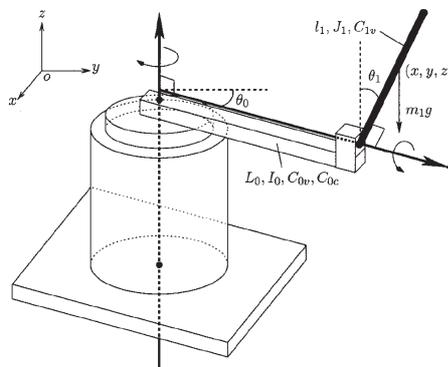


**Quesito 1**

Si consideri il sistema meccanico di figura, che rappresenta un pendolo rotante (pendolo di Furuta).



Sistema meccanico

Esso è costituito da un pendolo inverso collegato ad un braccio in grado di ruotare su un piano orizzontale. Il braccio, di lunghezza  $L_0$  e inerzia  $I_0$ , è attuato mediante un motore dc in grado di generare la coppia  $\tau$ . Il pendolo ha massa  $m_1$  concentrata nel baricentro distante  $l_1$  dal giunto del braccio e inerzia  $J_1$  rispetto al medesimo baricentro. Indicando con  $\theta_0$  l'angolo di rotazione (sul piano orizzontale) del braccio e con  $\theta_1$  l'angolo di rotazione del pendolo misurato rispetto all'asse verticale, la dinamica del sistema è descritta dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_0 &= -\frac{1}{\Delta(\theta_1)} [p_4 a(\boldsymbol{\theta}) - p_3 \cos(\theta_1) b(\boldsymbol{\theta}) - p_4 \tau] \\ \ddot{\theta}_1 &= -\frac{1}{\Delta(\theta_1)} [-p_3 \cos(\theta_1) a(\boldsymbol{\theta}) + (p_1 + p_2 \sin^2(\theta_1)) b(\boldsymbol{\theta}) + p_3 \cos(\theta_1) \tau] \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \Delta(\theta_1) &= p_4 (p_1 + p_2 \sin^2(\theta_1)) - p_3^2 \cos^2(\theta_1) \neq 0 \quad \forall \theta_1 \in [0, 2\pi) \\ a(\boldsymbol{\theta}) &= p_2 \sin(2\theta_1) \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 - p_3 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 \\ b(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{1}{2} p_2 \sin(2\theta_1) \dot{\theta}_0^2 - p_5 \sin(\theta_1) \\ p_1 &= I_0 + m_1 L_0^2, \quad p_2 = m_1 l_1^2, \quad p_3 = m_1 l_1 L_0, \quad p_4 = J_1 + m_1 l_1^2, \quad p_5 = m_1 l_1 g. \end{aligned}$$

- 1.A Si riscrivano le equazioni del sistema rispetto alle seguenti variabili di stato:  $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\theta_0 \ \theta_1 \ \dot{\theta}_0 \ \dot{\theta}_1]^T$  e si calcolino tutti i punti e le coppie di equilibrio fornendo una spiegazione fisica dei risultati trovati;
- 1.B Si linearizzi il sistema rispetto all'equilibrio nell'origine;
- 1.C Si studi la raggiungibilità del linearizzato e la sua osservabilità nel caso si adotti come uscita la sola posizione angolare  $\theta_0$  e la sola posizione angolare  $\theta_1$ ; si forniscano inoltre (se esistono) due condizioni iniziali distinte non nulle tali per cui per qualunque ingresso  $\tau$  il sistema produca la medesima uscita. Si fornisca una giustificazione fisica dei risultati ottenuti;
- 1.D Si studi la stabilizzabilità e la detettabilità del sistema nei casi del punto precedente;

**Quesito 2**

Si consideri il seguente sistema non lineare tempo discreto parametrico

$$\begin{aligned} x_1^+ &= \alpha x_2 - x_1^2 x_2 \\ x_2^+ &= -\alpha x_1 + x_1 x_2^2. \end{aligned}$$

- 2.A Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare del parametro  $\alpha$ .

## Soluzione

**1.A** Le equazioni dinamiche del sistema rispetto alle variabili di stato  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\theta_0 \ \theta_1 \ \dot{\theta}_0 \ \dot{\theta}_1]^T$  sono date da

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{\Delta(x_2)} [p_4 a(\mathbf{x}) - p_3 \cos(x_2) b(\mathbf{x}) - p_4 \tau] \\ \dot{x}_4 &= -\frac{1}{\Delta(x_2)} [-p_3 \cos(x_2) a(\mathbf{x}) + (p_1 + p_2 \sin^2(x_2)) b(\mathbf{x}) + p_3 \cos(x_2) \tau],\end{aligned}\tag{1}$$

con

$$\begin{aligned}\Delta(x_2) &= p_4 (p_1 + p_2 \sin^2(x_2)) - p_3^2 \cos^2(x_2) \\ a(\mathbf{x}) &= p_2 \sin(2x_2) x_3 x_4 - p_3 \sin(x_2) x_4^2 \\ b(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2} p_2 \sin(2x_2) x_3^2 - p_5 \sin(x_2)\end{aligned}$$

I punti di equilibrio si calcolano ponendo  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = \dot{x}_4 = 0$ . Dalle prime due equazioni dinamiche si ha  $x_3 = x_4 = 0$ , pertanto

$$\begin{aligned}a(x_3 = x_4 = 0) &= 0 \\ b(x_3 = x_4 = 0) &= -p_5 \sin(x_2)\end{aligned}$$

da cui si ottiene per le altre due equazioni dinamiche

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{1}{\Delta(x_2)} [p_3 p_5 \sin(x_2) \cos(x_2) - p_4 \tau] \\ 0 &= -\frac{1}{\Delta(x_2)} [-(p_1 + p_2 \sin^2(x_2)) p_5 \sin(x_2) + p_3 \cos(x_2) \tau]\end{aligned}$$

da cui si ottiene (essendo  $\Delta(x_2) \neq 0$ )

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{p_3 p_5}{p_4} \sin(x_2) \cos(x_2) \\ - (p_1 + p_2 \sin^2(x_2)) p_5 \sin(x_2) + \frac{p_3^2 p_5}{p_4} \sin(x_2) \cos^2(x_2) &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Distinguiamo i casi  $\sin(x_2) = 0$  e  $\sin(x_2) \neq 0$ .

Se  $\sin(x_2) = 0$  allora i punti di equilibrio (e il relativo controllo) sono dati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}x_2 &= k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_3 &= x_4 = 0 \\ x_1 &\text{ qualunque} \\ \tau &= 0.\end{aligned}$$

Questi equilibri corrispondono alle situazioni di pendolo rivolto verso l'alto ( $x_2 = 0 + 2m\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ : equilibrio instabile) e rivolto verso il basso ( $x_2 = \pi + 2m\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ : equilibrio stabile). In questi casi la coppia  $\tau$  di equilibrio è nulla e la posizione angolare del braccio  $x_1$  indifferente.

Se  $\sin(x_2) \neq 0$ , dalla seconda delle (2) si ottiene

$$-p_4 (p_1 + p_2 \sin^2(x_2)) + p_3^2 \cos^2(x_2) = 0$$

la quale non ammette soluzione poiché corrisponde  $\Delta(x_2) = 0$ , che sappiamo non essere mai verificata. Pertanto gli unici equilibri si hanno per  $\sin(x_2) = 0$ .

**1.B** Linearizziamo il sistema (1) nell'intorno dell'origine ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $\tau = 0$ ), cioè nel caso di pendolo rivolto verso l'alto. A tal fine calcoliamo preventivamente  $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} a(\mathbf{x}) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}}$ ,  $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} b(\mathbf{x}) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}}$  e  $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta(x_2) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}}$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x_i} a(\mathbf{x}) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} &= 0, \quad i = 1, \dots, 4 \\ \left. \frac{\partial}{\partial x_i} b(\mathbf{x}) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} &= 0, \quad i = 1, 3, 4 \\ \left. \frac{\partial}{\partial x_2} b(\mathbf{x}) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} &= -p_5 \\ \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta(x_2) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} &= 0, \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Posto, inoltre,  $f_3(\mathbf{x}, \tau) = -\frac{1}{\Delta(x_2)} [p_4 a(\mathbf{x}) - p_3 \cos(x_2) b(\mathbf{x}) - p_4 \tau]$  e  $f_4(\mathbf{x}, \tau) = -\frac{1}{\Delta(x_2)} [-p_3 \cos(x_2) a(\mathbf{x}) + (p_1 + p_2 \sin^2(x_2)) b(\mathbf{x}) + p_3 \cos(x_2) \tau]$  e ricordando che  $\Delta(x_2)|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} = p_4 p_1 - p_3^2 \neq 0$ , si ha

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x_1} f_3(\mathbf{x}, \tau) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} &= -\frac{1}{\Delta^2(x_2)} \left[ \left( p_4 \frac{\partial}{\partial x_1} a(\mathbf{x}) - p_3 \cos(x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} b(\mathbf{x}) \right) \Delta(x_2) - \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta(x_2) (\dots) \right] \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} = 0 \\ \left. \frac{\partial}{\partial x_2} f_3(\mathbf{x}, \tau) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} &= -\frac{1}{\Delta^2(x_2)} \left[ \left( p_4 \frac{\partial}{\partial x_2} a(\mathbf{x}) - p_3 \cos(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} b(\mathbf{x}) \right) \Delta(x_2) - \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta(x_2) (\dots) \right] \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{p_3 p_5}{p_4 p_1 - p_3^2}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_3} f_3(\mathbf{x}, \tau) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} = \left. \frac{\partial}{\partial x_4} f_3(\mathbf{x}, \tau) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} = 0$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tau} f_3(\mathbf{x}, \tau) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} = \frac{p_4}{p_4 p_1 - p_3^2}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x_1} f_4(\mathbf{x}, \tau) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} &= \\ -\frac{1}{\Delta^2(x_2)} \left[ \left( -p_3 \cos(x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} a(\mathbf{x}) + (p_1 + p_2 \sin^2(x_2)) \frac{\partial}{\partial x_1} b(\mathbf{x}) \right) \Delta(x_2) - \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta(x_2) (\dots) \right] \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x_2} f_4(\mathbf{x}, \tau) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} &= -\frac{1}{\Delta^2(x_2)} \left[ \left( p_3 a(\mathbf{x}) \sin(x_2) - p_3 \cos(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} a(\mathbf{x}) + (p_1 + p_2 \sin^2(x_2)) \frac{\partial}{\partial x_2} b(\mathbf{x}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2p_2 b(\mathbf{x}) \sin(x_2) \cos(x_2) \right) \Delta(x_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta(x_2) (\dots) \right] \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} = \frac{p_1 p_5}{p_4 p_1 - p_3^2} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_3} f_4(\mathbf{x}, \tau) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} = \left. \frac{\partial}{\partial x_4} f_4(\mathbf{x}, \tau) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} = 0$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tau} f_4(\mathbf{x}, \tau) \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \tau=0}} = \frac{-p_3}{p_4 p_1 - p_3^2}.$$

Il sistema linearizzato è dunque pari a

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + b\tau$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = -\frac{p_3 p_5}{p_4 p_1 - p_3^2}, \quad a_2 = \frac{p_1 p_5}{p_4 p_1 - p_3^2}$$

$$b_1 = \frac{p_4}{p_4 p_1 - p_3^2}, \quad b_2 = -\frac{p_3}{p_4 p_1 - p_3^2}$$

**1.C** La matrice di raggiungibilità del sistema linearizzato è data da

$$R = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & a_1 b_2 \\ 0 & b_2 & 0 & a_2 b_2 \\ b_1 & 0 & a_1 b_2 & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 b_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Essa ha determinante pari a  $\det(R) = -b_2^2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$ , che è sempre diverso da zero poiché  $a_1 b_2 - a_2 b_1 = p_3^2 p_5 - p_1 p_4 p_5 = -(p_4 p_1 - p_3^2) \neq 0$ . Dunque il sistema è completamente raggiungibile.

Per quanto concerne l'osservabilità definiamo la matrice  $c_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$  che considera come uscita la variabile  $\theta_0$  e la matrice  $c_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$  che considera come uscita la variabile  $\theta_1$ . Con queste due uscite otteniamo le seguenti matrici di osservabilità:

$$O_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}, \quad O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix},$$

da cui, essendo  $a_1 \neq 0$  e  $a_2 \neq 0$ , si ha che  $\text{rank}(O_1) = 4$  e  $\text{rank}(O_2) = 2$ . Il sistema risulta quindi completamente osservabile dalla variabile angolare  $\theta_0$ , ma non completamente osservabile dalla variabile  $\theta_1$ . Questi risultati sono diretta conseguenza del fatto che nel sistema linearizzato le variabili  $\theta_0$  e  $\dot{\theta}_0$  non influenzano la dinamica di  $\theta_1$  mentre  $\theta_1$  compare nella dinamica di  $\theta_0$ . D'altronde ciò era già risultato evidente dall'analisi degli equilibri del sistema. Se il pendolo è in posizione verticale (rivolto verso l'alto o verso il basso), le variabili  $\theta_0$  e  $\dot{\theta}_0$  possono assumere un valore arbitrario purché costante. Questa differenza è visibile anche nel sistema non lineare dove la variabile  $\theta_0$  non compare direttamente nella dinamica della variabile  $\theta_1$ , mentre quest'ultima compare in quella di  $\theta_0$  tramite le funzioni trigonometriche. Inoltre per  $\theta_1 = 0, \pi$  e  $\tau = 0$  si ha  $\dot{\theta}_0 = 0$ , dunque  $\theta_0(t) = \theta_{0c} + \theta_{0v}t$  è un andamento ammissibile, ma indistinguibile da  $\theta_1$  per qualunque valore delle costanti  $\theta_{0c}$  e  $\theta_{0v}$ .

Due stati iniziali distinti che producano la stessa uscita per qualunque valore del segnale di ingresso  $\tau$ , si possono, dunque, avere solo nel caso di perdita di osservabilità, pertanto dei due casi precedenti consideriamo solo il secondo (osservazione di  $\theta_1$ ). I due stati iniziali cercati sono tali per cui la loro differenza appartiene al sottospazio di non osservabilità, cioè al  $\ker(O_2)$ . Quindi, poniamo siano essi  $\mathbf{x}_{01}$  e  $\mathbf{x}_{02}$ , devono soddisfare la relazione  $\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02} = [\alpha \ 0 \ \beta \ 0]^T$ , con  $\alpha, \beta$  generici non contemporaneamente nulli. Ciò è una conferma che dalla conoscenza di  $\theta_1$  non sia possibile risalire allo stato iniziale di  $\theta_0$  e  $\dot{\theta}_0$ .

**1.D** Il sistema risulta completamente raggiungibile e dunque ovviamente stabilizzabile. Disponendo della misura della variabile  $\theta_0$  come uscita esso risulta completamente osservabile e quindi ovviamente detettabile. Rimane da considerare il caso in cui si misuri la sola variabile  $\theta_1$ . Affinché il sistema risulti detettabile, i modi non osservabili dovranno essere asintoticamente stabili. Portiamo quindi il sistema in forma standard di osservazione. Dalla matrice di osservabilità si ottiene subito che  $\mathcal{O} = \ker(O_2) = \text{span} \left\{ [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \right\}$ , pertanto una matrice di trasformazione può essere costruita come

$$T = [ T_{\mathcal{O}} \mid T_{\mathcal{O}^c} ] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

mediante la quale si ottiene

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[ \begin{array}{c|c} A_{\mathcal{O}} & \mathbf{0} \\ \hline A_{\mathcal{O}\mathcal{O}} & A_{\mathcal{O}} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Quindi  $A_{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  i cui autovalori sono  $\lambda_{1,2} = 0$ . Il sistema non è quindi detettabile tramite l'uscita  $\theta_1$ .

**2.A** Per lo studio della stabilità al variare del parametro  $\alpha$  faremo uso del metodo diretto di Lyapunov. Il linearizzato del sistema rispetto all'origine è dato da

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix},$$

i cui autovalori sono  $\lambda = \pm j\alpha$ . Circa la stabilità dell'equilibrio nell'origine si può quindi concludere:

- $|\alpha| < 1 \implies$  equilibrio localmente asintoticamente stabile;
- $|\alpha| > 1 \implies$  equilibrio instabile;
- $|\alpha| = 1 \implies$  nulla si può concludere mediante il metodo diretto.

Il caso  $|\alpha| = 1$  necessita un'analisi ulteriore. Ricorreremo pertanto al metodo indiretto di Lyapunov usando la funzione candidata  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ . La funzione scelta è definita positiva, procediamo quindi al calcolo dell'equazione alle differenze:

$$\begin{aligned} \Delta V &= (x_1^+)^2 + (x_2^+)^2 - (x_1^2 + x_2^2) \\ &= (\alpha x_2 - x_1^2 x_2)^2 + (-\alpha x_1 + x_1 x_2^2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) \\ &= x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4 - 4\alpha x_1^2 x_2^2 \\ &= x_1^2 x_2^2 (x_1^2 - 4\alpha + x_2^2), \end{aligned}$$

dove nei passaggi precedenti si è fatto uso della condizione  $\alpha^2 = 1$ . Dall'analisi del segno di  $\Delta V$  si deduce che:

- $\alpha = 1 \implies \Delta V$  risulta semidefinita negativa, quindi l'equilibrio nell'origine è localmente semplicemente stabile. Per appurare se sia anche asintoticamente stabile proviamo ad applicare il criterio di Krasowskii-LaSalle. L'insieme in cui  $\Delta V$  si annulla, nell'intorno dell'origine, è dato dagli assi coordinati:

$$\mathcal{N} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \Delta V = 0\} = \{(a, 0), a \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, b), b \in \mathbb{R}\}.$$

Tale insieme contiene completamente traiettorie del sistema. Infatti, è sufficiente prendere una condizione iniziale di tipo  $(a, 0)$ , per vedere che al passo successivo si avrà un punto di tipo  $(0, -a)$ , da questo si otterrà con un ulteriore passo  $(-a, 0)$  e quindi  $(0, a)$  e successivamente  $(a, 0)$ . Le traiettorie sono quindi dei cicli di ampiezza costante che non convergono nell'origine. L'equilibrio nell'origine per  $\alpha = 1$  è quindi solo semplicemente stabile;

- $\alpha = -1 \implies \Delta V$  risulta solo semidefinita positiva e non sono quindi applicabili i criteri di instabilità. È possibile, però, provare l'instabilità dell'equilibrio nell'origine limitando l'analisi ad un sottinsieme di moti. Si considerino, a tal fine, i moti generati a partire da condizioni iniziali sulle bisettrici dei quadranti:

$$x(0) = \begin{bmatrix} \pm a \\ \pm a \end{bmatrix}.$$

È facile verificare che le bisettrici costituiscono un insieme invariante, poiché ogni moto che ha origine in esse, in esse è confinato in ogni istante. Ciò equivale a dire che per ogni  $t$  si ha  $|x_1(t)| = |x_2(t)|$ . Pertanto, limitatamente ai moti sulle bisettrici, il sistema risulta equivalente al seguente sistema del prim'ordine:

$$z^+ = z(1 + z^2), \quad z(0) = |a|$$

per il quale è facile verificare l'instabilità dell'equilibrio nell'origine mediante la funzione di Lyapunov  $V(z) = z^2$ .