Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 21-06-2006

Si consideri il sistema dinamico rappresentato in figura 1.

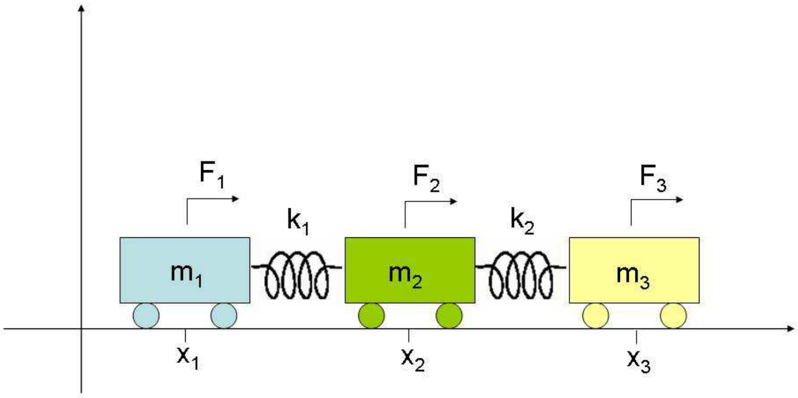

Figure 1: Modello dinamico formato da tre masse collegate da due molle.

Si indichi con x_1, x_2 e x_3 la posizione delle tre masse m_1, m_2 e m_3 rispettivamente. Siano k_1 e k_2 le costanti elasetiche delle molle. Si considera la possibilità di attuare le masse tramite tre forze F_1, F_2 e F_3.

Le equazioni dinamiche del sistema sono

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 - k_1(x_2 - x_1) = F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_3 - x_2) = F_2 \\ m_3\ddot{x}_3 + k_2(x_3 - x_2) = F_3 \end{cases}$$

Date $m_1 = m_2 = m_3 = 1Kg$.

A Supponendo di avere a disposizione dei sensori in grado di leggere le posizioni x_1, x_2 e x_3, si considerino i sistemi formati dalle coppie ingresso-uscita $u = F_i$, $y = x_i$ con $i = 1, 2, 3$. Per ognuno dei sistemi ottenuto si studino le proprietà di raggiungibilità e osservabilità al variare dei valori di k_1 e k_2. Si fornisca una giustificazione fisica al risultato ottenuto.

B Si assuma che il minimo valore singolare della matrice di raggiungibilità (osservabilità) rappresenti un indice della raggiungibilità (osservabilità) stessa del sistema. Date $k_1 = 1kgm/s^2$ e $k_2 = 1.1kgm/s^2$, si determinino, per i sistemi ottenuti al punto precedente, gli accoppiamenti ingresso-uscita che consentono il massimo e il minimo grado di raggiungibilità e osservabilità del sistema nel sistema di coordinate $(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3,)$.

C A parità di scelta di posizione dei poli in anello chiuso si progetti un regolatore per entrambi i sistemi ottenuti al punto precedente. Si confrontino e commentino i risultati ottenuti.

Per un sistema della forma $\dot{x} = f(x, u)$ e $y = g(x, u)$ si definisce grado relativo del sistema il numero di volte che è necessario derivare l'uscita y prima che appaia esplicitamente la variabile di ingresso u, ad esempio per il sistema $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$ e $y = x_1$ si ha $\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$ e $\ddot{y} = \dot{x}_2 = u$ quindi il grado relativo del doppio integratore è 2.

D Si determini il grado relativo dei seguenti sistemi:

1) Sistema ottenuto utilizzando il sensore in grado di leggere la posizione x_1 e attuando la massa m_1.

2) Sistema ottenuto utilizzando il sensore in grado di leggere la posizione x_2 e attuando la massa m_2.

Si giustifichi che il grado relativo è una proprietà strutturale del sistema e pertanto invariante rispetto la scelta delle coordinate. Si confronti infine il risultato ottenuto con la differenza poli-zeri ottenuta dalle rispettive funzioni di trasferimento.

Soluzione

A Considerando le variabili di stato $z = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, \dot{x}_1,\, \dot{x}_2,\, \dot{x}_3,\,)$ gli ingressi $u = (F_1,\, F_2,\, F_3)$ e le uscite $C = (x_1,\, x_2,\, x_3)$, le matrici dinamiche del sistema risultano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1}{m_2} - \frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{m_3} & -\frac{k_2}{m_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siano B_i e C_i i vettori di ingresso e uscita associati rispettivamente all'ingresso F_i e l'uscita x_i. Si noti che per motivi di simmetria del sistema (essendo $m_1 = m_3$) le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema $(A,\, B_3,\, C_3)$ coincidono con quelle del sistema $(A,\, B_1,\, C_1)$. Le matrici di raggiungibilità R_i del sistema $(A,\, B_i)$ sono

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -k_1 & 0 & 2k_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & -2k_1^2 - k_1k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1k_2 \\ 1 & 0 & -k_1 & 0 & 2k_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & 0 & -2k_1^2 - k_1k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_1k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & -2k_1^2 - k_1k_2 \\ 0 & 1 & 0 & -k_1 - k_2 & 0 & 2k_1^2 + 2k_1k_2 + 2k_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & -k_1k_2 - 2k_2^2 \\ 0 & 0 & k_1 & 0 & -2k_1^2 - k_1k_2 & 0 \\ 1 & 0 & -k_1 - k_2 & 0 & 2k_1^2 + 2k_1k_2 + 2k_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 & -k_1k_2 - 2k_2^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Riordinando le matrici scegliendo le colonne secondo l'ordine: seconda, quarta, sesta, prima, terza e quinta, si ha:

$$\hat{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -k_1 & 2k_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & -2k_1^2 - k_1k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k_1 & 2k_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & -2k_1^2 - k_1k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1k_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -2k_1^2 - k_1k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -k_1 - k_2 & 2k_1^2 + 2k_1k_2 + 2k_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_1k_2 - 2k_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & -2k_1^2 - k_1k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k_1 - k_2 & 2k_1^2 + 2k_1k_2 + 2k_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 & -k_1k_2 - 2k_2^2 \end{bmatrix}$$

Dalla struttura delle matrici è facile notare che la prima ha rango massimo per ogni valore non nullo di k_1 e k_2. La seconda matrice invece risulta avere rango 4 se si annulla il determinante dei due blocchi diagonali, che risulta essere $-k_1(-k_1k_2 - 2k_2^2) + k_2(-2k_1^2 - k_1k_2) = k_1^2k_2 + 2k_1k_2^2 - 2k_1^2k_2 - k_1k_2^2 = k_1k_2(k_2 - k_1)$. Pertanto se $k_1 = k_2$ si ha non completa raggiungibilità del sistema. Infatti se le costanti elastiche coincidono si ha perfetta simmetria nel sistema e attuando la massa intermedia non è possibile far raggiungere alle due masse esterne stati arbitrari. Si noti che per la simmetria, le forze che le masse esterne esercitano su quella intermedia sono uguali e contrarie, inoltre il moto forzato delle due masse esterne è identico.

Le matrici di osservabilità O_i del sistema $(A,\, C_i)$ sono

$$O_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_1 & k_1 & 0 \\ 2k_1^2 & -2k_1^2 - k_1k_2 & k_1k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k_1^2 & -2k_1^2 - k_1k_2 & k_1k_2 \end{bmatrix}$$

$$O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_1 & -k_1-k_2 & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & -k_1-k_2 & k_2 \\ -2k_1^2-k_1k_2 & 2k_1^2+2k_1k_2+2k_2^2 & -2k_2^2-k_1k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2k_1^2-k_1k_2 & 2k_1^2+2k_1k_2+2k_2^2 & -2k_2^2-k_1k_2 \end{bmatrix}$$

Riordinando le matrici scegliendo le righe secondo l'ordine: prima, terza, quinta, seconda, quarta e sesta, si ha:

$$\hat{O}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2k_1^2 & -2k_1^2-k_1k_2 & k_1k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k_1^2 & -2k_1^2-k_1k_2 & k_1k_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{O}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_1-k_2 & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -2k_1^2-k_1k_2 & 2k_1^2+2k_1k_2+2k_2^2 & -2k_2^2-k_1k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & -k_1-k_2 & k_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2k_1^2-k_1k_2 & 2k_1^2+2k_1k_2+2k_2^2 & -2k_2^2-k_1k_2 \end{bmatrix}$$

Dalla struttura delle matrici è facile notare che la prima ha rango massimo per ogni valore non nullo di k_1 e k_2. La seconda matrice invece risulta avere rango 4 se si annulla il determinante dei due blocchi diagonali, che risulta essere $-k_1(-k_1k_2-2k_2^2)+k_2(-2k_1^2-k_1k_2) = k_1^2k_2+2k_1k_2^2-2k_1^2k_2-k_1k_2^2 = k_1k_2(k_2-k_1)$. Pertanto se $k_1 = k_2$ si ha non completa osservabilità del sistema. Infatti se le costanti elastiche coincidono si ha perfetta simmetria nel sistema e tramite la lettura della sola variabile x_2 non è possibile ricostruire gli stati x_1 e x_3. Ad esempio, una oscillazione in perfetta opposizione di fase tra le masse m_1 e m_3 lascia indifferenti posizione e velocità di m_2.

B Si sostituiscano i valori numerici, tramite i comandi Matlab

```
R1 = ctrb(A,B(:,1));
R2 = ctrb(A,B(:,2));
R3 = ctrb(A,B(:,3));
O1 = obsv(A,C(1,:));
O2 = obsv(A,C(2,:));
O3 = obsv(A,C(3,:));
```

si ottengono le matrici di raggiungibilità e osservabilità dei tre sistemi in considerazione. Tramite i comandi Matlab

```
SR1 = svd(R1);
SR2 = svd(R2);
SR3 = svd(R3);
SO1 = svd(O1);
SO2 = svd(O2);
SO3 = svd(O3);
```

si ottengono i vettori che contengono i valori singolari delle matrici in ordine decrescente. I minimi valori singolari risultano essere

```
lr1 =
    2.949673626403255e-001
lr2 =
    2.235606445968664e-002
lr3 =
    2.911606667651581e-001
lo1 =
    2.949673626403256e-001
lo2 =
    2.235606445968605e-002
lo3 =
    2.911606667651581e-001
```

L'ingresso che rende il sistema più raggiungibile risulta essere F_1 mentre quello che lo rende meno raggiungibile è F_2. Inoltre, l'uscita che rende il sistema più osservabile è x_1 mentre quella che lo rende meno osservabile è x_2.

C I due sistemi su cui progettare i regolatori richiesti sono (A, B_1, C_1) e (A, B_2, C_2). Si scelgano le matrici di retroazione K_1 e K_2 in modo tale che gli autovalori di $A - B_1K_1$ e di $A - B_2K_2$ siano in $p = [-1 - .5 - .1 - 2 - 3 - 4]$ mentre le matrici di retroazione L_1 e L_2 in modo tale che gli autovalori di $A - L_1C_1$ e di $A - L_2C_2$ siano in $q = 2p$. Le matrici di retroazione e di iniezione richieste si ottengono tramite i comandi Matlab

```
K1 = acker(A,B(:,1),p);
L1 = transpose(acker(A',C(1,:)',q));
K2 = acker(A,B(:,2),p);
L2 = transpose(acker(A',C(2,:)',q));
```

Tali matrici risultano essere
$K1 = [36.85, -65.47, 29.71, 10.60, 37.58, -32.81]$,
$K2 = [-144.00, 36.85, 108.24, -440.00, 10.60, 444.76]$,
$L1 = [21.20, 504.16, -33.72, 160.00, 376.70, -466.88]^T$ e
$L2 = [-100, 21.2, 570.4, -6519, 160, 6428.8]$.

Si noti come per il secondo sistema i valori delle matrici di retroazione e iniezione siano decisamente più elevati dei valori delle matrici ottenute per il primo sistema.

Dati i sistemi

```
sys1 = ss(A,B(:,1),C(1,:),0); sys2 = ss(A,B(:,2),C(2,:),0);
```

I regolatori richiesti si ottengono tramite il comando Matlab

```
rsys1 = reg(sys1,K1,L1);
rsys2 = reg(sys2,K2,L2);
```

Costruendo il sistema retroazionato in simulink e simulando i due sistemi a partire da condizioni iniziali coincidenti si nota che, nel caso del sistema meno raggiungibile e osservabile, il regolatore fornisce al sistema un ingresso decisamente più elevato rispetto a quello fornito dal regolatore al sistema più raggiungibile e osservabile. Pertanto affinché i sistemi retroazionati abbiano gli stessi poli è necessario uno "sforzo" maggiore per controllare il sistema meno raggiungibile e osservabile.

D Nel caso di un sistema lineare della forma $\dot{x} = Ax + Bu$ e $y = Cx$, si ha

$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu,$$

se $CB = 0$ si prosegue con

$$\ddot{y} = CA\dot{x} = CA^2x + CABu.$$

Di nuovo, se $CAB = 0$ si prosegue con

$$y^{(n)} = CA^{n-1}\dot{x} = CA^n x + CA^{n-1}Bu$$

sino a che non si trova il minimo n per cui

$$CA^{n-1}B \neq 0.$$

Nel caso del primo sistema si ha $C_1B_1 = 0$ e $C_1AB_1 = 1$ pertanto il grado relativo è 2. Nel caso del secondo sistema si ha $C_2B_2 = 0$ e $C_2AB_2 = 1$ pertanto anche in questo caso il grado relativo è 2.

Sia n il grado relativo di un sistema lineare della forma $\dot{x} = Ax + Bu$ e $y = Cx$, in questo caso $CA^jB = 0$ per $j < n-1$ e $CA^{n-1}B \neq 0$. Cambiando coordinate $z = Tx$ si ha $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{B} = TB$ e $\tilde{C} = CT^{-1}$, da cui $\tilde{C}\tilde{A}^j\tilde{B} = CT^{-1}TA^jT^{-1}TB = CA^jB = 0$ mentre $\tilde{C}\tilde{A}^{n-1}\tilde{B} = CA^{n-1}B \neq 0$. Quindi, il grado relativo è invariante rispetto a cambi di coordinate.

Le funzioni di trasferimento dei due sistemi infatti risultano:

$$G_1(s) = \frac{(s^2 + 0.3917)(s^2 + 2.808)}{s^2(s^2 + 1.046)(s^2 + 3.154)},\ G_2(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 1.1)}{s^2(s^2 + 1.046)(s^2 + 3.154)}$$

per i quali la differenza poli-zeri è pari a due, confermando il risultato ottenuto sul grado relativo.