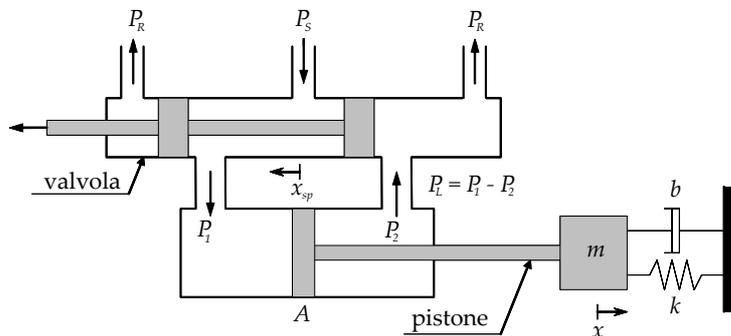


## Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 18-6-2007

Si consideri il modello dinamico di un attuatore elettroidraulico come in figura.



Modello di un attuatore elettroidraulico

NOME	SIMBOLO	VALORE	UNITÀ
Massa attuatore e carico	$m$	24	kg
Costante elastica	$k$	16010	N/m
Costante di smorzamento	$b$	300	N s/m
Pressione di alimentazione	$P_s$	$1.034 \cdot 10^7$	Pa = N/m <sup>2</sup>
Volume totale dell'attuatore	$V_t$	$6.535 \cdot 10^{-5}$	m <sup>3</sup>
Modulo di compressibilità effettiva	$\beta_e$	$10^9$	Pa
Area del pistone	$A$	$3.2673 \cdot 10^{-4}$	m <sup>2</sup>
Coefficiente di scarico	$c_d$	0.6	
Gradiente d'area della valvola	$w$	0.022	m
Densità di massa del fluido	$\rho$	840	kg/m <sup>3</sup>
Costante di tempo della valvola	$\tau$	0.011	s
Guadagno statico della valvola	$K_s$	$3.8 \cdot 10^{-2}$	m/A

Parametri fisici dell'attuatore elettroidraulico

Il sistema consiste di un'elettrovalvola controllata in corrente e di un pistone cui è applicato un carico dinamico modellato come un sistema massa-molla-smorzatore. L'elettrovalvola varia la pressione nel cilindro del pistone aprendo e chiudendo i condotti del fluido. Un modello matematico in grado di descrivere la dinamica del sistema complessivo è fornito di seguito:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{m} (AP_L - bv - kx) \\ \dot{P}_L &= \frac{1}{C} \left( -Av + \frac{c_d w}{\sqrt{\rho}} x_{sp} \sqrt{P_s - \text{sgn}(x_{sp}) P_L} \right) \\ \dot{x}_{sp} &= \frac{1}{\tau} (-x_{sp} + K_s u), \end{aligned}$$

dove  $x$  rappresenta la posizione della massa  $m$ ,  $v$  la sua velocità,  $P_L$  la pressione di carico,  $x_{sp}$  la posizione del corpo dell'elettrovalvola,  $u$  la corrente elettrica di controllo e  $C = \frac{V_t}{4\beta_e}$  la cedevolezza idraulica del sistema con la valvola in posizione centrale. Si fa notare che la posizione centrale dell'elettrovalvola ( $x_{sp} = 0$ ) è quella di riposo e prevede che tutti i condotti siano chiusi. Si assume convenzionalmente che la funzione segno sia nulla nell'origine ( $\text{sgn}(0) \triangleq 0$ ).

- A** Si determinino i punti di equilibrio del sistema e gli ingressi corrispondenti e si fornisca una interpretazione fisica;
- B** Si determini il linearizzato attorno all'equilibrio nell'origine con ingresso nominale nullo. A tal fine si sostituisca, nell'intorno dell'origine, la funzione  $\text{sgn}(\alpha)$  con la funzione lineare  $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon$  piccolo;
- C** Si studi la raggiungibilità del sistema e la sua osservabilità supponendo di disporre, alternativamente, solo di una misura della posizione della massa  $x$  o solo della posizione della valvola  $x_{sp}$  e se ne dia una interpretazione fisica;

- D** Si progetti un compensatore basato sul regolatore che, usando la misura della posizione  $x$ , sia in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema nell'equilibrio nell'origine. Si impieghino i valori numerici riportati in tabella;
- E** Si effettui una simulazione del sistema a ciclo chiuso ottenuto connettendo il controllore progettato al punto precedente con il modello non lineare del sistema. Si fornisca inoltre una stima delle condizioni iniziali a partire dalle quali tale controllore è capace di garantire la convergenza del sistema alla configurazione desiderata.

## Soluzione

**A** Imponendo le condizioni di equilibrio si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= v \\ 0 &= \frac{1}{m} (AP_L - kx) \\ 0 &= \frac{c_d w}{C\sqrt{\rho}} x_{sp} \sqrt{P_s - \text{sgn}(x_{sp})P_L} \\ 0 &= \frac{1}{\tau} (-x_{sp} + K_s u), \end{aligned}$$

da cui si discernono i casi  $x_{sp} = 0$  e  $x_{sp} \neq 0$ . Nel caso  $x_{sp} = 0$  la variabile  $P_L$  può assumere valori arbitrari (purché limitati da  $P_L \leq \text{sgn}(x_{sp})P_s$ ) come si evince dalla terza equazione. Dalla quarta è facile concludere che l'unico valore ammissibile per la variabile di controllo è  $u = 0$ . Poiché la seconda equazione è in due incognite, una di esse deve essere espressa in funzione dell'altra che può essere fissata arbitrariamente. Al fine di avere una interpretazione fisica più significativa, consideriamo la variabile posizionale  $x$  fissata arbitrariamente ( $x = \bar{x}$ ). L'equilibrio è dunque dato da:

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} \\ v &= 0 \\ P_L &= \frac{k}{A} \bar{x} \\ x_{sp} &= 0 \\ u &= 0. \end{aligned}$$

Questo equilibrio corrisponde ad una condizione di bilanciamento tra la forza esercitata tramite la pressione  $P_L$  e la molla di costante  $k$ . Pertanto ogni posizione della massa  $m$ , nell'intervallo di escursione ad essa consentito, è punto di equilibrio cui corrisponde un valore di pressione  $P_L$ . La corrente di controllo  $u$  è nulla poiché il corpo dell'elettrovalvola è in posizione di riposo  $x_{sp} = 0$ . Gli altri equilibri si ottengono fissando per  $x_{sp}$  valori arbitrari non nulli (positivi e negativi):

$$\begin{aligned} x &= \frac{A}{k} P_s & x &= -\frac{A}{k} P_s \\ v &= 0 & v &= 0 \\ P_L &= P_s & P_L &= -P_s \\ x_{sp} &= x_{sp}^+ > 0 & x_{sp} &= x_{sp}^- < 0 \\ u &= \frac{x_{sp}^+}{K_s} & u &= \frac{x_{sp}^-}{K_s}. \end{aligned} \quad \text{e}$$

Entrambe le condizioni corrispondono a posizioni decentrate del corpo dell'elettrovalvola e richiedono, pertanto, l'azione di un controllo costante non nullo. I due equilibri corrispondono alle condizioni limite in cui la pressione di carico  $P_L$  assume i valori  $\pm P_s$ . La massa  $m$  si trova, di conseguenza, in due posizioni speculari dell'escursione della molla.

**B** Poiché l'equilibrio è nell'origine e richiede controllo nullo, non è necessaria alcuna traslazione del sistema. Riscriviamo le equazioni della dinamica rispetto alle variabili di stato  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [x \ v \ P_L \ x_{sp}]^T$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m} (Ax_3 - bx_2 - kx_1) \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{C} \left( -Ax_2 + \frac{c_d w}{\sqrt{\rho}} x_4 \sqrt{P_s - \text{sgn}(x_4)x_3} \right) \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{\tau} (-x_4 + K_s u). \end{aligned}$$

Rammentando la sostituzione della funzione segno consigliata, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( x_4 \sqrt{P_s - \text{sgn}(x_4)x_3} \right) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ u=0}} &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_3} \left( x_4 \sqrt{P_s - \frac{x_4}{\varepsilon} x_3} \right) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ u=0}} \\ &= x_4 \frac{-\frac{x_4}{\varepsilon}}{2\sqrt{P_s - \frac{x_4}{\varepsilon} x_3}} \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ u=0}} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_4} \left( x_4 \sqrt{P_s - \text{sgn}(x_4)x_3} \right) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ u=0}} &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_4} \left( x_4 \sqrt{P_s - \frac{x_4}{\varepsilon} x_3} \right) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ u=0}} \\ &= \sqrt{P_s - \frac{x_4}{\varepsilon} x_3} + x_4 \frac{-\frac{x_3}{\varepsilon}}{2\sqrt{P_s - \frac{x_4}{\varepsilon} x_3}} \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ u=0}} = \sqrt{P_s}. \end{aligned}$$

Da cui si ottengono facilmente le matrici di sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} & \frac{A}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{A}{C} & 0 & \frac{c_d w \sqrt{P_s}}{C\sqrt{\rho}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_s}{\tau} \end{bmatrix}.$$

**C** Calcolando la matrice di raggiungibilità ( $R = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$ ) si ottiene

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{A K_s c_d w \sqrt{P_s}}{m \tau C \sqrt{\rho}} \\ 0 & 0 & \frac{A K_s c_d w \sqrt{P_s}}{m \tau C \sqrt{\rho}} & -\frac{A K_s c_d w \sqrt{P_s}}{m \tau C \sqrt{\rho}} \left( \frac{b}{m} + \frac{1}{\tau} \right) \\ 0 & \frac{K_s c_d w \sqrt{P_s}}{\tau C \sqrt{\rho}} & -\frac{K_s c_d w \sqrt{P_s}}{\tau^2 C \sqrt{\rho}} & \frac{K_s c_d w \sqrt{P_s}}{\tau C \sqrt{\rho}} \left( \frac{1}{\tau^2} - \frac{A^2}{Cm} \right) \\ \frac{K_s}{\tau} & -\frac{K_s}{\tau^2} & \frac{K_s}{\tau^3} & -\frac{K_s}{\tau^4} \end{bmatrix},$$

che risulta evidentemente a rango pieno. Il sistema è quindi completamente raggiungibile tramite la corrente di controllo dell'elettrovalvola.

Per ciò che concerne l'osservabilità del sistema dalla misura della posizione  $x$  della massa  $m$ , si ha:

$$\begin{aligned} C_1 &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\ O_1 &= \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A \\ C_1 A^2 \\ C_1 A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} & \frac{A}{m} & 0 \\ \frac{bk}{m^2} & -\frac{k}{m} + \frac{b^2}{m^2} - \frac{A^2}{Cm} & -\frac{bA}{m^2} & \frac{A c_d w \sqrt{P_s}}{m C \sqrt{\rho}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\det O = \frac{A^2 c_d w \sqrt{P_s}}{m^2 C \sqrt{\rho}} \neq 0$ . Il sistema è quindi completamente osservabile dalla variabile  $x$ .

Utilizzando come uscita una misura della variabile  $x_{sp}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} C_2 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \\ O_2 &= \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A \\ C_2 A^2 \\ C_2 A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau^3} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

la quale ha evidentemente rango 1. Il sistema non è quindi completamente osservabile dalla misura della posizione del corpo dell'elettrovalvola. Questo risultato era facilmente prevedibile dall'analisi del sistema non lineare. L'elettrovalvola ha infatti una dinamica del primo ordine influenzata dal solo controllo e indipendente dal resto del sistema. Non è quindi possibile risalire allo stato completo del sistema dalla sola misura di  $x_{sp}$ .

**D** Sostituendo i valori numerici riportati nella tabella, si ottengono le seguenti matrici per il sistema linearizzato:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6.671 \cdot 10^2 & -12.5 & 1.361 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & -1.99988 \cdot 10^{10} & 0 & 8.96414674 \cdot 10^{13} \\ 0 & 0 & 0 & -90.909 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.455 \end{bmatrix}.$$

Il sistema è solo semplicemente stabile poiché vi è un autovalore nullo. Applichiamo la tecnica di progetto del regolatore nello spazio di stato allo scopo di ottenere un sistema asintoticamente stabile.

Progettiamo una retroazione statica degli stati  $K$  in grado di allocare i poli del sistema a ciclo chiuso in  $p = [-200 \quad -250 \quad -300 - 300i \quad -300 + 300i]$ . Utilizzando la funzione di Matlab  $K = \text{place}(A,B,p)$  è possibile calcolare la matrice dei guadagni  $K$ . Si ottiene:

$$K = [2.105 \quad -0.04148 \quad 6.94 \cdot 10^{-10} \quad 2.7424 \cdot 10^2].$$

Poiché non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile dall'uscita  $x$ , si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice  $L$  di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore  $A - LC_1$  abbia autovalori  $q = 2p$ . Sempre impiegando il comando Matlab  $L = \text{transpose}(\text{place}(A',C_1',q))$  si ottiene:

$$L = \begin{bmatrix} 8.875 \cdot 10^2 \\ 1.882 \cdot 10^5 \\ -1.5758 \cdot 10^{12} \\ 28.154 \end{bmatrix}.$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica  $K(sI - A + BK + LC_1)^{-1}L$  e si costruisce con il comando  $\text{rsys} = \text{ss}(A-B*K-L*C_1,L,K,0)$  ovvero, a meno di un segno, con  $\text{rsys} = \text{reg}(\text{sys},K,L)$ , ove  $\text{sys} = \text{ss}(A,B,C_1,0)$ .

Si nota come la presenza di valori numerici con scale molto diverse renda malcondizionata la matrice  $A$ . Come conseguenza, il piazzamento dei poli del sistema a ciclo chiuso e dell'osservatore non sarà esatto a causa di problemi numerici, come lo stesso Matlab segnala. Inoltre la scarsa osservabilità (anche  $O_1$  è fortemente malcondizionata) forza la matrice di iniezione delle uscite ad avere valori molto elevati.

**E** Uno schema Simulink del sistema stabilizzato è riportato in figura 1.

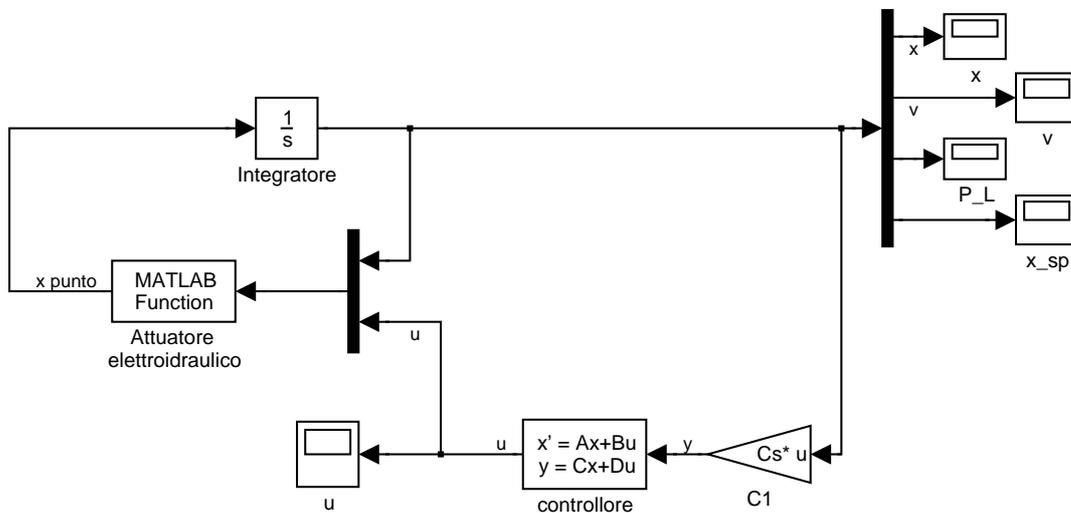


Figure 1: Schema Simulink del sistema stabilizzato con controllore lineare.

Il blocco Simulink Attuatore elettroidraulico contiene la seguente funzione:

```
function out = SistemaNONLineare(in)

% Ingressi del blocco
x1 = in(1);
x2 = in(2);
x3 = in(3);
```

```

x4 = in(4);
u = in(5);

% Parametri sistema
ParametriSistema

% Equilibrio nell'origine: non \{e} necessaria traslazione

% Dinamica del sistema
dot_x1 = x2;
dot_x2 = 1/m*(A*x3-b*x2-k*x1);
dot_x3 = 1/C*(-A*x2+Cd*w/sqrt(rho)*x4*sqrt(Ps-sign(x4)*x3));
dot_x4 = 1/tau*(-x4+Ks*u);

% Uscite del blocco
out(1) = dot_x1;
out(2) = dot_x2;
out(3) = dot_x3;
out(4) = dot_x4;

```

dove lo *script* ParametriSistema contiene i valori numerici di tutti i parametri del sistema. Il blocco *controllore* contiene le matrici del regolatore precedentemente progettato.

Per valutare il controllore lineare consideriamo una posizione iniziale della massa  $m$  pari a  $x = 5 \cdot 10^{-2}$  m. La figura 2 riporta l'andamento della variabile  $x$  del sistema controllato. Si nota come la

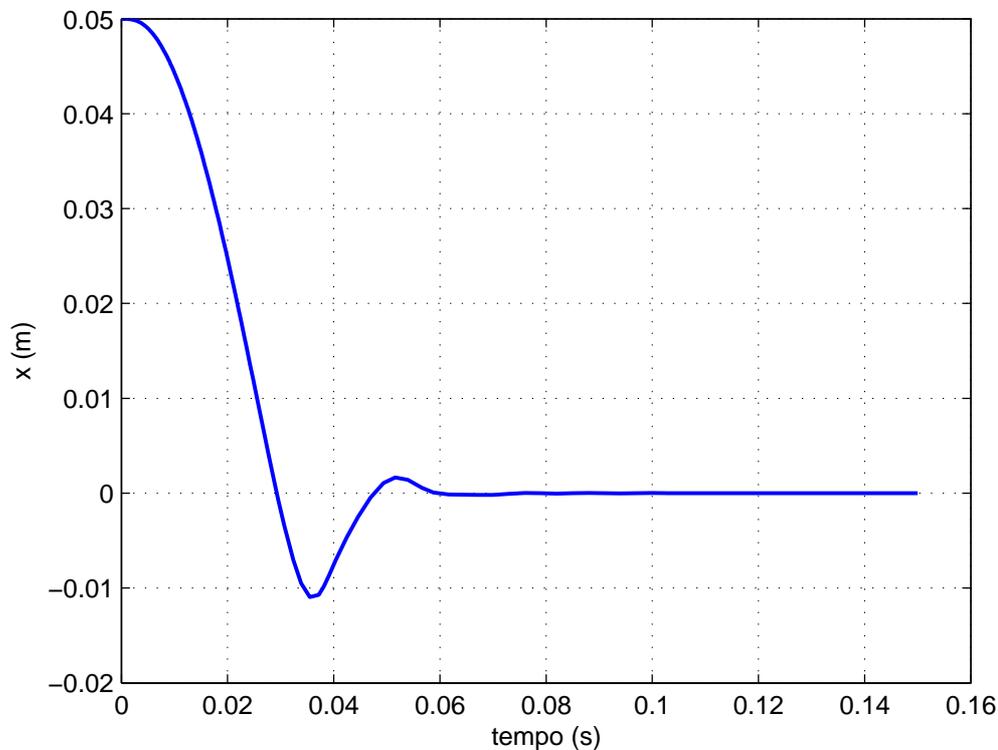


Figure 2: Andamento della variabile  $x$ .

massa sia ricondotta rapidamente alla situazione di equilibrio  $x = 0$ . La figura 3 riporta l'andamento

delle restanti variabili di stato (velocità  $v$  della massa  $m$ , pressione di carico  $P_L$  e posizione del corpo della valvola  $x_{sp}$ ).

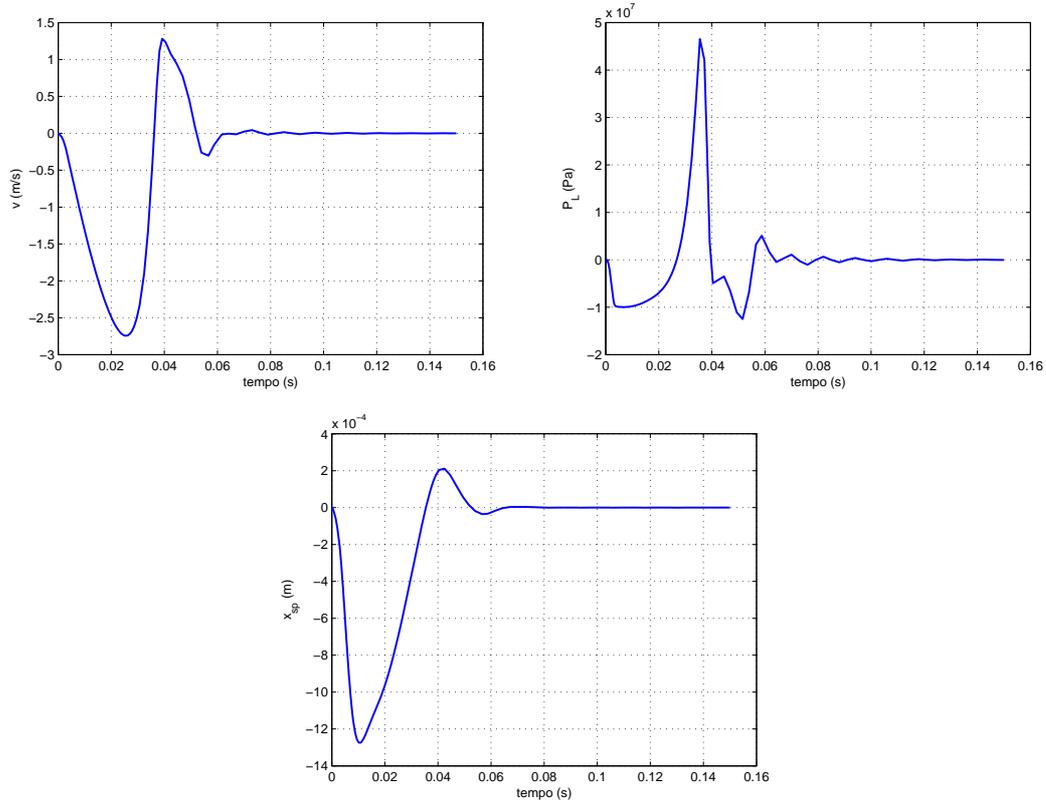


Figure 3: Andamento della velocità  $v$  della pressione di carico  $P_L$  e della posizione del corpo della valvola  $x_{sp}$ .

Nella figura 4, invece, è riportato l'andamento della corrente di controllo  $u$  dell'elettrovalvola.

Il sistema lineare a ciclo chiuso si può ottenere, per un montaggio del controllore in catena di retroazione, con il seguente comando Matlab `fsys = feedback(sys,rsys,+1)`, dove `sys = ss(A,B,C1,0)` sia il sistema ad anello aperto. La matrice dinamica  $A_f \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$  di questo sistema (che si può ottenere con il comando `[Af,Bf,Cf,Df] = ssdata(fsys)`) avrà gli autovalori nelle locazioni scelte in precedenza (si veda il punto **D**). Per il sistema linearizzato, si può agevolmente trovare una funzione di Lyapunov del tipo  $V_Q = \mathbf{z}^T P_Q \mathbf{z}$ , con  $P_Q$  soluzione dell'equazione di Lyapunov  $A_f^T P_Q + P_Q A_f = -Q$  (ad esempio col comando `Pq = lyap(Af',Q)`), per qualche  $Q$  simmetrica positiva definita. Nelle precedenti relazioni si è indicato con  $\mathbf{z}$  il vettore complessivo del sistema a ciclo chiuso, cioè  $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{x}_r^T]^T$ , ove  $\mathbf{x}_r$  è il vettore di stato del regolatore.

Per stimare (per difetto) la regione di asintotica stabilità del sistema nonlineare stabilizzato, si deve quindi valutare la regione in cui vale la disequazione  $\dot{V}_Q = -\mathbf{z}^T Q \mathbf{z} + 2\mathbf{z}^T P_Q \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) < 0$  (ove  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z})$  sia la differenza tra il sistema a ciclo chiuso non lineare e il sistema a ciclo chiuso lineare) e trovare la più grande superficie di livello di  $V_Q$  interamente contenuta in quella regione. Per il sistema in esame la  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z})$  risulta essere:

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, K\mathbf{x}_r) - A\mathbf{x} - BK\mathbf{x}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c_d w}{C\sqrt{\rho}} x_4 \left( \sqrt{P_s - \text{sgn}(x_4)x_3} - \sqrt{P_s} \right) \\ 0 \\ \mathbf{0}_{4 \times 1} \end{bmatrix}.$$

La disequazione può essere studiata numericamente generando casualmente punti distribuiti sulla superficie di livello  $V_Q = R^2$  e guardando al segno di  $\dot{V}_Q$  al variare di  $R$ . Si può far uso, ad esempio, della seguente procedura di bisezione sul valore di  $R$ :

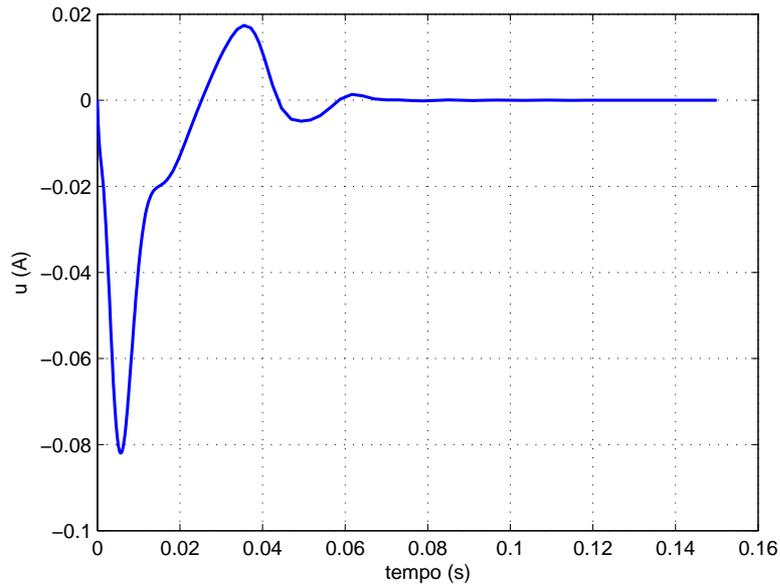


Figure 4: Andamento della corrente di controllo  $u$  dell'elettrovalvola.

```

Q = randn(m,m);
Q = (Q*Q')/2;

Pq = lyap(Af',Q);

R0 = 100;
tolR = 1e-5;
% 'raggio' della curva di livello
R = R0 + tolR;
R_max = Inf;
R_min = 0;

while R_max-R_min > tolR
    R
    ok = evalvdot(Pq,Q,R);
    if (ok == 1)
        R_min = R;
        if (R_max == Inf)
            R = R/2 + R;
        else
            R = R + (R_max - R)/2;
        end
    else
        R_max = R;
        R = R - (R - R_min)/2;
    end
end
end

```

Essa invoca, per ogni nuovo valore di  $R$ , la funzione `evalvdot()` che ha il compito di verificare il segno di  $\dot{V}_Q$  sui punti della superficie  $V_Q = R^2$ :

```

function ok = evalvdot(P,Q,R)

M = inv(sqrtm(P));
[m,n] = size(P);

ok = 1;
numtentativi = 50000;
i = 1;
% Numero di tentativi casuali
while ok & (i<=numtentativi)
    % Vettore di direzione random e lunghezza R
    x = randn(m,1);
    y = R*x/norm(x);
    % Punto random sulla curva di livello
    z = M*y;
    % Valutazione V punto
    vdot = -z'*Q*z+2*z'*P*ftilde(z);
    i = i+1;
    ok = (vdot<0);
end

```

Stime differenti della regione di asintotica stabilità possono essere ottenute utilizzando diverse funzioni di Lyapunov. A tal fine è sufficiente scegliere diverse matrici  $Q$  e ripetere la procedura riportata precedentemente. Una stima della regione di asintotica stabilità per il sistema in esame è riportata nelle figure 5 e 6 .

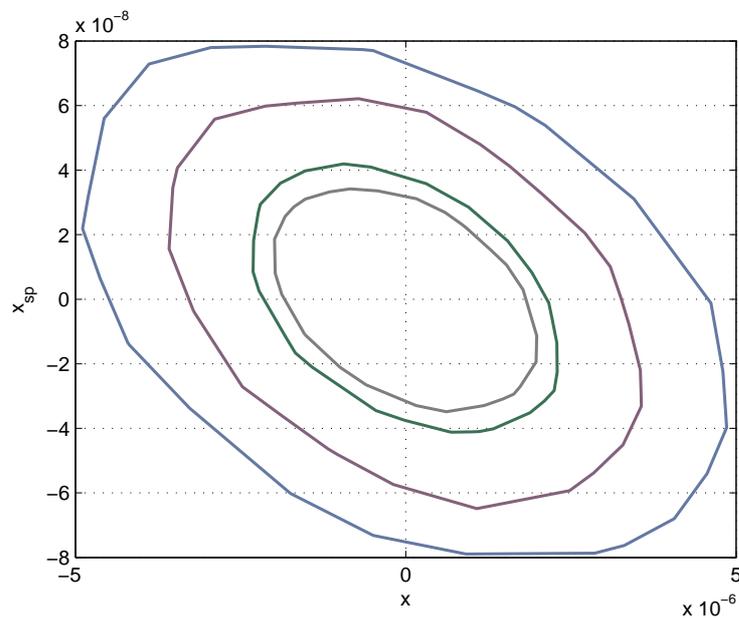


Figure 5: Stima, per difetto, della regione di asintotica stabilità del sistema in esame: variabili  $x$  e  $x_{sp}$ .

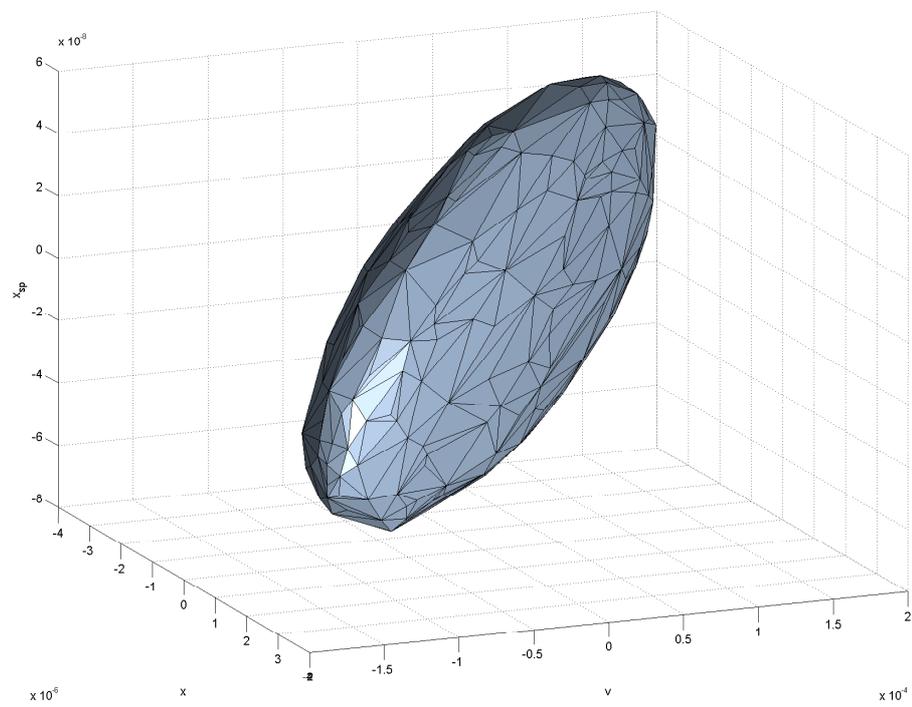


Figure 6: Stima, per difetto, della regione di asintotica stabilità del sistema in esame: variabili  $x$ ,  $v$  e  $x_{sp}$ .