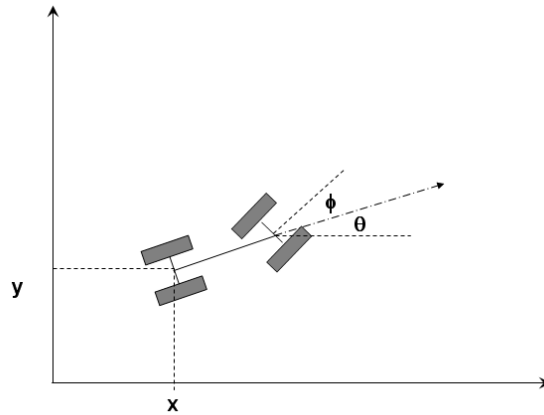


Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 10-01-07

Si consideri il modello di veicolo in figura



descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \theta \cos \phi \\ \dot{y} &= v \sin \theta \cos \phi \\ \dot{\theta} &= \frac{v}{L} \sin \phi \\ \dot{\phi} &= \omega\end{aligned}$$

dove x, y sono le coordinate del centro dell'asse posteriore, θ l'angolo assoluto formato dall'asse longitudinale del veicolo rispetto all'asse orizzontale, ϕ l'angolo di sterzo, v è la velocità di avanzamento comandata sull'avantreno, mentre ω è la velocità angolare comandata sullo sterzo.

- A** Si linearizzi il sistema rispetto ad un equilibrio con $\bar{v} = \bar{\omega} = 0$, e si discuta la raggiungibilità del modello linearizzato;
- B** Si linearizzi il sistema rispetto al moto caratterizzato da velocità costante $v = \bar{v} \neq 0$, $\omega = \bar{\omega} = 0$, e condizioni iniziali tutte nulle per le variabili di stato. Si discuta la raggiungibilità di questo modello, e si dia una interpretazione fisica dei risultati a confronto con quelli ottenuti al punto precedente;
- C** Si consideri disponibile una misura della distanza y del centro dell'asse posteriore del veicolo dalla mezzzeria della carreggiata, che supponiamo coincidente con l'asse delle ascisse del sistema di riferimento usato. È possibile usando questa informazione ricostruire la posizione dello sterzo ϕ ?
- D** Per il modello linearizzato in B, si progetti un controllore che utilizzi la misura della uscita data in C per stabilizzare il moto del veicolo attorno alla mezzzeria della carreggiata;
- E** Si realizzi una simulazione numerica del comportamento del sistema ottenuto connettendo il controllore ottenuto al passo precedente con il sistema non lineare, e si commentino le simulazioni ottenute

Soluzione

Sia ξ il vettore di stato del sistema e $\dot{x} = f(\xi, u)$ denoti in modo compatto la dinamica del sistema.

A Il sistema con controlli nulli ha equilibrio indifferente in ogni punto dello spazio di stato ($f(\xi, 0) = 0, \forall \xi$). Il modello linearizzato in $(x_0, y_0, \theta_0, \phi_0)$ è caratterizzato dalla coppia di matrici (A, B) con

$$A = \left. \frac{\partial f(\xi, u)}{\partial \xi} \right|_{u=0} = 0;$$

$$B = \left. \frac{\partial f(\xi, u)}{\partial u} \right|_{u=0} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \cos \phi_0 & 0 \\ \sin \theta_0 \cos \phi_0 & 0 \\ \frac{1}{L} \sin \phi_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice di raggiungibilità è data da $R = [B \ 0 \ 0 \ 0]$, che ha ovviamente rango due. Solo gli stati che giacciono nella immagine della matrice B sono raggiungibili secondo questo modello. Si osservi che, se le condizioni iniziali sono scelte nulle,

$$\text{Im}(R) = \text{Im}(B) = \text{Im} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Le sole direzioni raggiungibili sono in questo caso spostamenti lungo l'asse x e rotazioni dello sterzo ϕ ; i moti con componenti lungo y o rotazioni di θ risultano impossibili da questo modello linearizzato. Poiché è invece evidente che il veicolo effettivo può muovere anche in tali direzioni, si constata in questo caso come la linearizzazione approssimata non sia in grado di modellare correttamente il sistema.

B Il moto corrispondente ai controlli e alle condizioni iniziali date è

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \bar{v}t; \\ \bar{y}(t) &= 0; \\ \bar{\theta}(t) &= 0; \\ \bar{\phi}(t) &= 0. \end{aligned}$$

Siano $\tilde{\xi} = \xi - \bar{\xi}$ e $\tilde{u} = u - \bar{u}$. In queste nuove variabili, si ha

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} + \tilde{v} \cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} \\ \dot{\tilde{y}} &= \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} + \tilde{v} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} \\ \dot{\tilde{\theta}} &= \sin \tilde{\phi} + \frac{\tilde{v}}{L} \sin \tilde{\phi} \\ \dot{\tilde{\phi}} &= \tilde{\omega} \end{aligned}$$

La linearizzazione approssimata rispetto al moto $(\bar{\xi}, \bar{u})$ è quindi data da $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$, dove

$$A = \left. \frac{\partial f(\tilde{\xi}, \tilde{u})}{\partial \tilde{\xi}} \right|_{\tilde{\xi}=\tilde{u}=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{v}}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = \left. \frac{\partial f(\tilde{\xi}, \tilde{u})}{\partial \tilde{u}} \right|_{\tilde{\xi}=\tilde{u}=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

da cui si ha

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{v}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema linearizzato attorno al moto rettilineo è quindi completamente raggiungibile. Questo significa che, mediante piccole variazioni della velocità di avanzamento e/o dell'angolo di sterzo, è possibile fare in modo che il veicolo raggiunga configurazioni arbitrarie in un intorno della configurazione $\bar{\xi}(t)$ (variazioni non piccole porterebbero a far cadere le ipotesi di validità della approssimazione lineare stessa).

C La misura della distanza y è modellata da una uscita $h(\tilde{\xi}) = \tilde{y}$, quindi il modello lineare ha matrice di uscita $C = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$. La matrice di osservabilità è data da

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{v}}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Risulta $\ker O = \text{Im} [1 \ 0 \ 0 \ 0]$, cioè il sistema è osservabile eccetto che per lo stato x , ovvero la distanza percorsa lungo la carreggiata - che come ovvio non è ricostruibile dalla misura della distanza y . Lo stato ϕ è tra quelli osservabili, cioè è possibile, conoscendo i valori di y , ω e v in un intervallo di tempo finito ed usando il modello dinamico del veicolo, osservare $\phi(0)$ e quindi anche ricostruire $\phi(t)$ all'istante corrente. Tale ricostruzione è esatta nel caso teorico in cui il modello del sistema sia esatto e le misure siano esenti da rumore.

D È conveniente ridurre il sistema alla sua parte osservabile e controllabile, ciò che si ottiene immediatamente in questo caso trascurando la dinamica della variabile x (il controllo di velocità \tilde{v} influenza solo questa variabile, che non è osservabile, ma che d'altronde non influenza la distanza dalla mezzzeria, oggetto della specifica). Le matrici dinamiche del sistema ridotto sono

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \bar{v} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{v}}{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0]; \quad D = 0.$$

La sintesi del controllore procede secondo le tecniche standard di regolazione. Per quanto riguarda l'osservatore si cerca $G = (g_1, g_2, g_3)^T$ tale che $A + GC$ risulti asintoticamente stabile: si ha

$$A + GC = \begin{bmatrix} g_1 & \bar{v} & 0 \\ g_2 & 0 & \frac{\bar{v}}{L} \\ g_3 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

il cui polinomio caratteristico risulta $\lambda^3 - g_1\lambda^2 - \bar{v}g_2\lambda - \frac{\bar{v}^2}{L}g_3$. Scegliendo $g_1 = -18$, $g_2 = -\frac{99}{\bar{v}}$ e $g_3 = -162\frac{L}{\bar{v}^2}$ si ottengono per $A + GC$ autovalori in $(-3, -6, -9)$.

Per quanto riguarda la retroazione si procede in modo analogo determinando $K = (k_1, k_2, k_3)$ tale che $A + BK$ risulti asintoticamente stabile:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \bar{v} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{v}}{L} \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix};$$

Il polinomio caratteristico risulta $\lambda^3 - k_3\lambda^2 - \frac{\bar{v}}{L}k_2\lambda - \frac{\bar{v}^2}{L}g_3$. Scegliendo $k_1 = -6\frac{L}{\bar{v}^2}$, $k_2 = -\frac{11L}{\bar{v}}$ e $k_3 = -6$ si ottengono per $A + BK$ autovalori in $(-1, -2, -3)$.

E La simulazione può essere ottenuta semplicemente col comando Matlab `[t,x]=ode23('bicycle', [0, 50], rand(1,4))`; che fa riferimento ad una funzione Matlab per la dinamica del sistema controllato

```
function dx = bicycle(t,xi);
v=1; L=1;
% Variabili di stato del sistema (rinominate per chiarezza)
x=xi(1); y=xi(2); theta=xi(3); phi = xi(4);
% Variabili di stato dello stimatore
y_s=xi(5); theta_s=xi(6); phi_s = xi(7);
% Legge di controllo
omega = -6*L*v^(-2)*y_s - 11*L/v*theta_s -6*phi_s;
%Dinamica non lineare
dx(1) =v*cos(theta)*cos(phi);
dx(2) =v*sin(theta)*cos(phi);
dx(3) =v*sin(phi)/L;
dx(4) = omega;
%Dinamica dello stimatore dx_s = (A+BK+GC)x_s-GC x
```

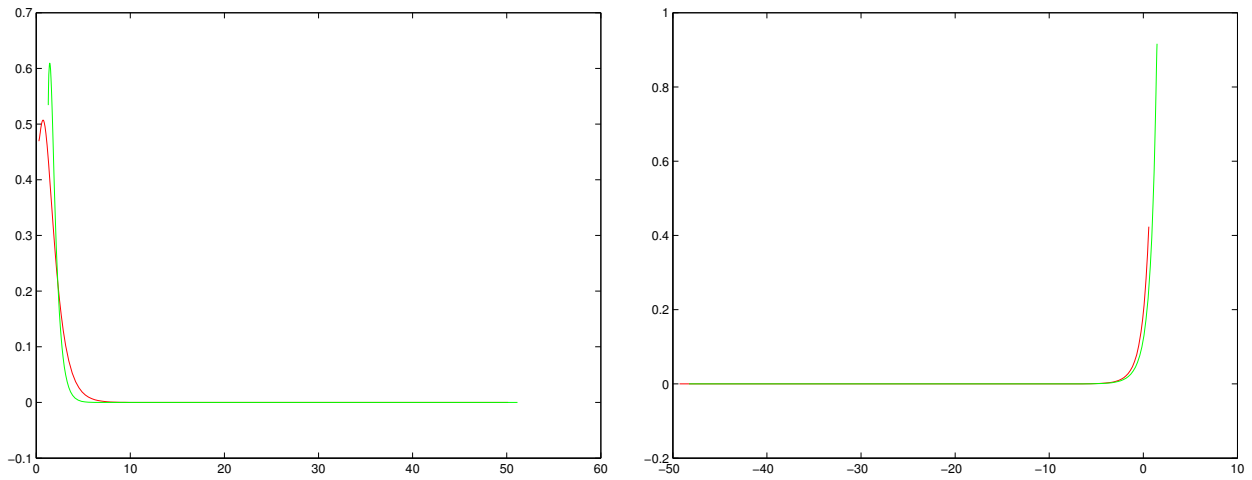


Figure 1: Traiettorie seguite dal modello nonlineare del veicolo a marcia avanti (sinistra) e indietro (destra), con il controllore progettato basandosi sulla linearizzazione approssimata. Le traiettorie del centro dell'asse posteriore e anteriore sono riportate in rosso e verde, rispettivamente.

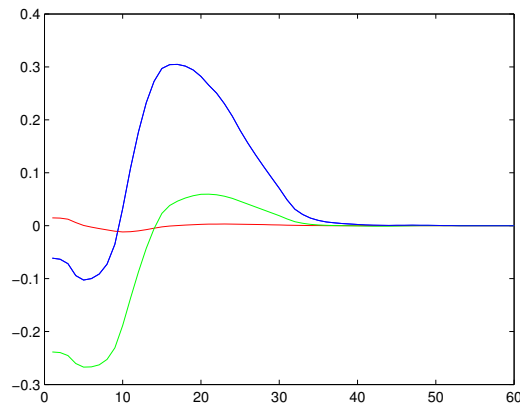


Figure 2: Differenza tra le variabili di stato stimate e le variabili di stato del sistema non lineare: $y - y_s$ in rosso, $\theta - \theta_s$ in verde e $\phi - \phi_s$ in blu.

```

dx(5) = -18*y_s+v*theta_s+18*y;
dx(6) = -99/v*y_s+v/L*phi_s+99/v*y;
dx(7) = -168*L/v^2*y_s-11*L/v*theta_s-6*phi_s+162*L/v^2*y;
dx=dx'; %ODE23 richiede un vettore colonna

```

I risultati delle simulazioni per $\bar{v} = 1$ (marcia avanti) e per $\bar{v} = -1$ sono riportati in fig. 1.

Le differenze tra le variabili di stato stimate e le variabili del sistema non lineare sono riportate in fig. 2.