \tilde{x} + B \tilde{u}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} a_{31} &= -\frac{k}{m_1} \\ a_{32} &= -g \cos \bar{\alpha} \\ a_{33} &= -\frac{c}{m_1} \\ a_{41} &= \frac{-m_1 J(\bar{y}, \bar{\alpha}) g \cos \bar{\alpha} - 2m_1 \bar{y} (\bar{F} l \sin \bar{\alpha} - m_1 g \bar{y} \cos \bar{\alpha})}{J(\bar{y}, \bar{\alpha})^2} \\ a_{42} &= \frac{(m_1 g \bar{y} \sin \bar{\alpha} + \bar{F} l \cos \bar{\alpha}) J(\bar{y}, \bar{\alpha}) - 8m_2 l^2 \sin \bar{\alpha} \cos \bar{\alpha} (\bar{F} l \sin \bar{\alpha} - m_1 g \bar{y} \cos \bar{\alpha})}{J(\bar{y}, \bar{\alpha})^2} \\ b &= \frac{l \sin \bar{\alpha}}{J(\bar{y}, \bar{\alpha})}, \end{aligned}$$

dove $J(\bar{y}, \bar{\alpha}) = 4m_2 l^2 \sin^2 \bar{\alpha} + m_1 \bar{y}^2$. Sostituendo in a_{41} e a_{42} il valore di \bar{F} calcolato al punto **A**, si ottengono le seguenti espressioni semplificate

$$\begin{aligned} a_{41} &= -\frac{m_1 g \cos \bar{\alpha}}{J(\bar{y}, \bar{\alpha})} \\ a_{42} &= \frac{m_1 g \bar{y}}{J(\bar{y}, \bar{\alpha}) \sin \bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

C Valutiamo la raggiungibilità del sistema:

$$R = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{32} \\ 0 & 1 & 0 & a_{42} \\ 0 & 0 & a_{32} & a_{32}a_{33} \\ 1 & 0 & a_{42} & 0 \end{bmatrix}.$$

E' facile sincerarsi, per ispezione diretta o per calcolo esplicito del determinante ($\det R = -b^4 a_{32}^2$), che la matrice di raggiungibilità ha rango pieno se valgono contemporaneamente le condizioni $b \neq 0$ e $a_{32} \neq 0$. Dall'espressione di b si nota che essa risulta sempre essere diversa da zero all'equilibrio poiché, come osservato al punto **A**, $\bar{\alpha} \neq 0$. La condizione $a_{32} \neq 0$ si traduce invece nel richiedere $\bar{\alpha} \neq \frac{\pi}{2} + r\pi$, $r \in \mathbb{Z}$. Nel caso in cui fosse $\bar{\alpha} = \frac{\pi}{2} + r\pi$, $r \in \mathbb{Z}$, la matrice R avrebbe rango 2, quindi il sistema non sarebbe completamente raggiungibile tramite la forza F . In particolare i moti della massa m_1 non sarebbero controllabili dalla forza F .

Sfruttando la misura dell'angolo α , cioè disponendo della matrice di uscita $C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$, si ottiene la seguente matrice di osservabilità:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}.$$

Anche in questo caso, per ispezione diretta o per calcolo del determinante ($\det O = -a_{41}^2$), si verifica facilmente che la matrice di osservabilità ha rango pieno se $a_{41} \neq 0$. Tale condizione si traduce nel richiedere nuovamente $\bar{\alpha} \neq \frac{\pi}{2} + r\pi$, $r \in \mathbb{Z}$. Nel caso in cui fosse $\bar{\alpha} = \frac{\pi}{2} + r\pi$, $r \in \mathbb{Z}$, la matrice O avrebbe rango 2. Il sistema non sarebbe quindi completamente osservabile dalla misura dell'uscita α . Gli stati non osservabili sarebbero dunque la posizione e la velocità della massa m_1 .

D Sostituendo i valori numerici, si ottengono il seguente punto di equilibrio:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{\pi}{2} \\ \bar{y} &= \frac{l}{2} - \frac{m_1}{k}g \\ \bar{F} &= 0. \end{aligned}$$

e le seguenti matrici per il sistema linearizzato:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -20 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0.1549 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.124 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0].$$

Allo scopo di portare il sistema in forma canonica, consideriamo i sottospazi di raggiungibilità e di inosservabilità. Dalla matrice di raggiungibilità si ha che il sottospazio di raggiungibilità può essere descritto come segue:

$$\mathcal{R} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

mentre il sottospazio di inosservabilità:

$$\bar{\mathcal{O}} = \ker(O) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Si vede che $\mathcal{R} \cap \bar{\mathcal{O}} = \{\emptyset\}$, quindi gli stati raggiungibili sono anche osservabili. Si ha quindi che la matrice di cambio di base in grado di portare il sistema in forma canonica è semplicemente

$$T = [T_{\mathcal{R}\mathcal{O}} \mid T_{\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{O}}}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Il sistema in forma di Kalman risulta

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0.1549 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -20 & -4 \end{array} \right], \quad \hat{B} = T^{-1}B = \left[\begin{array}{c} 0.124 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

$$\hat{C} = CT = [0 \quad 1 \mid 0 \quad 0].$$

Da cui si vede che il sistema raggiungibile e osservabile è dato da:

$$A_{\mathcal{RO}} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1549 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\mathcal{RO}} = \begin{bmatrix} 0.124 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{\mathcal{RO}} = [0 \quad 1].$$

Tale sistema è instabile avendo un autovalore reale positivo in 0.3936, mentre gli autovalori relativi al sottosistema non raggiungibile o non osservabile sono a parte reale negativa ($\lambda = -2 \pm 4i$). Quindi il sistema risulta non asintoticamente stabile ma stabilizzabile e detettabile. In particolare, il sistema raggiungibile e osservabile, è l'unico a partecipare al rapporto ingresso-uscita, quindi

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = C_{\mathcal{RO}}(sI - A_{\mathcal{RO}})^{-1}B_{\mathcal{RO}} = \frac{0.12399}{(s + 0.3936)(s - 0.3936)}.$$

E Possiamo progettare un compensatore basato su regolatore, in modo da rendere il sistema asintoticamente stabile nell'equilibrio specificato, direttamente sul sottosistema raggiungibile e osservabile. Calcoliamo la matrice $K_{\mathcal{RO}}$ di retroazione degli stati in modo da allocare i poli del sistema a ciclo chiuso, cioè gli autovalori della matrice $A_{\mathcal{RO}} - B_{\mathcal{RO}}K_{\mathcal{RO}}$, in $p = [-2 \quad -5]$. Utilizzando il comando Matlab `Kro = place(Aro,Bro,p)` si ottiene:

$$K_{\mathcal{RO}} = [56.4552 \quad 81.8998].$$

Si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice $L_{\mathcal{RO}}$ di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore $A_{\mathcal{RO}} - L_{\mathcal{RO}}C_{\mathcal{RO}}$ abbia autovalori $q = 2p$. Sempre impiegando il comando Matlab `Lro = transpose(place(Aro',Cro',q))`, si ottiene:

$$L_{\mathcal{RO}} = \begin{bmatrix} 40.1549 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica $K_{\mathcal{RO}}(sI - A_{\mathcal{RO}} + B_{\mathcal{RO}}K_{\mathcal{RO}} + L_{\mathcal{RO}}C_{\mathcal{RO}})^{-1}L_{\mathcal{RO}}$ e si costruisce col comando `rsys = ss(Aro-Bro*Kro-Lro*Cro,Lro,Kro,0)`, ovvero, a meno di un segno con `rsys = reg(Sysro,Kro,Lro)`, dove `Sysro = ss(Aro,Bro,Cro,0)`.

Uno schema Simulink del sistema stabilizzato, rappresentato rispetto alle variabili di stato traslate, è riportato in figura 2.

Il blocco Simulink `Sistema non lineare in variabili traslate` contiene la seguente funzione:

```
function out = SistemaNONLineare(in)

% Ingressi del blocco
x1_tilde = in(1);
x2_tilde = in(2);
x3_tilde = in(3);
x4_tilde = in(4);
u_tilde = in(5);

% Costanti del sistema e punto di equilibrio
ParametriSistema;

% Dinamica del sistema
JJ = 4*m2*1^2*sin(x2_tilde+alphabar)^2+m1*(x1_tilde+ybar)^2;

dot_x1_tilde = x3_tilde;
```

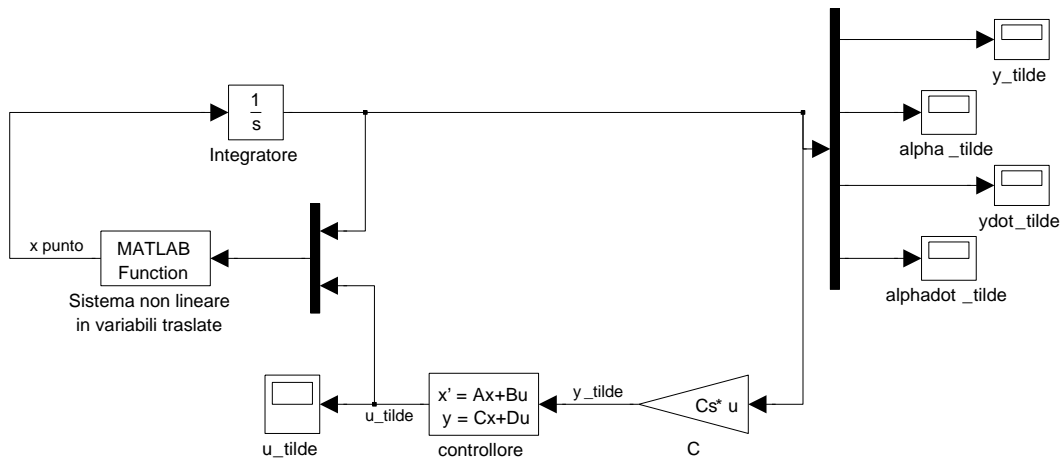


Figure 2: Schema Simulink del sistema stabilizzato con controllore lineare.

```

dot_x2_tilde = x4_tilde;
dot_x3_tilde = (x1_tilde+ybar)*x4_tilde^2+k/m1*(1/2-(x1_tilde+ybar)) - ...
    g*sin(x2_tilde+alphabar)-c/m1*x3_tilde;
dot_x4_tilde = 1/JJ*(-4*m2*l^2*sin(x2_tilde+alphabar) * ...
    cos(x2_tilde+alphabar)*x4_tilde^2 - ...
    2*m1*(x1_tilde+ybar)*x3_tilde*x4_tilde - ...
    m1*g*(x1_tilde+ybar)*cos(x2_tilde+alphabar) + ...
    (u_tilde+Fbar)*l*sin(x2_tilde+alphabar));

% Uscite del blocco
out(1) = dot_x1_tilde;
out(2) = dot_x2_tilde;
out(3) = dot_x3_tilde;
out(4) = dot_x4_tilde;

```

dove lo *script* `ParametriSistema` contiene i valori numerici di tutti i parametri del sistema e il punto di equilibrio. Il blocco `controllore` contiene le matrici del regolatore precedentemente progettato. Per una valutazione del controllore progettato, consideriamo l'evoluzione del sistema a ciclo chiuso a partire da condizioni iniziali $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [-0.1, 0.5, 0, 0]^T$. Le figure 3, 4, 5, 6 riportano l'andamento dello scostamento dal punto di equilibrio delle variabili $y, \alpha, \dot{y}, \dot{\alpha}$ rispettivamente. Nella figura 7 è, invece, rappresentato l'andamento della forza F rispetto al suo valore di equilibrio.

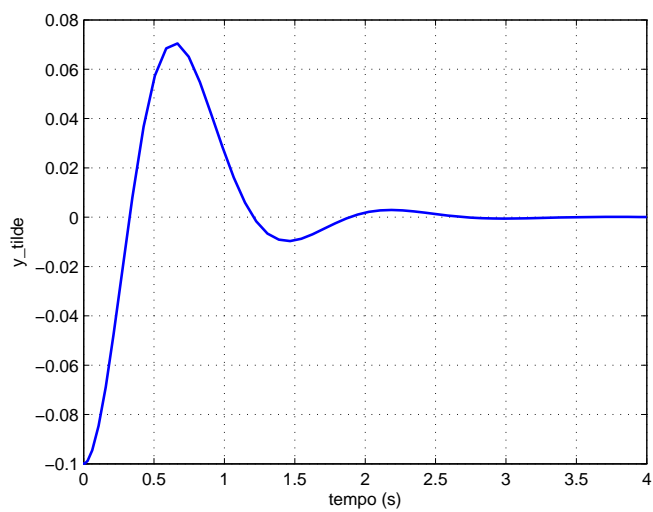


Figure 3: Andamento dello scostamento di y rispetto al valore di equilibrio.

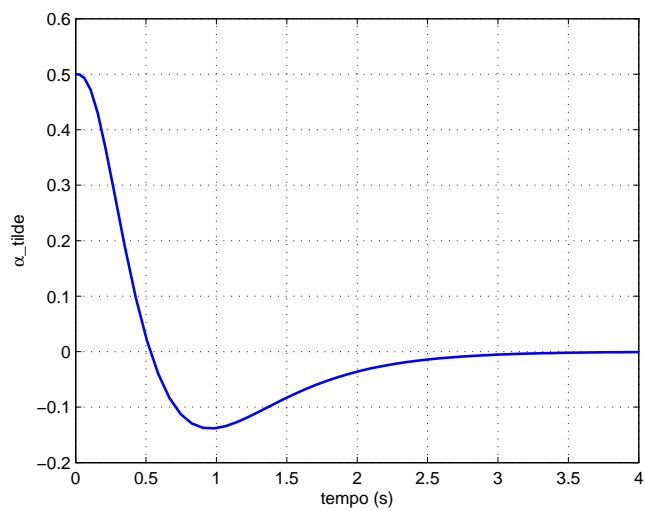


Figure 4: Andamento dello scostamento di α rispetto al valore di equilibrio.

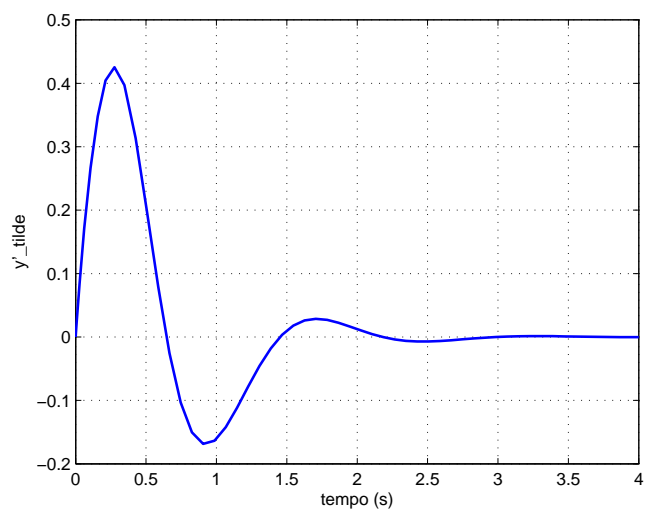


Figure 5: Andamento dello scostamento di \dot{y} rispetto al valore di equilibrio.

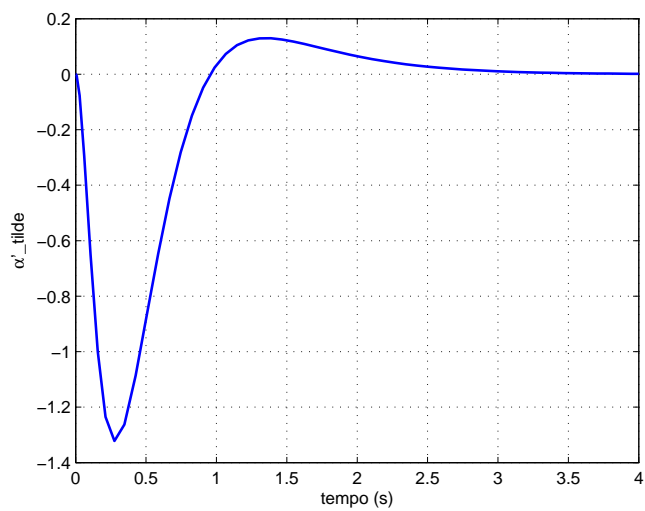


Figure 6: Andamento dello scostamento di $\dot{\alpha}$ rispetto al valore di equilibrio.

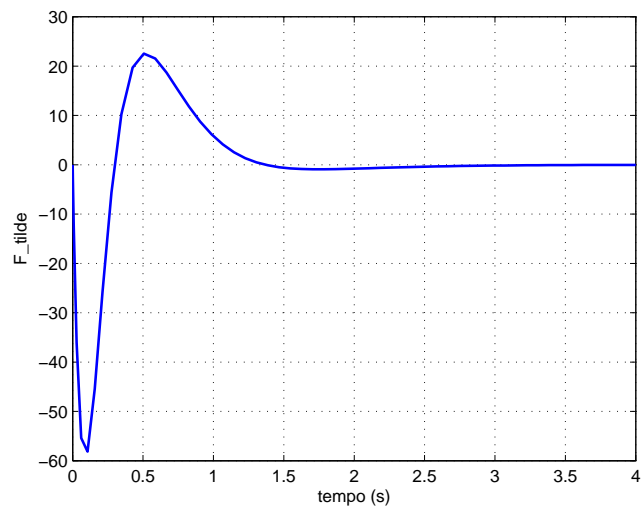


Figure 7: Andamento dello scostamento di F rispetto al valore di equilibrio.