

Quesito 1

Si consideri la nave rappresentata nella seguente figura

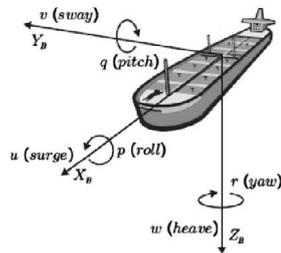


Figure 1: La nave e le sue variabili di stato.

Il comportamento dinamico della nave è dato dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \cos \psi - v \sin \psi \\ \dot{y} &= u \sin \psi + v \cos \psi \\ \dot{\psi} &= r \\ \dot{u} &= \frac{m_{22}}{m_{11}} vr - \frac{d_{11}}{m_{11}} u + \frac{1}{m_{11}} \tau_u \\ \dot{v} &= -\frac{m_{11}}{m_{22}} ur - \frac{d_{22}}{m_{22}} v \\ \dot{r} &= \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} uv - \frac{d_{33}}{m_{33}} r + \frac{1}{m_{33}} \tau_r, \end{aligned}$$

dove x e y sono le coordinate del centro di massa della nave espresse in un sistema di riferimento fisso, ψ è l'angolo di direzione della nave, e u , v e r sono rispettivamente la velocità di scivolamento longitudinale (*surge*), la velocità di scivolamento laterale (*sway*) e la velocità angolare di imbardata (*yaw rate*). Le variabili di controllo sono τ_u e τ_r . I parametri m_{11} , m_{22} e m_{33} sono costanti positive date dalla matrice di inerzia della nave, mentre d_{11} , d_{22} e d_{33} sono costanti positive risultanti dallo smorzamento idrodinamico.

- 1.A** Si determinino i punti di equilibrio del sistema e gli ingressi corrispondenti.
- 1.B** Si determini il linearizzato attorno a questi punti di equilibrio.
- 1.C** Supponendo di disporre di una misura della posizione (x e y) e dell'orientazione della nave (ψ), si discuta l'osservabilità del sistema linearizzato in $\psi = 0$. Si concluda, se possibile, sull'osservabilità del sistema originale.
- 1.D** Si studi la raggiungibilità del sistema linearizzato in $\psi = 0$. Si concluda, se possibile, sulla raggiungibilità del sistema originale.
- 1.E** Dati i seguenti valori numerici (corrispondenti ad un modellino della nave): $m_{11} = 19 \text{ kg}$, $m_{22} = 35 \text{ kg}$, $m_{33} = 4 \text{ kg}$, $d_{11} = 3 \text{ kg s}^{-1}$, $d_{22} = 10 \text{ kg s}^{-1}$, $d_{33} = 1 \text{ kg s}^{-1}$, si ponga il sistema linearizzato (in $\psi = 0$) in forma standard di raggiungibilità e si discuta la stabilizzabilità.

Quesito 2

Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 (3x_1^2 + 2x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 &= x_2 (x_2^2 - 1). \end{aligned}$$

- 2.A** Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità;
- 2.B** Si fornisca la migliore stima possibile della RAS dell'equilibrio nell'origine facendo uso della seguente funzione di Lyapunov $V = 3x_1^2 + x_2^2$. In altri termini, ricordando che l'insieme aperto $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid V(x) < c\}$ interamente incluso nella regione in cui vale $L_f V(x) < 0$ rappresenta una stima della RAS, calcolare il massimo valore del parametro c .
Suggerimento: Esprimere $L_f V$ come funzione del parametro c .

Soluzione

1.A Ponendo $\dot{\psi} = 0$, si ottiene $r = 0$. Dunque, da $\dot{v} = 0$, si ha $v = 0$. Usando queste informazioni nella dinamica di r e u , si verifica che i controlli relativi all'equilibrio sono nulli ($\tau_r = \tau_u = 0$). Inoltre, per annullare \dot{x} e \dot{y} , bisogna che sia $u = 0$. Infine, poiché le variabili di stato x , y e ψ non appaiono nella dinamica della nave, possono assumere qualunque valore all'equilibrio. Così, i punti di equilibrio sono:

$$X_{eq} = \begin{pmatrix} x = x_{eq} \\ y = y_{eq} \\ \psi = \psi_{eq} \\ u = 0 \\ v = 0 \\ r = 0 \end{pmatrix}, \quad U_{eq} = \begin{pmatrix} \tau_u = 0 \\ \tau_r = 0 \end{pmatrix},$$

con $x_{eq}, y_{eq}, \psi_{eq} \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie.

1.B Il sistema linearizzato attorno a X_{eq} e U_{eq} si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos \psi_{eq} & -\sin \psi_{eq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \psi_{eq} & \cos \psi_{eq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d_{11}}{m_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d_{22}}{m_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d_{33}}{m_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi \\ u \\ v \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_u \\ \tau_r \end{pmatrix},$$

che scriveremo anche, in forma compatta, come $\dot{X} = AX + BU$.

1.C Il sistema linearizzato in $\psi = 0$ risulta

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d_{11}}{m_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d_{22}}{m_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d_{33}}{m_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi \\ u \\ v \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_u \\ \tau_r \end{pmatrix}.$$

Se disponiamo di una misura della posizione (x, y) e dell'orientazione ψ della nave, l'uscita considerata è

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi \\ u \\ v \\ r \end{pmatrix} = CX.$$

Quindi, le prime sei righe della matrice di osservabilità O sono

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo la matrice O di rango massimo ($\text{rank}(O) = \dim(X) = 6$), si conclude che il sistema linearizzato è completamente osservabile con questa uscita.

Per quanto riguarda il sistema (non lineare) originale, si conclude quindi per l'osservabilità locale, nel senso che esiste un intorno di X_{eq} sul quale l'insieme indistinguibile da X_{eq} contiene solo X_{eq} .

1.D Le prime sei colonne della matrice di raggiungibilità R sono date da

$$[B \quad AB \quad A^2B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{m_{11}} & 0 & -\frac{d_{11}}{m_{11}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_{33}} & 0 & -\frac{d_{33}}{m_{33}^2} \\ \frac{1}{m_{11}} & 0 & -\frac{d_{11}}{m_{11}^2} & 0 & \frac{d_{11}^2}{m_{11}^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{33}} & 0 & -\frac{d_{33}}{m_{33}^2} & 0 & \frac{d_{33}^2}{m_{33}^3} \end{pmatrix}.$$

Si verifica che $A^2B \in \text{span}(AB)$, dunque anche $A^3B, A^4B \in \text{span}(AB)$. Non è quindi necessario procedere oltre con il calcolo completo di R , per stabilire che $\text{rank}(R) = 4$, cioè che il sistema linearizzato non è completamente raggiungibile. Questo, però, non permette di concludere niente sulla raggiungibilità del sistema originale.

1.E Vista la struttura di R , una possibile matrice di base per il sottospazio di raggiungibilità è data da

$$T_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si osserva che questa matrice è di rango massimo (= 4), uguale a quello di R . Una possibile matrice complementare per T_R è

$$T_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ottiene così la matrice di cambiamento di coordinate $T = [T_R \quad T_N]$, da cui l'inversa è

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene quindi (si può calcolare direttamente con Matlab, usando i valori numerici dati nel testo)

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left(\begin{array}{cccc|cc} -1 - \frac{d_{11}}{m_{11}} & 0 & -1 - \frac{d_{11}}{m_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \frac{d_{33}}{m_{33}} & 0 & -1 - \frac{d_{33}}{m_{33}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d_{22}}{m_{22}} \end{array} \right).$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{33}} \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e, facendo il cambiamento di coordinate $Z = T^{-1}X$ e scrivendo Z come $(z_R, z_N)^T$ dove $z_R \in \mathbb{R}^4$ e $z_N \in \mathbb{R}^2$, si ottiene la seguente forma standard di raggiungibilità:

$$\dot{z}_R = \begin{pmatrix} -1 - \frac{d_{11}}{m_{11}} & 0 & -1 - \frac{d_{11}}{m_{11}} & 0 \\ 0 & -1 - \frac{d_{33}}{m_{33}} & 0 & -1 - \frac{d_{33}}{m_{33}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} z_R + \begin{pmatrix} \frac{1}{m_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{33}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_u \\ \tau_r \end{pmatrix}$$

$$\dot{z}_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{d_{22}}{m_{22}} \end{pmatrix} z_N.$$

Le variabili contenute in z_R sono quelle raggiungibili, mentre quelle in z_N sono chiaramente non-raggiungibili.

Per quanto concerne la stabilizzabilità, basta rammentare che essa è garantita solo se tutti gli autovalori esterni al sottospazio di raggiungibilità sono a parte reale negativa, mentre dalla dinamica di z_N risulta evidente la presenza di un autovalore nullo. Il sistema non è quindi stabilizzabile con gli ingressi presenti.

2.A Ponendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ si trovano i seguenti punti di equilibrio

$$\begin{aligned} i) \quad \bar{x} &= (0, 0) \\ ii) \quad \bar{x} &= (0, 1) \quad \quad \quad iii) \quad \bar{x} = (0, -1) \\ iv) \quad \bar{x} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \quad \quad \quad v) \quad \bar{x} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right). \end{aligned}$$

Per valutarne la stabilità ci avvaliamo del metodo diretto di Lyapunov. Il sistema linearizzato nell'intorno del generico punto di equilibrio risulta

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 9\bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_2^2 - 1 & 4\bar{x}_1\bar{x}_2 \\ 0 & 3\bar{x}_2^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Sostituendo i punti di equilibrio si ottiene

$$\begin{aligned} i) \quad & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \text{Esponenzialmente stabile (nodo stabile)} \\ ii), iii) & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \text{Esponenzialmente instabile (nodo instabile)} \\ iv), v) & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \text{Esponenzialmente instabile (sella).} \end{aligned}$$

2.B Scriviamo esplicitamente le condizioni di definizione dell'insieme Ω_c

$$\begin{aligned} V(x) &= 3x_1^2 + x_2^2 < c \\ L_f V(x) &= 3x_1^2 (3x_1^2 + 2x_2^2 - 1) + x_2^2 (x_2^2 - 1) < 0. \end{aligned}$$

Consideriamo la generica curva di livello di valore c : $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 + x_2^2 = c\}$ ed esprimiamo $L_f V(x)$ in funzione del parametro c

$$\begin{aligned} L_f V(x) &= 9x_1^4 + 6x_1^2 x_2^2 - 3x_1^2 + x_2^4 - x_2^2 \\ &= 9x_1^4 + 6x_1^2 x_2^2 + x_2^4 - (3x_1^2 + x_2^2) \\ &= c^2 - c \\ &= c(c - 1). \end{aligned}$$

Poiché deve essere $L_f V(x) < 0$, per il parametro c (positivo) varrà la disuguaglianza $c < 1$. Pertanto $c = 1$ è l'estremo superiore dei valori assumibili da c . Per esso, infatti, $L_f V(x) = 0$.

Si osserva che la curva di livello $V(x) = 1$ è l'ellisse passante per i punti di equilibrio $ii)$, $iii)$, $iv)$ e $v)$. Si nota, inoltre, che la funzione di Lyapunov considerata fornisce una stima esatta della RAS (vedi figura). Si verifica facilmente che $\forall x$ tale per cui $V(x) > 1$ si ha $L_f V(x) > 0$ e ogni punto della curva di livello $V(x) = 1$ è tale che $L_f V(x) = 0$. Questo è dovuto al fatto che la curva di livello $V(x) = 1$ è per intero uno zero della funzione $L_f V(x)$. Infine, si nota che la curva chiusa $V(x) = 1$ è un insieme invariante per la dinamica del sistema, ma non rappresenta un ciclo limite poiché le traiettorie in esso incluse non sono periodiche.

