

Si consideri il sistema meccanico in fig. 1.

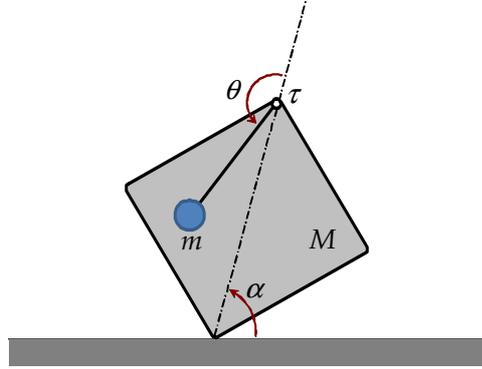


Figure 1: Sistema meccanico in esame.

Esso è costituito da un cubo di lato L , massa M e momento d'inerzia baricentrale J_1 , libero di ruotare attorno ad un suo spigolo. All'interno del cubo, sullo spigolo opposto a quello di rotazione, è incernierato un pendolo attuato, schematizzato come un'asta rigida di lunghezza l ($l \leq L$) avente massa m concentrata nella sua estremità libera. Il sistema risulta descritto dalle seguenti equazioni dinamiche

$$\begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\theta)} W(\theta) v(\alpha, \theta, \dot{\alpha}, \dot{\theta}, \tau),$$

con

$$\begin{aligned} \Delta(\theta) &= \left(J_1 + \frac{ML^2}{2} + 2mL^2 \sin^2 \theta \right) ml^2 \\ W(\theta) &= \begin{bmatrix} ml^2 & -m(l^2 + \sqrt{2}lL \cos \theta) \\ -m(l^2 + \sqrt{2}lL \cos \theta) & J_1 + \frac{ML^2}{2} + m(2L^2 + l^2 + 2\sqrt{2}lL \cos \theta) \end{bmatrix} \\ v(\alpha, \theta, \dot{\alpha}, \dot{\theta}, \tau) &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}mlL \sin \theta (2\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \dot{\theta} - \sqrt{2} \left(\frac{M}{2} + m \right) Lg \cos \alpha - mlg \cos(\alpha + \theta) \\ -\sqrt{2}mlL\dot{\alpha}^2 \sin \theta - mlg \cos(\alpha + \theta) + \tau \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dove $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \right)$ rappresenta l'angolo formato dalla diagonale del cubo rispetto all'asse orizzontale e $\theta \in \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \right]$, rappresenta l'angolo formato dal pendolo rispetto alla diagonale del cubo. Entrambi gli angoli sono misurati per convenzione in senso antiorario (vedi fig. 1).

A Posto $\alpha = \bar{\alpha}$ costante, si calcoli il generico punto di equilibrio del sistema e la corrispettiva coppia.

B Si analizzino le seguenti situazioni.

b1 Dati $m = 2M$ e $l = \frac{2}{3}L$, e supponendo di disporre dell'intero intervallo di attuazione in $\theta \in \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \right]$, individuare le posizioni di equilibrio estreme per il cubo (massimo e minimo valore dell'angolo α);

b2 Supponendo ancora di disporre dell'intero intervallo di attuazione in $\theta \in \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \right]$, con $l = \frac{2}{3}L$, calcolare il valore del rapporto $\frac{M}{m}$ che garantisca l'equilibrio per ogni valore dell'angolo $\alpha \in [\text{atan2}(7, 2), \text{atan2}(11, -2)]$.

C Si fornisca il modello del sistema linearizzato nell'equilibrio corrispondente a $\bar{\tau} = 0$.

D Sapendo che $J_1 = \frac{1}{12}ML^2$, e che $M = m$, determinare il rapporto $r_1 = \frac{l}{L}$ per il quale il sistema diviene non completamente osservabile dall'uscita θ . Utilizzando il valore r_1 appena trovato, analizzare la raggiungibilità del sistema.

E Si considerino i seguenti valori numerici: $M = m = 1$ kg, $L = l = 0.3$ m, $J_1 = 7.5 \cdot 10^{-3}$ kg m² ($J_1 = \frac{1}{12}ML^2$) e $g = 9.8$ m/s². Si progetti un compensatore basato sul regolatore che sia in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema nell'origine e si effettui una simulazione del sistema a ciclo chiuso ottenuto connettendo il controllore con il modello non lineare del sistema.

Soluzione

A Imponendo le condizioni di equilibrio ($\ddot{\theta} = \ddot{\alpha} = \dot{\theta} = \dot{\alpha} = 0$) si ha:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\theta)} W(\theta) \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \left(\frac{M}{2} + m \right) L g \cos \alpha - m l g \cos(\alpha + \theta) \\ -m g L \cos(\alpha + \theta) + \tau \end{bmatrix}$$

da cui, tenendo conto che $\det W(\theta) \neq 0$ per $\theta \in \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \right]$, si ottiene:

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} \left(\frac{M}{2} + m \right) L \cos \alpha - m l \cos(\alpha + \theta) &= 0 \\ -m g L \cos(\alpha + \theta) + \tau &= 0. \end{aligned}$$

Fissato un valore $\alpha = \bar{\alpha}$, e risolvendo le precedenti equazioni si ha

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \arccos \left(-\frac{\sqrt{2} \left(\frac{M}{2} + m \right) L \cos \bar{\alpha}}{m l} \right) - \bar{\alpha} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \bar{\tau} &= -\sqrt{2} \left(\frac{M}{2} + m \right) L g \cos \bar{\alpha}. \end{aligned}$$

Ossevazione: la relazione che esprime l'equilibrio di $\bar{\theta}$ come funzione di $\bar{\alpha}$ può essere ottenuta, per altra via, ponendo a zero la coordinata lungo l'asse delle ascisse della posizione del baricentro delle due masse. Infatti, è facile notare che l'equilibrio è garantito solo se la proiezione al suolo del baricentro delle due masse appartiene allo spigolo rispetto al quale ruota il cubo. Infatti la coordinata in questione è:

$$X_G = \frac{M x_M + m x_m}{M + m} = \frac{M \frac{\sqrt{2}}{2} L \cos \bar{\alpha} + m (\sqrt{2} L \cos \bar{\alpha} + l \cos(\bar{\alpha} + \bar{\theta}))}{M + m} = 0$$

da cui il risultato.

B

b1 Nelle ipotesi del quesito, gli estremi dell'intervallo dei valori di α per i quali è possibile garantire l'equilibrio del sistema possono essere ricavati dalla relazione che esprime l'equilibrio di $\theta = \theta(\alpha)$. Infatti, riscrivendola come

$$\cos(\bar{\alpha} + \bar{\theta}) = -\frac{\sqrt{2} \left(\frac{M}{2} + m \right) L \cos \bar{\alpha}}{m l},$$

e sostituendo le relazioni che legano le varie grandezze in gioco, si ottiene la seguente relazione:

$$\bar{\alpha} = \text{atan2} \left(8 \cos \bar{\theta} + 15\sqrt{2}, 8 \sin \bar{\theta} \right).$$

La funzione precedente, nell'intervallo di valori ammissibili per $\bar{\theta}$, è monotona crescente. Questo significa che i valori di massimo e minimo assoluto sono raggiunti in corrispondenza degli estremi dell'intervallo di $\bar{\theta}$ (in realtà non esistono massimi e minimi relativi in detto intervallo come si può vedere analizzando la derivata prima di $\bar{\alpha}$ rispetto a $\bar{\theta}$). Sostituendo nell'ultima relazione trovata il valore massimo e minimo di θ , si ottiene che

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{\min} &= \text{atan2} \left(8 \cos \bar{\theta}_{\min} + 15\sqrt{2}, 8 \sin \bar{\theta}_{\min} \right) \simeq 1.22 \text{ rad} \Rightarrow \bar{\alpha} \simeq 70^\circ \\ \bar{\alpha}_{\max} &= \text{atan2} \left(8 \cos \bar{\theta}_{\max} + 15\sqrt{2}, 8 \sin \bar{\theta}_{\max} \right) \simeq 1.92 \text{ rad} \Rightarrow \bar{\alpha} \simeq 110^\circ \end{aligned}$$

b2 In questo caso è noto il valore dell'intervallo di valori per $\bar{\alpha}$, il rapporto $\frac{l}{L}$ e l'intervallo di valori di θ che coincide ancora con il massimo ammissibile. Per determinare il rapporto $\frac{M}{m}$, è necessario considerare ancora una volta la relazione che lega θ e α all'equilibrio. Esplicitando il valore di $\frac{M}{m}$, da detta relazione si ottiene:

$$\frac{M}{m} = -\frac{4 \cos(\bar{\theta} + \bar{\alpha})}{3\sqrt{2} \cos \bar{\alpha}} - 2.$$

Sviluppando ulteriormente l'espressione precedente, si ottiene:

$$\frac{M}{m} = -\frac{4}{3\sqrt{2}} (\cos \bar{\theta} - \sin \bar{\theta} \tan \bar{\alpha}) - 2.$$

Poichè per ogni valore di $\bar{\alpha}$ nell'intervallo specificato è possibile trovare un valore della coppia di attuazione, e quindi dell'angolo $\bar{\theta}$, tale da garantire l'equilibrio, ciò sarà vero anche per i valori estremi dell'intervallo di α . Ricordando che si dispone dell'intero intervallo di attuazione, si conclude che

$$\begin{aligned} \frac{M}{m} &= -\frac{4}{3\sqrt{2}} (\cos \bar{\theta}_{\min} - \sin \bar{\theta}_{\min} \tan \bar{\alpha}_{\min}) - 2 \\ &= -\frac{4}{3\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3}{4}\pi - \frac{7}{2} \sin \frac{3}{4}\pi \right) - 2 = 1 \end{aligned}$$

(lo stesso risultato si ottiene considerando i valori massimi sia di $\bar{\theta}$ sia di $\bar{\alpha}$)

C Al fine di determinare il sistema linearizzato e poi traslato nell'equilibrio generico, definiamo il vettore delle variabili di stato $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [\alpha - \bar{\alpha}, \theta - \bar{\theta}, \dot{\alpha}, \dot{\theta}]^T$ e l'ingresso di controllo traslato $\tilde{u} = u - \bar{\tau}$. Il sistema non lineare scritto nelle nuove variabili di stato è

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_4 \\ \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_4 \end{bmatrix} &= \hat{f}(\tilde{x}, \tilde{u}) = \frac{1}{\Delta(\tilde{x}_2)} W(\tilde{x}_2) v(\tilde{x}) \end{aligned}$$

dove,

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{x}_2) &= \left(J_1 + \frac{ML^2}{2} + 2mL^2 \sin^2(\tilde{x}_2 + \bar{\theta}) \right) ml^2 \\ W(\tilde{x}_2) &= \begin{bmatrix} ml^2 & -m(l^2 + \sqrt{2}lL \cos(\tilde{x}_2 + \bar{\theta})) \\ -m(l^2 + \sqrt{2}lL \cos(\tilde{x}_2 + \bar{\theta})) & J_1 + \frac{ML^2}{2} + m(2L^2 + l^2 + 2\sqrt{2}lL \cos(\tilde{x}_2 + \bar{\theta})) \end{bmatrix} \\ v(\tilde{x}, \tilde{u}) &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}mlL \sin(\tilde{x}_2 + \bar{\theta}) (2\tilde{x}_3 + \tilde{x}_4) \tilde{x}_4 - \sqrt{2} \left(\frac{M}{2} + m \right) Lg \cos(\tilde{x}_1 + \bar{\alpha}) - mlg \cos(\tilde{x}_1 + \bar{\alpha} + \tilde{x}_2 + \bar{\theta}) \\ -\sqrt{2}mlL \tilde{x}_3^2 \sin(\tilde{x}_2 + \bar{\theta}) - mlg \cos(\tilde{x}_1 + \bar{\alpha} + \tilde{x}_2 + \bar{\theta}) + \bar{\tau} + \tilde{u} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'equilibrio associato a $\bar{\tau} = 0$ corrisponde ad $\bar{\alpha} = \frac{\pi}{2}$ e $\bar{\theta} = \pi$; indichiamo con $\bar{x} = [\frac{\pi}{2}, \pi, 0, 0]^T$ il punto di equilibrio. Al fine di trovare il linearizzato nel punto di equilibrio specificato, è necessario calcolare la seguente derivata:

$$\left. \frac{\partial \hat{f}(\tilde{x}, \tilde{u})}{\partial \tilde{x}} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=0}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{1}{\Delta(\tilde{x}_2)} W(\tilde{x}_2) v(\tilde{x}, \tilde{u}) \right) \Big|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=0}}.$$

Esplicitando rispetto a ciascuna variabile di stato e sostituendo il punto di equilibrio, si ottiene che

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \hat{f}(\tilde{x}, \tilde{u})}{\partial \tilde{x}_1} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=0}} &= \frac{1}{\Delta(\bar{x})} W(\bar{x}) \begin{bmatrix} \left(\frac{M}{2} + m \right) \sqrt{2}Lg - mlg \\ -mlg \end{bmatrix} \\ \left. \frac{\partial \hat{f}(\tilde{x}, \tilde{u})}{\partial \tilde{x}_2} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=0}} &= -\frac{1}{\Delta(\bar{x})} W(\bar{x}) \begin{bmatrix} mlg \\ mlg \end{bmatrix} \\ \left. \frac{\partial \hat{f}(\tilde{x}, \tilde{u})}{\partial \tilde{x}_3} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=0}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \left. \frac{\partial \hat{f}(\tilde{x}, \tilde{u})}{\partial \tilde{x}_4} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=0}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nelle relazioni appena scritte si è tenuto conto del fatto che

$$\left. \frac{\partial W(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_2} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=0}} = 0_{2 \times 2}$$

$$\left. \frac{\partial \Delta(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_2} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=0}} = 0.$$

Si ottiene, infine, il seguente sistema linearizzato nell'equilibrio \bar{x} ,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_4 \\ \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta(\bar{x})} W(\bar{x}) \begin{bmatrix} (\frac{M}{2} + m) \sqrt{2} L g - m l g & -m l g & 0 & 0 \\ -m l g & -m l g & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta(\bar{x})} W(\bar{x}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{u} \end{aligned}$$

dove

$$\Delta(\bar{x}) = \left(J_1 + \frac{M L^2}{2} \right) m l^2$$

$$W(\bar{x}) = \begin{bmatrix} m l^2 & -m(l^2 - \sqrt{2} l L) \\ -m(l^2 - \sqrt{2} l L) & J_1 + \frac{M L^2}{2} + m(2L^2 + l^2 - 2\sqrt{2} l L) \end{bmatrix}$$

Il sistema linearizzato è quindi descritto dalle seguenti equazioni differenziali,

$$\dot{\tilde{x}} = A \tilde{x} + B \tilde{u}$$

dove,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

con,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sqrt{2} L M g}{M L^2 + 2 J_1} & a_2 &= -\frac{2 \sqrt{2} L m g}{M L^2 + 2 J_1} \\ a_3 &= -\frac{g(\sqrt{2} M l L - M L^2 + 2 J_1)}{l(M L^2 + 2 J_1)} & a_4 &= -\frac{g(2 J_1 + 4 L^2 m + L^2 M - 2 \sqrt{2} l L m)}{l(M L^2 + 2 J_1)} \\ b_1 &= -\frac{2(l - \sqrt{2} L)}{l(M L^2 + 2 J_1)} \\ b_2 &= \frac{2 J_1 + 4 L^2 m + 2 l^2 m + L^2 M - 4 \sqrt{2} l L m}{l^2 m(M L^2 + 2 J_1)}. \end{aligned}$$

D Per determinare la condizione per la quale il sistema diviene non completamente osservabile, è opportuno analizzare il determinante della matrice di osservabilità $O = [C, CA, CA^2, CA^3]^T$ con $C = [0, 1, 0, 0]$, valutando l'eventuale valore del rapporto $\frac{l}{L}$ che lo annulla. Per semplificare i calcoli, consideriamo le matrici A e B in (1) ed esplicitiamo la matrice O ,

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è facilmente calcolabile:

$$\det(O) = -a_3^2 = -\left(-\frac{g(\sqrt{2} M l L - M L^2 + 2 J_1)}{l(M L^2 + 2 J_1)} \right)^2,$$

tenendo conto che $J_1 = \frac{1}{12}ML^2$ e che $M = m$, si ottiene

$$\det(O) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = -\frac{g(6\sqrt{2}l - 5L)}{7lL} = 0.$$

In definitiva, il sistema perde in osservabilità se il rapporto $\frac{l}{L} = \frac{5\sqrt{2}}{12}$.

Per verificare se, tenendo conto che $J_1 = \frac{1}{12}ML^2$, $M = m$ e $l = \frac{5\sqrt{2}}{12}L$, il sistema perde anche di raggiungibilità, calcoliamo il determinante della matrice di raggiungibilità:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & a_1b_1 + a_2b_2 \\ 0 & b_2 & 0 & a_3b_1 + a_4b_2 \\ b_1 & 0 & a_1b_1 + a_2b_2 & 0 \\ b_2 & 0 & a_3b_1 + a_4b_2 & 0 \end{bmatrix},$$

la quale, dopo aver effettuato le opportune sostituzioni, diviene:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{6Ml^2} & 0 & -\frac{5}{2Ml^3} \\ 0 & \frac{13g}{6Ml^2} & 0 & -\frac{13g}{2Ml^3} \\ \frac{5}{6Ml^2} & 0 & -\frac{5}{2Ml^3} & 0 \\ \frac{13g}{6Ml^2} & 0 & -\frac{13g}{2Ml^3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcolando il determinante è facile verificare che la condizione per la quale il sistema perde di osservabilità, è in grado di rendere il sistema anche non completamente raggiungibile ($\det(R) = 0$, infatti le colonne della matrice di raggiungibilità sono a coppie linearmente dipendenti).

E Sostituendo i valori numerici, si ottengono le seguenti matrici per il sistema linearizzato:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 39.60 & 79.20 & 0 & 0 \\ -16.26 & -65.47 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.89 \\ 14.38 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0].$$

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -7.12$, $\lambda_2 = 7.12$ e $\lambda_{2,3} = \pm j8.75$. Il sistema presenta un polo reale instabile che comporta un modo proprio non convergente di tipo esponenziale. È tuttavia facile verificare la completa raggiungibilità ed osservabilità di questo sistema. Infatti, la matrice di raggiungibilità è

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 7.89 & 0 & -826.35 \\ 0 & 14.38 & 0 & -1069.74 \\ 7.89 & 0 & -826.35 & 0 \\ 14.38 & 0 & -1069.74 & 0 \end{bmatrix}$$

mentre quella di osservabilità è

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16.26 & -65.47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16.26 & -65.47 \end{bmatrix}$$

i cui determinanti sono entrambi diversi da zero. Si nota come tali risultati siano coerenti con l'analisi effettuata al punto precedente. Possiamo, dunque, progettare un compensatore basato su regolatore, in modo da rendere il sistema asintoticamente stabile nell'equilibrio specificato. Calcoliamo la matrice K di retroazione degli stati in modo da allocare i poli del sistema in anello chiuso, cioè gli autovalori della matrice $A - BK$, in $p = [-7 + j7, -7 - j7, -6, -8]$. Utilizzando la funzione di Matlab, $K = \text{place}(A, B, p)$, si ottiene:

$$K = [-99.94 \quad 76.82 \quad -14.21 \quad 9.75].$$

Poichè non si ha accesso a tutte le variabili di stato si procederà realizzando un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. Ciò è possibile in quanto, con i valori numerici considerati, il sistema risulta completamente osservabile dall'uscita $\hat{\theta} = \theta - \bar{\theta}$. La matrice L di iniezione delle


```

dot_x3_tilde = (1/Delta)*W(1,:)*V;
dot_x4_tilde = (1/Delta)*W(2,:)*V;

% Uscite del blocco
out(1) = dot_x1_tilde;
out(2) = dot_x2_tilde;
out(3) = dot_x3_tilde;
out(4) = dot_x4_tilde;

```

dove lo *script* `ParametriSistema` contiene i valori numerici di tutti i parametri del sistema e il punto di equilibrio. Il blocco `controllore` contiene le matrici del regolatore precedentemente progettato. Per una valutazione del controllore progettato, consideriamo l'evoluzione del sistema a ciclo chiuso a partire da condizioni iniziali $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [10^{-3}, 2 \cdot 10^{-4}, 0, 0]^T$. Le figure 3, 4, 5, 6 riportano l'andamento dello scostamento dal punto di equilibrio delle variabili $\alpha, \theta, \dot{\alpha}, \dot{\theta}$ rispettivamente. Nella figura 7 è, invece, rappresentato l'andamento della coppia di controllo τ rispetto al suo valore di equilibrio.

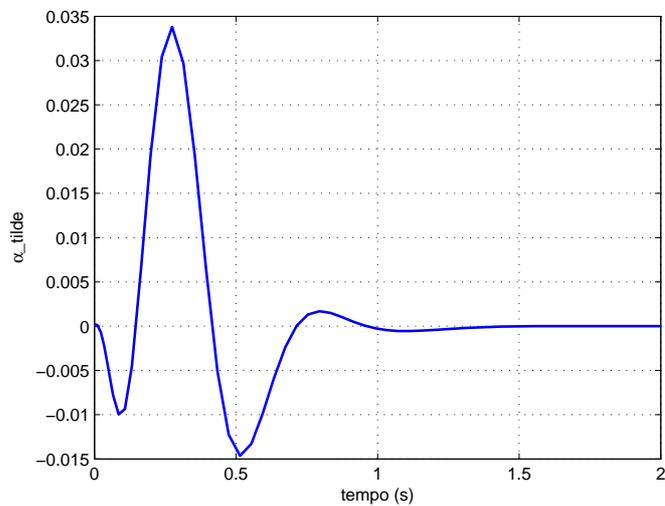


Figure 3: Andamento dello scostamento di α rispetto al valore di equilibrio.

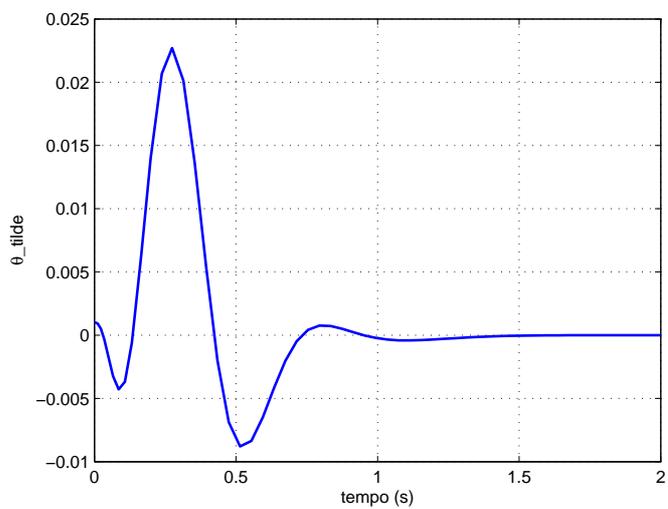


Figure 4: Andamento dello scostamento di θ rispetto al valore di equilibrio.

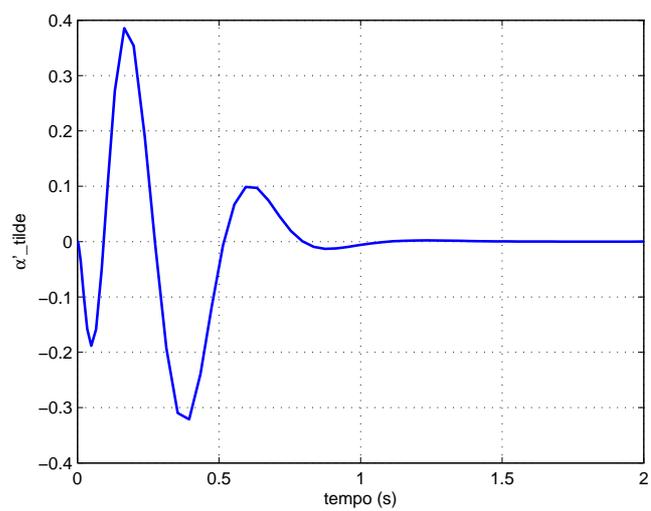


Figure 5: Andamento dello scostamento di α rispetto al valore di equilibrio.

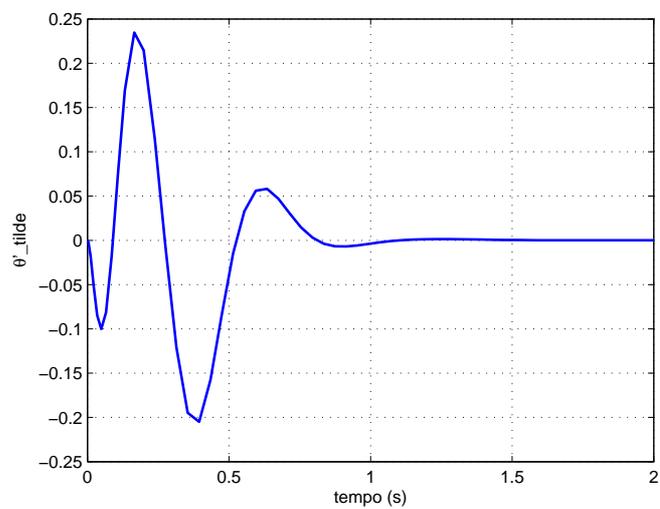


Figure 6: Andamento dello scostamento di $\dot{\theta}$ rispetto al valore di equilibrio.

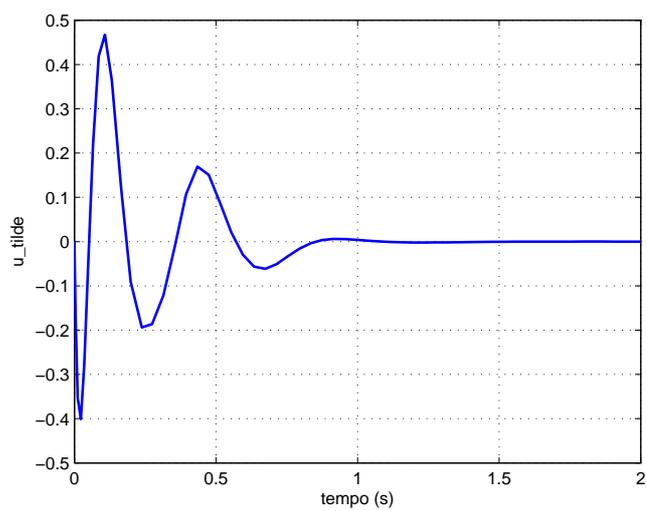


Figure 7: Andamento dello scostamento di τ rispetto al valore di equilibrio.