

Si consideri il modello dinamico di un attuatore elettromagnetico per le valvole di un motore automobilistico (figura 1).

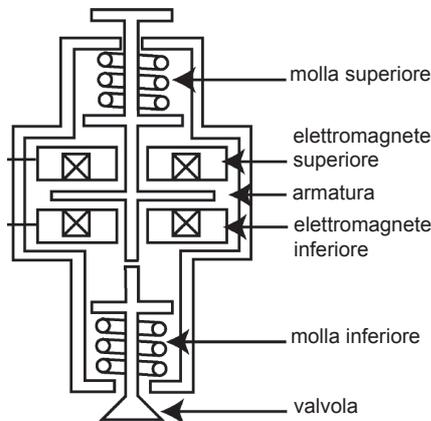


Figure 1: Modello dinamico di un attuatore elettromagnetico per le valvole di un motore automobilistico.

La valvola è azionata mediante un'armatura mobile posta tra due elettromagneti. A riposo (elettromagneti spenti) l'armatura è tenuta in una posizione equidistante dai due elettromagneti grazie all'azione di due molle identiche e antagoniste. Gli elettromagneti possono generare solo forze attrattive, pertanto il magnete superiore è impiegato per spostare l'armatura al di sopra del punto mediano, mentre quello inferiore al di sotto. Riportiamo di seguito un modello che descrive la dinamica del sistema in esame nel caso in cui agisca solo l'elettromagnete inferiore:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{m} (-F_{mag} + k_s(l - z) - bv), \quad F_{mag} = \frac{\lambda^2}{2k_a} \\ \dot{\lambda} &= V - \frac{r\lambda(k_b + z)}{k_a}, \end{aligned}$$

dove $0 \leq z \leq 2l$ rappresenta la distanza dell'armatura rispetto all'elettromagnete inferiore, v la velocità dell'armatura, λ il flusso magnetico dell'avvolgimento dell'elettromagnete inferiore, m la massa complessiva dell'armatura e della valvola, F_{mag} la forza esercitata dall'elettromagnete inferiore, k_s la costante elastica delle molle, l metà escursione dell'armatura, b il coefficiente di smorzamento, V la tensione di controllo dell'avvolgimento inferiore ed r la resistenza dell'avvolgimento. Infine, le costanti k_a e k_b sono determinate sperimentalmente.

- A** Si determinino i punti e gli ingressi di equilibrio del sistema;
- B** Si determini il linearizzato attorno all'equilibrio generico $z = z_{eq}$ e $\lambda = \lambda_{eq} > 0$;
- C** Si studi la raggiungibilità del sistema e la sua osservabilità supponendo di disporre di una misura della distanza z e se ne dia una interpretazione fisica;
- D** Si progetti un compensatore basato sul regolatore che sia in grado di stabilizzare il sistema nell'equilibrio $z = 2 \text{ mm}$, e $\lambda > 0$, $V > 0$ corrispondenti. Si impieghino i seguenti valori numerici $m = 0.27 \text{ Kg}$, $k_s = 158 \cdot 10^3 \text{ N/m}$, $b = 7.53 \text{ Kg/s}$, $k_a = 29.92 \cdot 10^{-6} \text{ Nm}^2/\text{A}^2$, $k_b = 4 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, $l = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ e $r = 6 \text{ } \Omega$.
- E** Si dia una stima delle condizioni iniziali a partire dalle quali il controllore progettato al punto **D** è capace di garantire la convergenza del sistema sulla configurazione desiderata.

Soluzione

A Dalla prima equazione si ricava immediatamente $v_{eq} = 0$. Si ottiene un sistema in due equazioni e tre incognite, pertanto considerando tutti i punti $z = z_{eq} \leq l$ come possibili equilibri, si ha per il flusso e la tensione di comando:

$$\begin{aligned}\lambda_{eq} &= \pm \sqrt{2k_a k_s (l - z_{eq})} \\ V_{eq} &= \pm \frac{r}{k_a} (k_b + z_{eq}) \sqrt{2k_a k_s (l - z_{eq})}.\end{aligned}$$

Il sistema controllato dall'avvolgimento inferiore garantisce un continuo di punti di equilibrio corrispondenti a tutte le posizioni z inferiori a quella mediana. Ad ognuna di esse è associata una coppia di tensione di controllo e di flusso magnetico di equilibrio, corrispondenti a due opposte polarizzazioni dell'elettromagnete inferiore.

B Traslando il sistema nel punto di equilibrio $\bar{x} = (z_{eq}, 0, \sqrt{2k_a k_s (l - z_{eq})})$, con ingresso di equilibrio $V_{eq} = \frac{r}{k_a} (k_b + z_{eq}) \sqrt{2k_a k_s (l - z_{eq})}$ il vettore di stato traslato e l'ingresso traslato risultano

$$\begin{aligned}x_1 &= z - z_{eq} \\ x_2 &= v \\ x_3 &= \lambda - \lambda_{eq} \\ u &= V - V_{eq}\end{aligned}$$

Il sistema non lineare traslato in forma di stato risulta

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m} \left(-\frac{(x_3 + \lambda_{eq})^2}{2k_a} + k_s (l - x_1 - z_{eq}) - b x_2 \right) \\ \dot{x}_3 &= (u + V_{eq}) - \frac{r (x_3 + \lambda_{eq}) (k_b + x_1 + z_{eq})}{k_a}.\end{aligned}$$

Linearizzando rispetto a tale punto si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_s}{m} & -\frac{b}{m} & -\frac{\sqrt{2k_a k_s (l - z_{eq})}}{m k_a} \\ -\frac{r \sqrt{2k_a k_s (l - z_{eq})}}{k_a} & 0 & -\frac{r (k_b + z_{eq})}{k_a} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

C Calcolando la matrice di raggiungibilità ($R = [B, AB, A^2 B]$) si ottiene

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2k_a k_s (l - z_{eq})}}{m k_a} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2k_a k_s (l - z_{eq})}}{m k_a} & \frac{(mr(k_b + z_{eq}) + bk_a) \sqrt{2k_a k_s (l - z_{eq})}}{m^2 k_a^2} \\ 1 & -\frac{r(k_b + z_{eq})}{k_a} & \left(\frac{r(k_b + z_{eq})}{k_a} \right)^2 \end{bmatrix}$$

il cui determinante è dato da $-\frac{2k_s(l-z_{eq})}{m^2 k_a}$ che risulta diverso da zero $\forall z_{eq} \neq l$. Il sistema è quindi completamente raggiungibile per $z_{eq} < l$. Il caso $z_{eq} = l$ corrisponde ad una perdita di raggiungibilità in quanto azionando il solo elettromagnete inferiore è possibile spostare l'armatura solo verso il basso, si ricordi che gli elettromagneti possono solo esercitare una forza attrattiva.

Per ciò che concerne l'osservabilità si ha:

$$\begin{aligned}C &= [1 \quad 0 \quad 0] \\ O &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_s}{m} & -\frac{b}{m} & -\frac{\sqrt{2k_a k_s (l - z_{eq})}}{m k_a} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\det O = -\frac{\sqrt{2k_a k_s (l - z_{eq})}}{m k_a} \neq 0 \forall z_{eq} \neq l$. Il sistema è quindi completamente osservabile per $z_{eq} < l$. Il caso $z_{eq} = l$ corrisponde ad una perdita di osservabilità. Infatti basta notare che per $z_{eq} =$

la matrice A si decompone in due blocchi diagonali distinti in cui le variabili z e v risultano disaccoppiate da λ . Pertanto diversi valori di λ producono medesimi valori della variabile osservata z . Il motivo fisico di tale disaccoppiamento risiede nel fatto che il flusso compare nella variabile v quadraticamente e dunque nell'intorno del punto di equilibrio risulta essere un infinitesimo di ordine superiore rispetto ai contributi delle altre variabili in gioco.

D Il punto di equilibrio corrispondente a $z = 2 \text{ mm}$ è $\bar{x} = (2 \cdot 10^{-3} \text{ m}, 0, 0.1375 \text{ Vs})$ e la tensione di controllo $V_{eq} = 56.2547 \text{ V}$. La matrice dinamica del sistema linearizzato risulta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -585185.18519 & -27.88889 & -17022.13304 \\ -27575.85552 & 0 & -409.09091 \end{bmatrix}.$$

Il sistema è instabile poiché vi è un autovalore reale positivo: $\lambda_1 = 286.22$. Applichiamo la tecnica di progetto del regolatore nello spazio di stato allo scopo di ottenere un sistema stabile.

Progettiamo una retroazione statica degli stati K in grado di allocare i poli del sistema a ciclo chiuso in $p = [-500 \quad -1000 \quad -1500]$. Utilizzando la funzione di Matlab $K = \text{acker}(A, B, p)$ è possibile calcolare la matrice dei guadagni K mediante la formula di Ackermann. Si ottiene:

$$K = [30538.79962 \quad -122.30699 \quad 2563.0202].$$

Poiché non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile, si può realizzare un'osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice L di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore $A - LC$ abbia autovalori $q = 2p$. Sempre impiegando il comando Matlab $L = \text{transpose}(\text{acker}(A', C', q))$ si ottiene:

$$L = \begin{bmatrix} 5563.0202 \\ 7972478.27987 \\ -170664.19028 \end{bmatrix}.$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato si costruisce col comando $\text{rsys} = \text{reg}(\text{sys}, K, L)$.

Uno schema Simulink del sistema stabilizzato è riportata in figura 2.

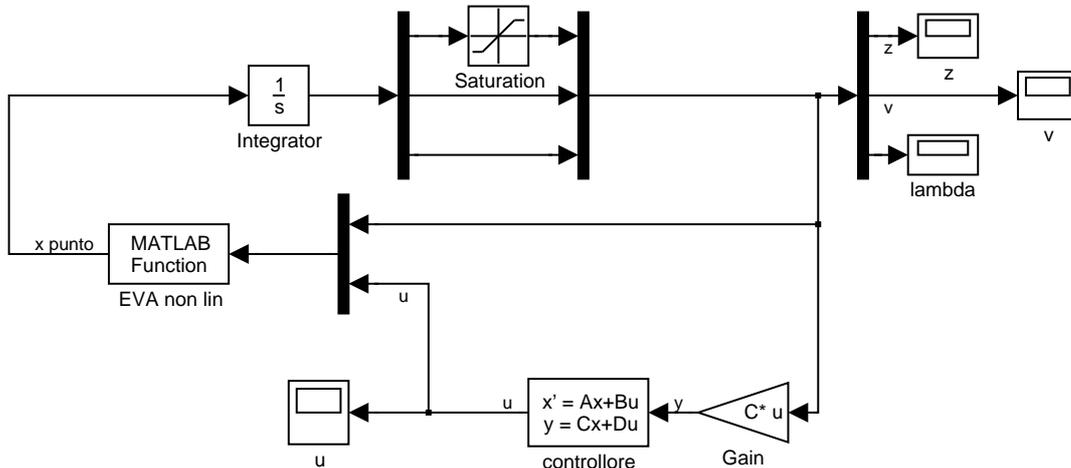


Figure 2: Schema Simulink del sistema stabilizzato con controllore lineare.

Nello schema si è posta una saturazione sulla variabile z per tener conto del vincolo sull'escursione dell'armatura: $0 \leq z \leq 2l$.

Il blocco Simulink *Matlab Function* contiene la seguente funzione:

```
function out = SistemaNONLineare(in)
```

```

% Input parser
x1 = in(1);
x2 = in(2);
x3 = in(3);
u = in(4);

% Parametri EVA
m = .27; % Kg
l = 4e-3; % m
ks = 158e3; % N/m
b = 7.53; % Kg/s
ka = 29.92e-6; % Nm^2/A^2
kb = 4e-5; % m
r = 6; % Ohm

% Equilibrio z = 2 mm
v_eq = 0;
z_eq = 2e-3; % m
lambda_eq = sqrt(2*ka*ks*(1-z_eq));
Vl_eq = r*(kb+z_eq)*lambda_eq/ka;

% Sistema traslato
z1 = x1 + z_eq;
z2 = x2 + v_eq;
z3 = x3 + lambda_eq;
Vl = u + Vl_eq;

% Dinamica del sistema
dot_x1 = z2;
dot_x2 = 1/m*(-z3^2/(2*ka)+ks*(1-z1)-b*z2);
dot_x3 = -r*z3*(kb+z1)/ka + Vl;

% Uscite del blocco
out(1) = dot_x1;
out(2) = dot_x2;
out(3) = dot_x3;

```

mentre il blocco *State-Space* contiene le matrici del regolatore precedentemente progettato. Si nota che il controllore lineare è stato progettando traslando il sistema nell'equilibrio in modo da riferirsi al consueto equilibrio nell'origine. Questa traslazione richiede che la dinamica del sistema non lineare sia poi riportata nelle coordinate originarie e che al segnale di controllo prodotto dal regolatore si sommi il valore V_{eq} di equilibrio. Per valutare il controllore lineare consideriamo una posizione iniziale dell'armatura in quiete in $z = 8 \text{ mm}$ (posizione superiore). La figura 3 riporta l'andamento della variabile traslata $z - z_{eq}$ del sistema controllato. Si nota l'intervento della saturazione che modella il vincolo meccanico sull'escursione dell'armatura. Senza tale vincolo l'armatura continuerebbe a muoversi oltre il valore $z - z_{eq} = -2 \text{ mm}$ per un piccolo intervallo di tempo. Questo accade perché il controllo lineare produce una sovraelongazione eccessiva facendo urtare l'armatura contro l'elettromagnete inferiore e tenendolo in tale posizione per qualche istante. La figura 4 riporta l'andamento della variazione rispetto all'equilibrio della velocità dell'armatura e del flusso magnetico nelle stesso esperimento. Nella figura 5 è, invece, riportata la variazione del segnale di controllo rispetto al valore di equilibrio V_{eq} . Si nota che esso assume valori molto elevati che in un sistema fisico reale del tipo in esame non sarebbero tollerabili (le tensioni non superano in modulo i 200 V).

E Il sistema lineare a ciclo chiuso si può ottenere con il seguente comando Matlab `fsys = feedback(series(rsys,sys),1,+1)`, dove `sys = ss(A,B,C,D)` sia il sistema ad anello aperto. La matrice dinamica $A_f \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ di questo sistema (che si può ottenere con il comando `[Af,Bf,Cf,Df] = ssdata(fsys)`) avrà gli autovalori nelle locazioni scelte in precedenza (si veda il punto **D**). Per il sistema linearizzato, si può agevolmente trovare una funzione di Lyapunov del

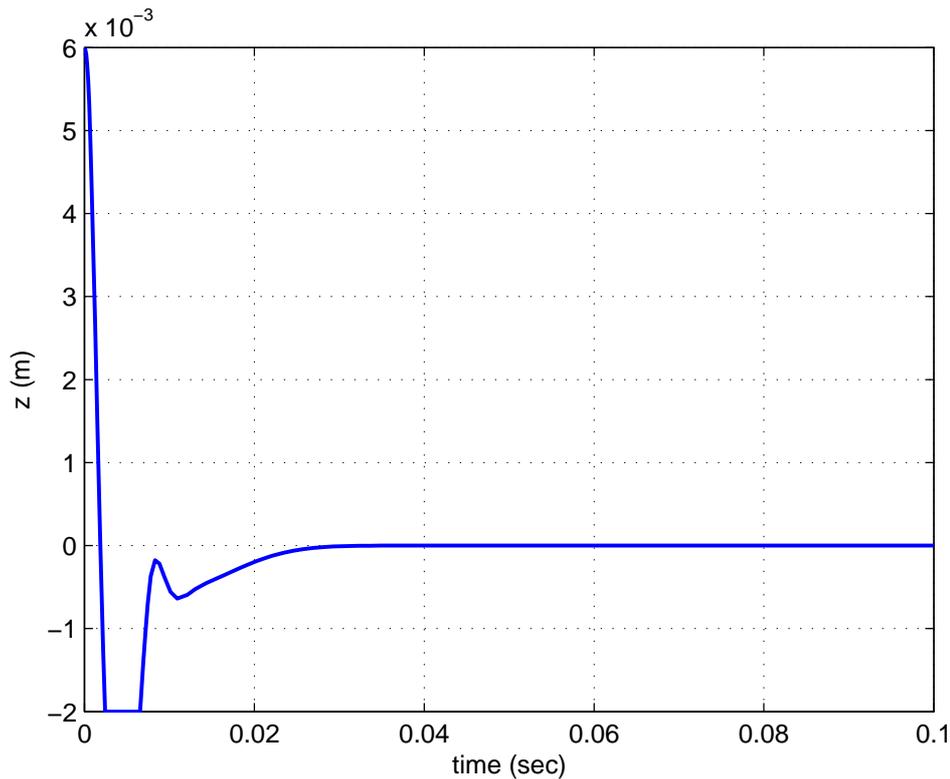


Figure 3: Andamento della variabile traslata $z - z_{eq}$.

tipo $V_Q = \mathbf{z}^T P_Q \mathbf{z}$, con P_Q soluzione dell'equazione di Lyapunov $A_f^T P_Q + P_Q A_f = -Q$ (ad esempio col comando `Pq = lyap(Af',Q)`), per qualche Q simmetrica positiva definita.

Per stimare (per difetto) la regione di asintotica stabilità del sistema nonlineare stabilizzato, si deve quindi valutare la regione in cui vale la disequazione $\dot{V}_Q = -\mathbf{z}^T Q \mathbf{z} + 2\mathbf{z}^T P_Q \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) < 0$ (ove $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z})$ sia la differenza tra il sistema a ciclo chiuso non lineare e il sistema a ciclo chiuso lineare) e trovare la più grande curva di livello di V_Q interamente contenuta in quella regione. La disequazione può essere studiata numericamente generando numeri casualmente distribuiti sulla curva $V_Q = R^2$ e guardando al segno di \dot{V}_Q al variare di R , ad esempio con la semplice procedura

```
function ok = evalvdot(P,Q,R)

M=inv(sqrtm(P));
[m,n] = size(P);

ok = 1;
numtentativi=500000;
i = 1;
% Numero di tentativi casuali
while ok & (i<=numtentativi)
    % Vettore di direzione random e lunghezza r
    x = randn(m,1);
    y = R*x/norm(x);
    % Punto random sulla curva di livello
    z = M*y;
    % Valutazione V punto
    vdot = -z'*Q*z+2*z'*P*ftilde(z);
    i = i+1;
    ok = (vdot<0);
end
```

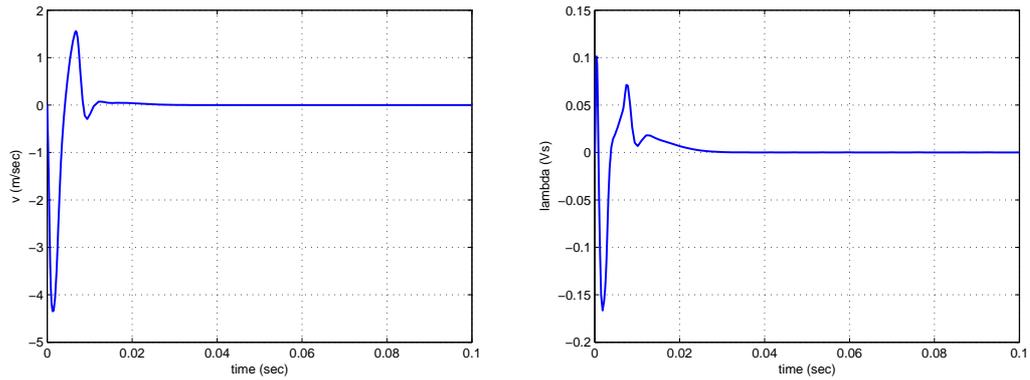


Figure 4: Andamento della velocità e del flusso magnetico rispetto al proprio equilibrio.

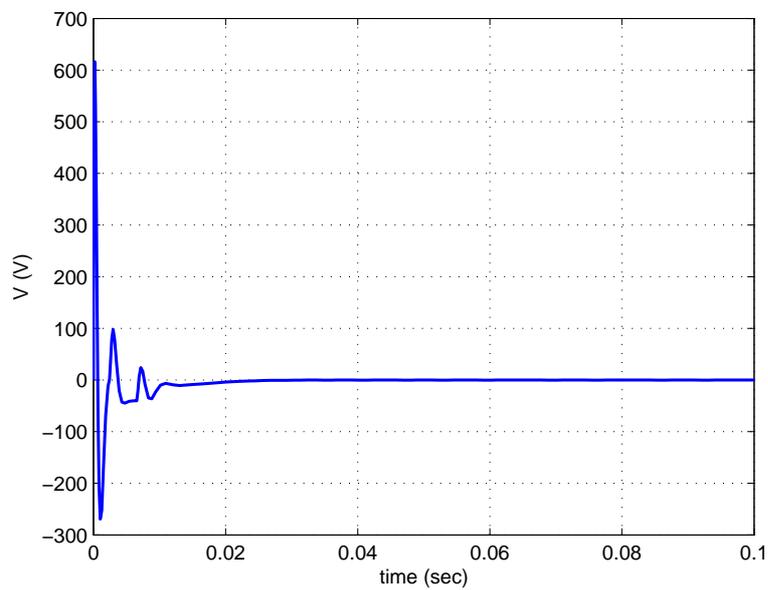


Figure 5: Andamento del segnale di controllo relativamente al proprio valore di equilibrio V_{eq} .

Una volta ottenuta la prima stima è possibile andare a scegliere una nuova funzione di Lyapunov modificando opportunamente la matrice Q , ad esempio con la seguente procedura per bisezione sul raggio

```

Q = randn(m,m);
Q = (Q*Q')/2;

Pq = lyap(Af',Q);

tolR = 1e-5;
% raggio della curva di livello
R = 1 + tolR;
R_max = Inf;
R_min = 0;

while R_max-R_min > tolR
    R
    ok = evalvdot(Pq,Q,R);

```

```

if (ok == 1)
    R_min = R;
    if (R_max == Inf)
        R = R/2 + R;
    else
        R = R + (R_max - R)/2;
    end
else
    R_max = R;
    R = R - (R - R_min)/2;
end
end
end

```

e ripetendo la procedura riportata precedentemente. Una stima della regione di asintotica stabilità per il sistema in esame è riportata in figura 6.

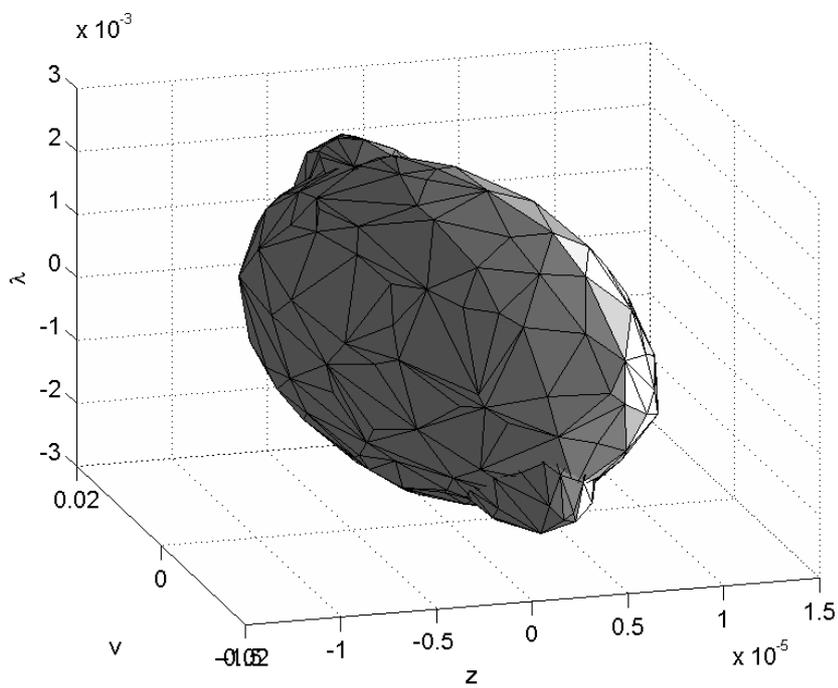


Figure 6: Stima, per difetto, della regione di asintotica stabilità del sistema in esame.