

Quesito 1

Si consideri il sistema meccanico in figura 1, impiegato per effettuare test in trazione su molle lineari, e costituito da un braccio di massa m , che si suppone concentrata nella sua estremità, e di lunghezza L .

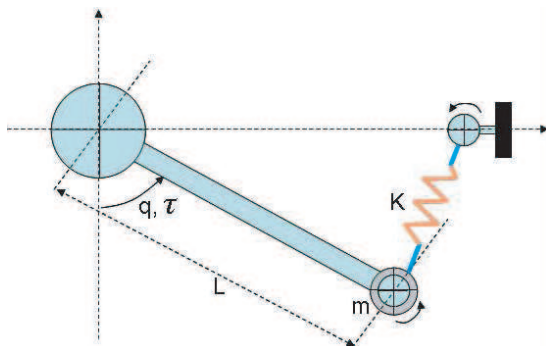


Figura 1: Modello del sistema.

La molla, di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, è collegata ai suoi estremi al braccio e ad un supporto rigido mediante giunti rotoidali privi di attrito. Indicando con q l'angolo formato dal braccio con l'asse verticale e con τ la coppia di controllo al giunto, la dinamica del sistema può essere espressa dalla seguente equazione:

$$mL^2\ddot{q} + mgL \sin q = \tau + kL^2 \cos q.$$

Si dispone della misura della forza F_m , che è legata alle variabili di configurazione del sistema dalla relazione $F_m = \sqrt{2}kL\sqrt{1 - \sin q}$.

Si consideri il punto di equilibrio con ingresso nullo ($\tau = 0$) $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$. Il sistema linearizzato in un suo intorno è descritto, in coordinate traslate $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T = (q - \bar{x}_1, \dot{q} - \bar{x}_2)^T$, dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= - \left(\frac{k}{m} \sin \bar{x}_1 + \frac{g}{L} \cos \bar{x}_1 \right) \tilde{x}_1 + \frac{\tau}{mL^2} \\ y &= - \frac{1}{\sqrt{2}} kL \frac{\cos \bar{x}_1}{\sqrt{1 - \sin \bar{x}_1}} \tilde{x}_1. \end{aligned}$$

- 1.A** Dati i seguenti valori numerici: $m = 10$ kg, $L = 1$ m, $k = 98$ N/m e $g = 9.8$ m/s², si valuti la stabilizzabilità del sistema e si progetti un compensatore, che usi solo la misura della uscita, che stabilizzi asintoticamente il sistema nell'equilibrio $\bar{x}_1 = \frac{\pi}{4} + \pi$, $\bar{x}_2 = 0$;
- 1.B** Si effettui una simulazione del sistema a ciclo chiuso ottenuto connettendo il controllore con il modello non lineare del sistema;
- 1.C** Supponendo di avere accesso all'intero stato, si progetti un controllore alla Lyapunov in grado di rendere l'equilibrio globalmente asintoticamente stabile;
- 1.D** Si effettui una simulazione del sistema a ciclo chiuso ottenuto connettendo il controllore alla Lyapunov con il modello non lineare del sistema.

Soluzione

1.A Sostituendo i valori numerici, si ottengono le seguenti equazioni per il sistema linearizzato:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + Bu \\ y &= C\tilde{x},\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.8\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} \frac{9.8}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico di A è dato da $\lambda^2 - 9.8\sqrt{2}$, dunque esso ammetterà due radici reali di cui una positiva. Il sistema è quindi esponenzialmente instabile. È facile verificare che il sistema è completamente raggiungibile

$$R = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix},$$

quindi sicuramente stabilizzabile. Altrettanto facilmente si verifica la sua completa osservabilità. Possiamo progettare un compensatore basato su regolatore, in modo da rendere il sistema asintoticamente stabile nell'equilibrio specificato. Calcoliamo la matrice K di retroazione degli stati in modo da allocare i poli del sistema a ciclo chiuso, cioè gli autovalori della matrice $A - BK$, in $p = [-10 \quad -15]$. Utilizzando la funzione di Matlab $K = \text{place}(A, B, p)$, si ottiene:

$$K = 10^3 [1.6386 \quad 0.25].$$

Poiché non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile dall'uscita F_m , si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice L di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore $A - LC$ abbia autovalori $q = 2p$. Sempre impiegando il comando Matlab $L = \text{transpose}(\text{place}(A', C', q))$ si ottiene:

$$L = \begin{bmatrix} 1.3332 \\ 16.3683 \end{bmatrix}.$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica $K(sI - A + BK + LC)^{-1}L$ e si costruisce con il comando $\text{rsys} = \text{ss}(A - B*K - L*C, L, K, 0)$ ovvero, a meno di un segno, con $\text{rsys} = \text{reg}(\text{sys}, K, L)$, ove $\text{sys} = \text{ss}(A, B, C, 0)$.

1.B La dinamica del sistema non lineare espressa in variabili di stato traslate è la seguente:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \frac{k}{m} \cos(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) - \frac{g}{L} \sin(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) + \frac{\tau}{mL^2} \\ \tilde{y} &= y - \bar{y} = \sqrt{2}kL \left(\sqrt{1 - \sin(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1)} - \sqrt{1 - \sin(\bar{x}_1)} \right).\end{aligned}$$

Uno schema Simulink del sistema stabilizzato, rappresentato rispetto a variabili traslate, è riportato in figura 2.

Il blocco Simulink **Sistema non lineare in variabili traslate** contiene la seguente funzione:

```
function out = SistemaNONLineare(in)

% Ingressi del blocco
x1_tilde = in(1);
x2_tilde = in(2);
u_tilde = in(3);

% Costanti del sistema e punto di equilibrio
ParametriSistema;
```

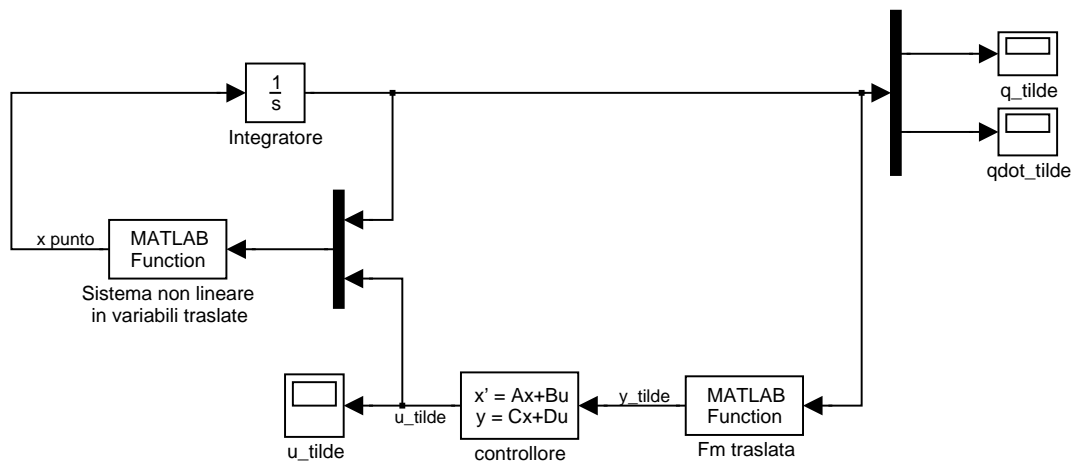


Figura 2: Schema Simulink del sistema non lineare stabilizzato con controllore lineare. Il sistema è rappresentato rispetto a variabili traslate.

```
% Dinamica del sistema
dot_x1_tilde = x2_tilde;
dot_x2_tilde = k/m*cos(x1_tilde + x1bar)-g/L*sin(x1_tilde + x1bar) ...
              +(u_tilde + 0)/(m*L^2);

% Uscite del blocco
out(1) = dot_x1_tilde;
out(2) = dot_x2_tilde;
```

dove lo *script* `ParametriSistema` contiene i valori numerici di tutti i parametri del sistema e il punto di equilibrio. Il blocco `controllore` contiene le matrici del regolatore precedentemente progettato. L'uscita \tilde{y} è legata non linearmente alle variabili di stato, pertanto si fa uso del blocco chiamato `Fm traslata` per generarla. (È importante rammentare che il controllore lineare è progettato rispetto alle variabili traslate, pertanto anche l'uscita dovrà essere traslata). La funzione che calcola tale uscita è la seguente:

```
function out = UscitaNONLineare(in)

% Ingressi del blocco
x1_tilde = in(1);
x2_tilde = in(2);

% Costanti del sistema e punto di equilibrio
ParametriSistema;

% Uscita del sistema traslata
Fm = sqrt(2)*k*L*sqrt(1-sin(x1_tilde + x1bar))-sqrt(2)*k*L*sqrt(1-sin(x1bar));

% Uscite del blocco
out = Fm;
```

Uno schema alternativo del sistema è riportato in figura 3. In esso le traslazioni delle variabili e del controllo sono effettuate esternamente ai blocchi che traducono la dinamica del sistema non lineare e l'uscita. Questo schema è più attinente alla realtà del precedente, poiché il sistema non lineare fornisce la propria uscita di misura in variabili assolute e riceve in ingresso il controllo totale


```
% Uscite del blocco
out = Fm;
```

Per valutare il controllore lineare, consideriamo l'evoluzione del sistema a ciclo chiuso a partire da condizioni iniziali $[\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}]^T = [1, 0]^T$. Le figure 4 e 5 riportano l'andamento dello scostamento dal punto di equilibrio delle variabili q e \dot{q} rispettivamente.

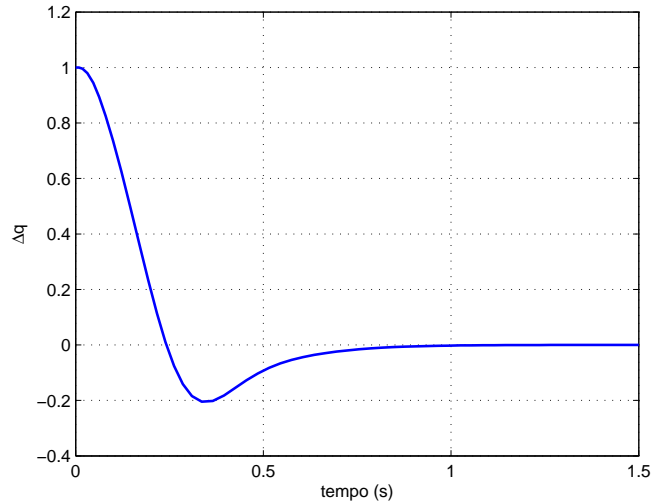


Figura 4: Andamento dello scostamento di q rispetto al valore di equilibrio.

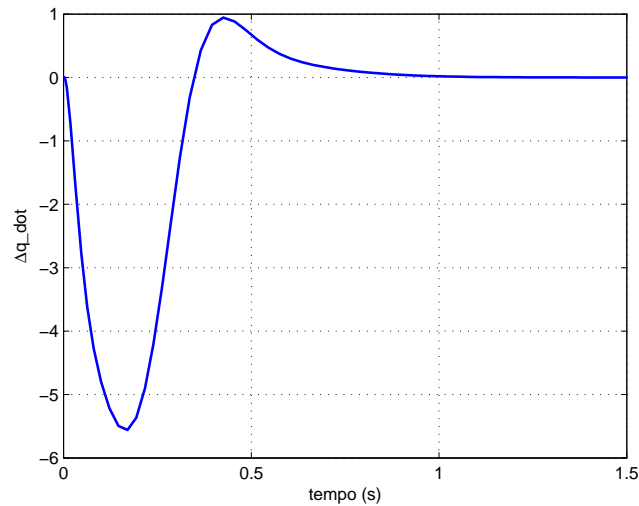


Figura 5: Andamento dello scostamento di \dot{q} rispetto al valore di equilibrio.

Nella figura 6, invece, è riportato l'andamento della coppia τ rispetto al suo valore di equilibrio.

1.C Per progettare un controllore alla Lyapunov facciamo uso della candidata $V = \frac{1}{2} (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2)$, che è radialmente illimitata. Ricordando che $\dot{V} = L_f V + L_g V u$, cerchiamo di progettare u in modo che \dot{V}

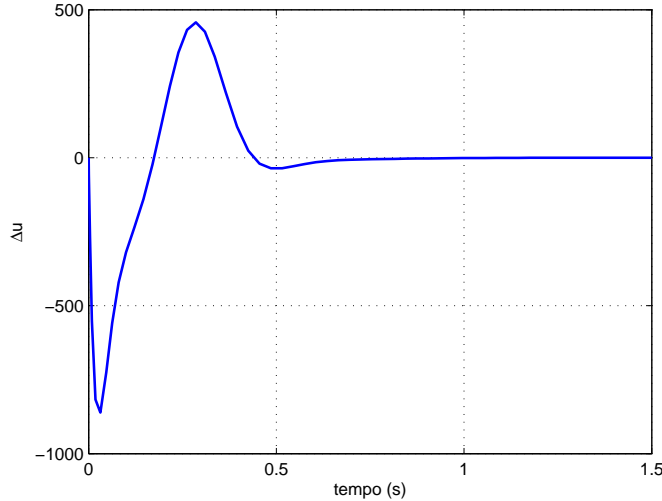


Figura 6: Andamento della coppia τ rispetto al suo valore di equilibrio.

risulti definita negativa. Nel nostro caso si ha $L_f V = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_2 \left(\frac{k}{m} \cos(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) - \frac{g}{L} \sin(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) \right) = \tilde{x}_2 \left(\tilde{x}_1 + \frac{k}{m} \cos(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) - \frac{g}{L} \sin(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) \right)$ e $L_g V = \frac{\tilde{x}_2}{mL^2}$. La legge di controllo

$$u = -\frac{L_f V + 2\tilde{x}_2^2}{L_g V} = -mL^2 \left(\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + \frac{k}{m} \cos(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) - \frac{g}{L} \sin(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) \right),$$

rende \dot{V} solo semidefinita negativa:

$$\dot{V} = -2\tilde{x}_2^2.$$

Analizziamo, però, il sistema soggetto a tale legge di controllo:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 \end{aligned}$$

Esso è un sistema lineare la cui matrice dinamica è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

e dunque asintoticamente stabile con autovalori $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{7}i)$.

Il controllore alla Lyapunov è in grado di rendere l'equilibrio del sistema globalmente asintoticamente stabile. Nel caso specifico ha anche il merito di aver effettuato una linearizzazione esatta e globale del sistema.

1.D Uno schema Simulink del sistema stabilizzato con il controllore alla Lyapunov è riportato in figura 7.

Il blocco Simulink **Sistema non lineare** è identico a quello del precedente schema, mentre il blocco **controllore Lyapunov** contiene la seguente funzione:

```
function out = ControlloreLyapunov(in)

% Ingressi del blocco
x1_tilde = in(1);
x2_tilde = in(2);

% Costanti del sistema e punto di equilibrio
ParametriSistema;

% Uscita del sistema traslata
```

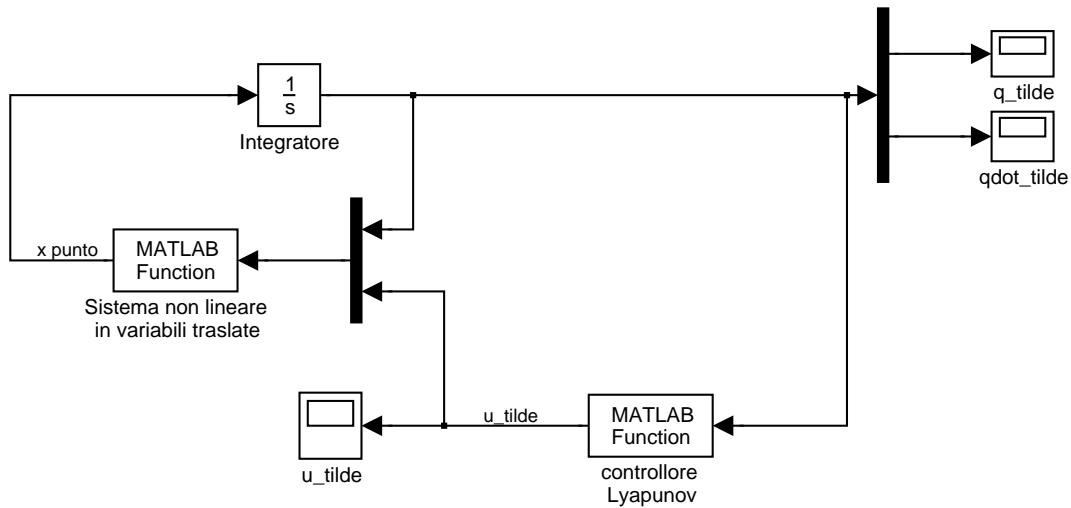


Figura 7: Schema Simulink del sistema non lineare stabilizzato con controllore alla Lyapunov.

```
tau = -m*L^2*(x1_tilde+k/m*cos(x1_tilde + x1bar)-g/L*sin(x1_tilde + x1bar)+2*x2_tilde);

% Uscite del blocco
out = tau;
```

Per valutare l'andamento del controllore alla Lyapunov consideriamo l'evoluzione del sistema a ciclo chiuso a partire da condizioni iniziali $[\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}]^T = [2, 0]^T$. Si fa notare che per dette condizioni iniziali il sistema a ciclo chiuso con il controllore lineare risulta instabile. Le figure 8 e 9 riportano l'andamento dello scostamento dal punto di equilibrio delle variabili q e \dot{q} rispettivamente.

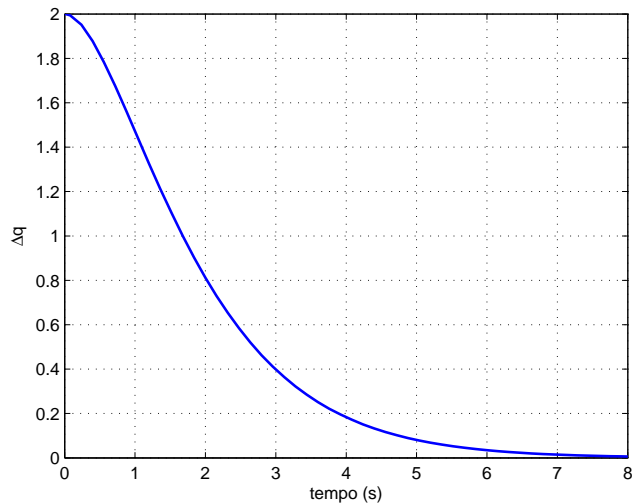


Figura 8: Andamento dello scostamento di q rispetto al valore di equilibrio.

Nella figura 10, invece, è riportato l'andamento della coppia τ rispetto al suo valore di equilibrio.

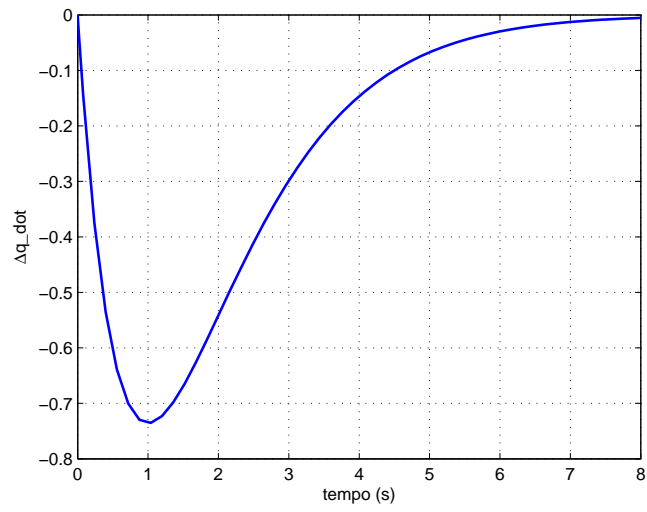


Figura 9: Andamento dello scostamento di \dot{q} rispetto al valore di equilibrio.

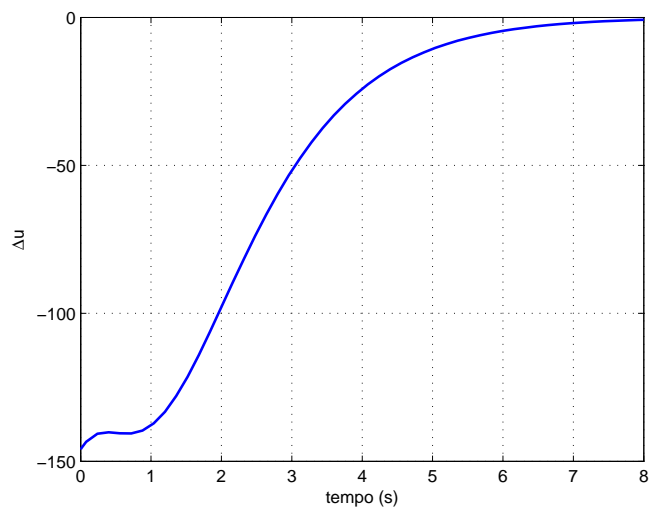


Figura 10: Andamento della coppia τ rispetto al suo valore di equilibrio.