

Numero di matricola

-	-	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	-	-
---	---	------------------	-----------------	---	---

Si consideri lo schema di azionamento di una valvola rotativa riportato in fig.1. Il sistema è costituito da tre rotori, con momenti di inerzia rispettivamente $J_1 = 0.01 + \frac{\alpha}{5000}$ kgm², $J_2 = 0.05 + \frac{\beta}{5000}$ kgm² e J_3 trascurabile, collegati tra loro ed al telaio da alberi, schematizzabili come elementi elastico/dissipativi di rigidezze $k_1 = 30$ Nm/rad e $k_2 = 3000$ Nm/rad e coefficienti di smorzamento $c_1 = 1$ Nms/rad e $c_2 = 2$ Nms/rad. Sia $2R$ il raggio del rotore 1 e R il raggio del rotore 3. I rotori 1 e 3 presentano un contatto non strisciante.

Si desidera controllare la posizione angolare della valvola θ_1 , agendo sulla coppia di controllo τ applicata al rotore 2. Sulla valvola 1 agisce inoltre un disturbo d .

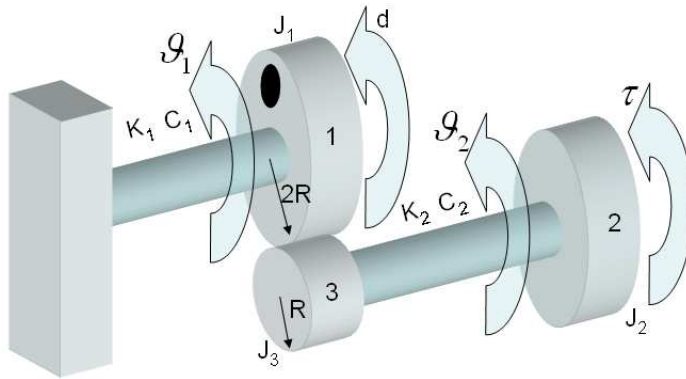


Figure 1: Sistema meccanico da controllare

Il sistema è descritto dalle equazioni seguenti

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 &= -2k_2(\theta_2 + 2\theta_1) - 2c_2(\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1) - k_1\theta_1 - c_1\dot{\theta}_1 + d \\ J_2 \ddot{\theta}_2 &= -k_2(\theta_2 + 2\theta_1) - c_2(\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1) + \tau. \end{cases}$$

- A) Si determinino le funzioni di trasferimento tra l'ingresso di controllo τ e l'uscita θ_1 e tra l'ingresso di disturbo d e l'uscita θ_1 , possibilmente per via simbolica, e si discuta la stabilità del sistema.
- B) Si descriva l'effetto a regime sull'angolo θ_1 di una coppia sinusoidale del tipo $\tau = T \sin(\omega_0 t + \phi)$ con $\omega_0 = 10$ rad/s.
- C) Si progetti un controllore in retroazione che usi la misura dell'angolo della valvola θ_1 ed il controllo della coppia τ , in modo da soddisfare le specifiche riportate di seguito. Si commentino adeguatamente i passaggi effettuati durante le fasi di progetto del controllore e si corredi la trattazione con i diagrammi utilizzati.
- C1) A partire da condizioni iniziali rilassate, l'angolo della valvola θ_1 deve raggiungere a regime esattamente il valore $\bar{\theta}_1 = \frac{\pi}{6}$ rad, senza mai superare l'angolo $\hat{\theta}_1 = 1.1 \frac{\pi}{6}$ rad e restando confinato all'interno della fascia $0.95 \frac{\pi}{6} \text{ rad} \leq \theta_1 \leq 1.05 \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ entro un tempo non superiore a 0.25 s.
- C2) Si ipotizzi che il sensore di misura dell'angolo θ_1 sia affetto da rumore approssimabile con un segnale sinusoidale con frequenza pari o superiore a 7000 Hz e ampiezza non superiore a 10^{-1} rad. In uscita l'ampiezza delle oscillazioni causate da questo rumore deve essere inferiore a 10^{-6} rad.
- C3) Si ipotizzi infine che sulla valvola agisca una coppia di disturbo $d(t)$ sinusoidale, con frequenza pari o inferiore a 0.16 Hz e ampiezza non superiore a 1 Nm. Si cerchi di contenere l'ampiezza delle oscillazioni della valvola, causate dal disturbo, al di sotto di 10^{-3} rad.

Opzionale) Si simuli l'evoluzione del sistema in anello chiuso e si verifichi che il controllore progettato soddisfa tutte le specifiche.

Soluzione

A) Si riscriva il sistema in forma di stato, secondo le relazioni

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du. \end{cases}$$

Scegliendo come vettore di stato $x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$, e considerando l'ingresso $u = \begin{bmatrix} \tau \\ d \end{bmatrix}$ e l'uscita $y = \theta_1$,

le matrici che descrivono il sistema sono

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-4k_2 - k_1}{J_1} & \frac{-4c_2 - c_1}{J_1} & -2\frac{k_2}{J_1} & -2\frac{c_2}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2\frac{k_2}{J_2} & -2\frac{c_2}{J_2} & -\frac{k_2}{J_2} & -\frac{c_2}{J_2} \end{bmatrix}; \quad B = [B_1 \mid B_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/J_1 \\ 0 & 0 \\ 1/J_2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]; \quad D = [0 \ 0].$$

Le fdt richieste possono quindi essere determinate svolgendo la relazione $G_i(s) = C(sI - A)^{-1}B_i$ o L-trasformando le equazioni del moto. Si ottiene

$$G_1(s) = \frac{\Theta_1(s)}{\tau(s)} = \frac{-2c_2s - 2k_2}{J_1J_2s^4 + (c_2J_1 + c_1J_2 + 4c_2J_2)s^3 + (c_1c_2 + k_1J_2 + k_2J_1 + 4k_2J_2)s^2 + (c_2k_1 + c_1k_2)s + k_1k_2},$$

$$G_2(s) = \frac{\Theta_1(s)}{D(s)} = \frac{J_2s^2 + c_2s + k_2}{J_1J_2s^4 + (c_2J_1 + c_1J_2 + 4c_2J_2)s^3 + (c_1c_2 + k_1J_2 + k_2J_1 + 4k_2J_2)s^2 + (c_2k_1 + c_1k_2)s + k_1k_2}.$$

Sostituendo nelle precedenti equazioni i valori numerici $\alpha = \beta = 0$ si ottiene

$$G_1(s) = \frac{-8000s - 1.2 \cdot 10^7}{s^4 + 940s^3 + 1.267 \cdot 10^6s^2 + 6.12 \cdot 10^6s + 1.8 \cdot 10^8},$$

$$G_2(s) = \frac{100s^2 + 4000s + 6 \cdot 10^6}{s^4 + 940s^3 + 1.267 \cdot 10^6s^2 + 6.12 \cdot 10^6s + 1.8 \cdot 10^8}.$$

Queste fdt presentano due coppie di poli complessi coniugati $p_{1,2} = -2.3711 \pm i11.703$ e $p_{3,4} = -467.629 \pm i1021.64$. Essendo i poli a parte reale negativa, il sistema risulta asintoticamente stabile.

I diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono riportati in fig.2 e fig.3 per il caso $\alpha = \beta = 0$.

B) Essendo il sistema asintoticamente stabile, la sua risposta a regime in presenza di eccitazione sinusoidale può essere determinata a partire dal teorema della risposta armonica:

$$y_r(t) = T|G_1(j\omega_0)| \sin(\omega_0t + \angle G_1(j\omega_0) + \phi) = 0.1492T \sin(\omega_0t + 2.3017 + \phi).$$

C) Con riferimento allo schema di controllo di fig.4, si consideri un controllore del tipo $C(s) = \frac{K}{s^t}C_1(s)$, con $C_1(0) = 1$. Essendo il guadagno di $G_1(s)$ negativo, si consideri un controllore con $K < 0$. Così facendo, è possibile arrivare ad una fdt di anello $C(s)G_1(s)$ asintoticamente stabile e a fase minima e il progetto del controllore può essere affrontato direttamente sul digramma di Bode delle ampiezze.

Le specifiche da rispettare si traducono nel richiedere un errore a regime nullo nell'inseguimento di riferimenti di angolo a gradino, con sovralongazione $S \leq 10\%$ e un tempo di assestamento $T_a \leq 0.25$ s.

La funzione di trasferimento $G_1(s)$ non ha poli nell'origine. Quindi per avere, a regime, errore nullo nell'inseguimento di riferimenti a gradino, è necessario che il controllore abbia un polo nell'origine. Il tipo t del controllore risulta quindi $t = 1$. I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_1(s)$, con $C(s) = -1/s$, vengono riportati in fig. 5.

• Poiché la massima sovralongazione ammissibile nella risposta al gradino è del 10%, è possibile approssimare il sistema in anello chiuso ad un sistema del secondo ordine (approssimazione a due poli dominanti). Per un sistema del secondo ordine, la relazione che lega la sovralongazione allo smorzamento dei poli è $S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$. Nota la massima sovralongazione ammissibile, è possibile ricavare lo smorzamento minimo $\bar{\delta}$; nel caso specifico, si trova $\bar{\delta} = 0.5912$. Il minimo margine di fase ammissibile vale quindi $\bar{M}_f \simeq 60$ gradi. Per soddisfare la specifica sul tempo di assestamento, è

necessario a questo punto utilizzare la relazione $\omega_T \geq \frac{3}{T_a \delta} = 20.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Il diagramma dell'ampiezza della funzione di trasferimento $C(s)G_1(s)$ deve quindi attraversare l'asse a zero db per pulsazioni maggiori di $\omega_T = 20.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Dai diagrammi di Bode riportati in fig. 5, si deduce che, per soddisfare queste specifiche, è necessario inserire uno o più zeri a bassa frequenza e alzare il guadagno della fdt di anello $C(s)G_1(s)$. Inserendo, ad esempio, uno zero in -10 ed uno in -15 e portando il guadagno a $k = -1700$, si rispettano le specifiche richieste. Infatti, si ottiene un margine di fase di 79 gradi e una pulsazione di taglio di $111 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Il controllore fino ad ora ottenuto è quindi $C(s) = -1700 \frac{(1+0.1s)(1+0.0667s)}{s}$. Esso risulta chiaramente (ancora) non causale.

I diagrammi di Bode della fdt di anello $C(s)G_1(s)$ fino ad ora ottenuta sono riportati in figura 6.

• La funzione di trasferimento tra il disturbo di misura $\nu(s)$ e l'uscita $\Theta_1(s)$ è la seguente:

$$\Theta_1(s) = -\frac{C(s)G_1(s)}{1 + C(s)G_1(s)}\nu(s).$$

Applicando il teorema della risposta armonica, le componenti del rumore di misura vengono attenuate di un fattore 10^5 nel caso in cui, per pulsazioni superiori a circa 44000 rad/s, vale la relazione:

$$\frac{|C(j\omega)G_1(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)G_1(j\omega)|} < \frac{1}{10^5}.$$

Dal momento che, per frequenze elevate, si vuole un basso valore di $|C(j\omega)G_1(j\omega)|$, la relazione precedente diventa:

$$|C(j\omega)G_1(j\omega)|_{db} < -100 \text{ db}$$

per $\omega \geq 44000$ rad/s. Tale specifica viene soddisfatta inserendo un polo in -2000 . I diagrammi di Bode della fdt di anello $C(s)G_1(s)$ con $C(s) = -1700 \frac{(1+0.1s)(1+0.0667s)}{s(1+0.0005s)}$ sono riportati in figura 7.

• Il legame tra disturbo $D(s)$ e uscita $\Theta_1(s)$ vale:

$$\Theta_1(s) = \frac{G_2(s)}{1 + C(s)G_1(s)}D(s)$$

Applicando il teorema della risposta armonica, per avere un'attenuazione di un fattore 10^3 delle componenti del disturbo con pulsazione pari o inferiore a $1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ è necessario che sia soddisfatta la relazione

$$\frac{|G_2(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)G_1(j\omega)|} < \frac{1}{10^3}$$

per $\omega \leq 1$ rad/s. Dal momento che, a bassa frequenza, il modulo $|C(j\omega)G_1(j\omega)|$ è elevato, la relazione appena scritta può essere sostituita dalla seguente:

$$\frac{|C(j\omega)G_1(j\omega)|}{|G_2(j\omega)|} > 10^3.$$

La specifica è quindi soddisfatta se per $\omega \leq 1$ rad/s vale la condizione:

$$|C(j\omega)G_1(j\omega)|_{db} > 60 + |G_2(j\omega)|_{db}.$$

Se infine si considera che, per $\omega \leq 1$ rad/s, $|G_2(j\omega)|$ è circa costante e pari a -29.5 db, la relazione da verificare è:

$$|C(j\omega)G_1(j\omega)|_{db} > 30.5 \text{ db}.$$

Come si osserva in figura 7 questa specifica risulta già soddisfatta.

Il controllore in grado di garantire le specifiche è quindi

$$C(s) = -1700 \frac{(1 + 0.1s)(1 + 0.0667s)}{s(1 + 0.0005s)}.$$

Come si osserva, esso è causale, anche se non strettamente.

Al fine di verifica del controllore proposto, in figura 8 è riportata la risposta al gradino unitario del sistema in anello chiuso ottenuto.

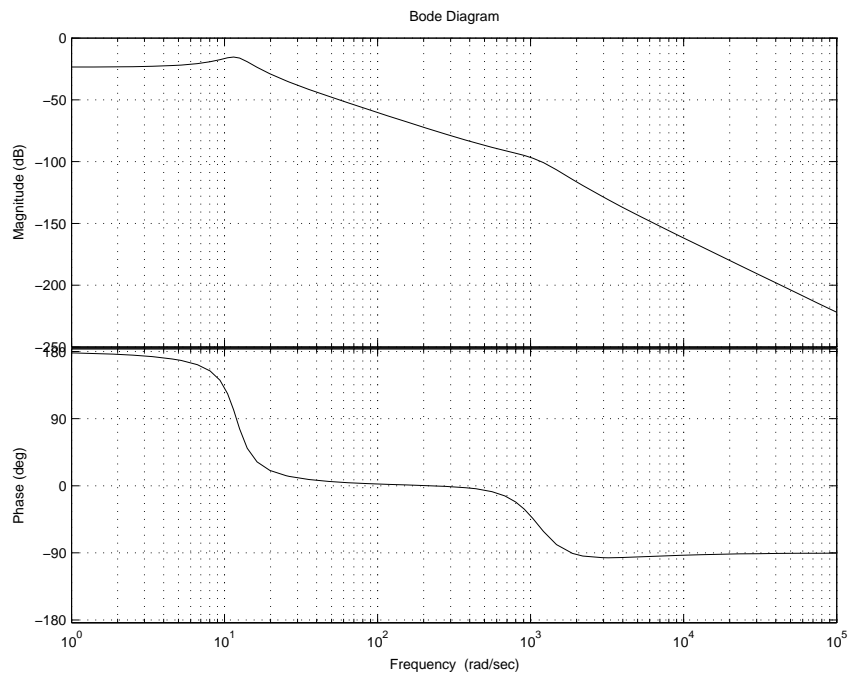


Figure 2: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $G_1(s)$

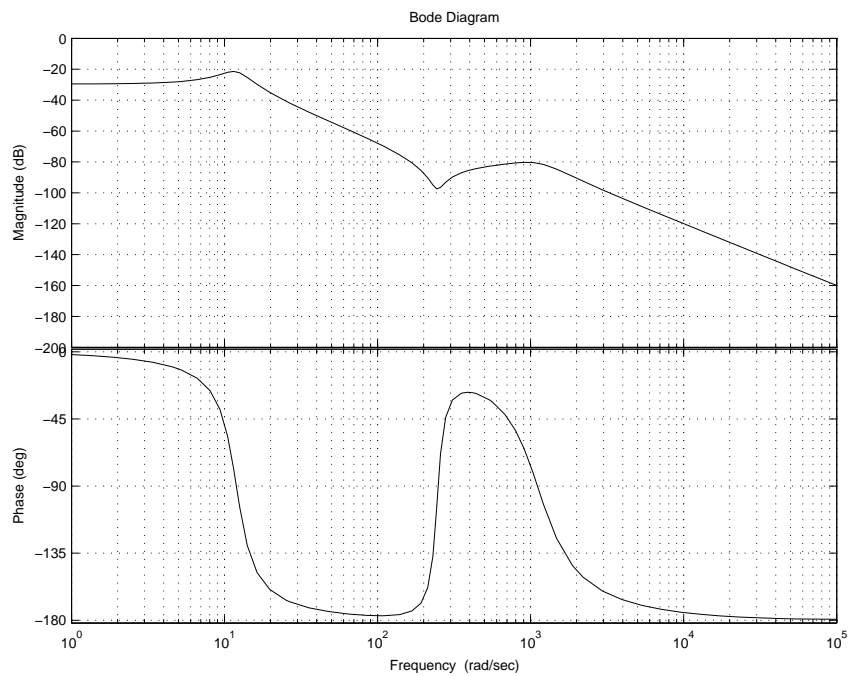


Figure 3: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $G_2(s)$

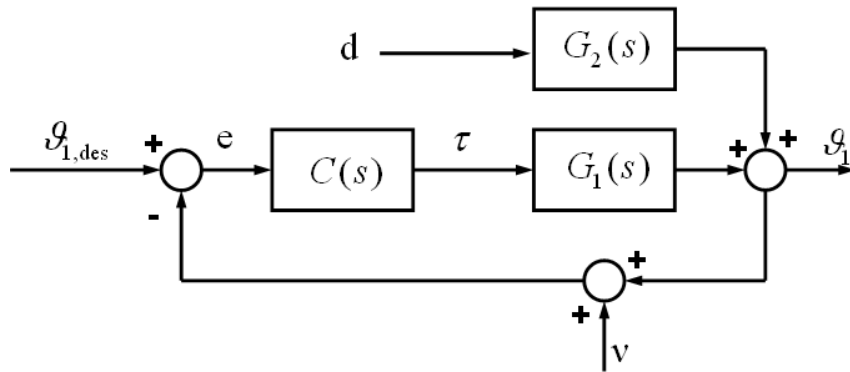


Figure 4: Schema del sistema di controllo

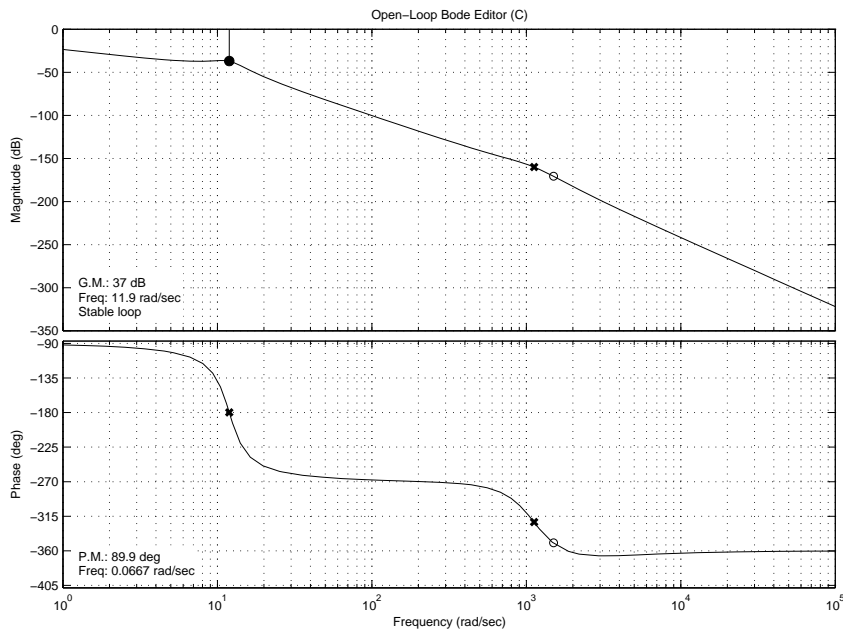


Figure 5: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_1(s)$ con $C(s) = -\frac{1}{s}$

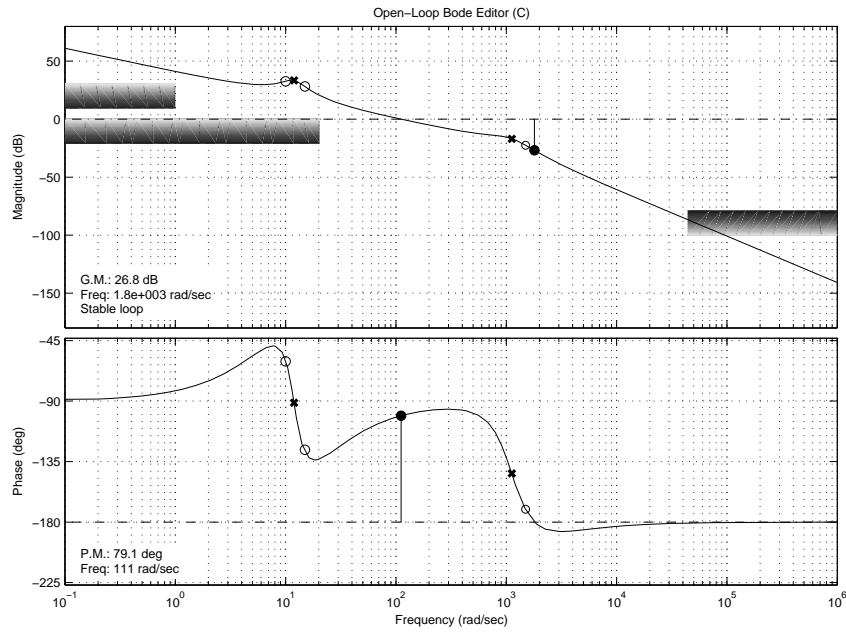


Figure 6: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_1(s)$ con $C(s) = -1700 \frac{(1+0.1s)(1+0.0667s)}{s}$.

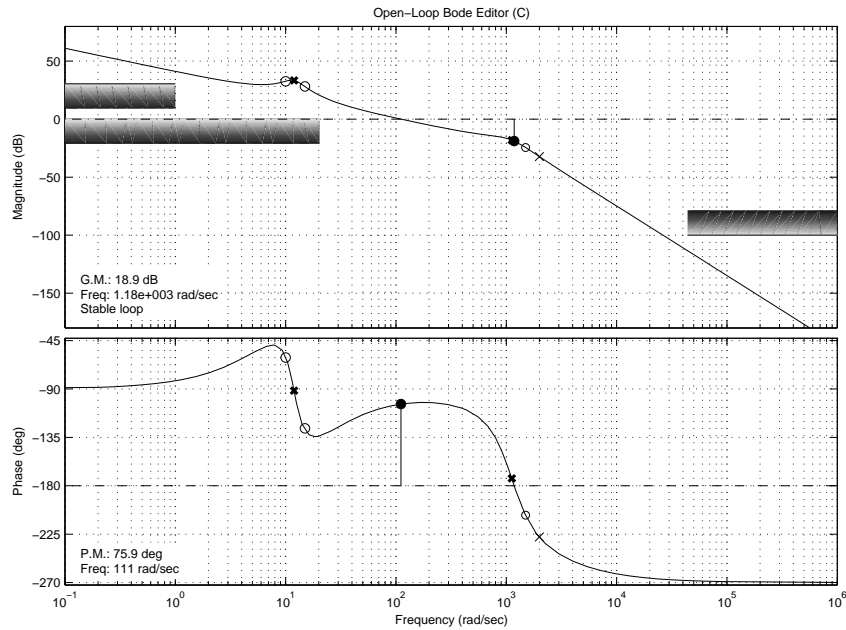


Figure 7: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_1(s)$ con $C(s) = -1700 \frac{(1+0.1s)(1+0.0667s)}{s(1+0.0005s)}$.

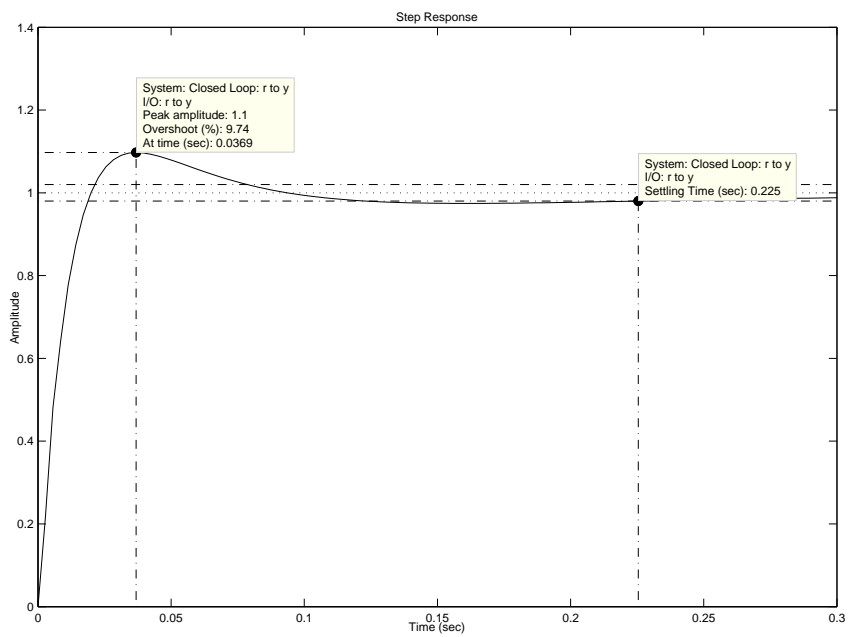


Figure 8: Risposta al gradino unitario del sistema in anello chiuso.