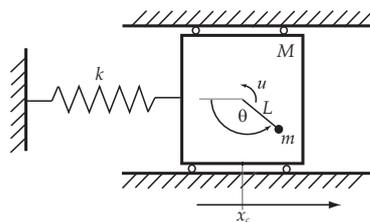


## Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 19-4-2006

Si consideri il sistema meccanico di figura, che rappresenta un oscillatore lineare con attuatore rotante (TORA).



Sistema meccanico

Una piattaforma di massa  $M$  collegata mediante una molla di costante elastica  $k$  è libera di muoversi orizzontalmente. Sulla piattaforma oscillante è installata una massa rotante di massa  $m$  e momento di inerzia  $I$  rispetto al proprio baricentro, collocato a distanza  $L$  dall'asse di rotazione. La massa è attuata, mediante un motore in grado di fornire una coppia  $u$ , allo scopo di smorzare le oscillazioni della piattaforma oscillante. Indicando con  $x_c$  la posizione orizzontale della piattaforma e con  $\theta$  la posizione angolare della massa rotante (misurata in senso antiorario), le equazioni dinamiche del sistema sono date da

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} (x_c + L \sin \theta) &= F_x \\ m \frac{d^2}{dt^2} (L \cos \theta) &= F_y \\ I \ddot{\theta} &= u + F_y L \sin \theta - F_x L \cos \theta \\ M \ddot{x}_c &= -F_x - kx_c. \end{aligned}$$

Eliminando  $F_x$  e  $F_y$  e risolvendo in  $\ddot{\theta}$  e  $\ddot{x}_c$  si ottiene

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x}_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\theta)} \begin{bmatrix} m + M & -mL \cos \theta \\ -mL \cos \theta & I + mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ mL\dot{\theta}^2 \sin \theta - kx_c \end{bmatrix}$$

dove  $\Delta(\theta) = (I + mL^2)(m + M) - m^2L^2 \cos^2 \theta > 0$ .

- A** Si riscrivano le equazioni del sistema rispetto alle seguenti variabili di stato:  $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\theta \ x_c \ \dot{\theta} \ \dot{x}_c]^T$  e si calcolino tutti i punti di equilibrio fornendo una spiegazione fisica dei risultati trovati;
- B** Si linearizzi il sistema rispetto all'equilibrio nell'origine;
- C** Si studi la raggiungibilità del linearizzato e la sua osservabilità nel caso si adotti come uscita la sola posizione angolare  $\theta$  e la sola posizione lineare  $x_c$ ; si forniscano inoltre (se esistono) due condizioni iniziali distinte non completamente nulle tali per cui per qualunque ingresso  $u$  il sistema produce la medesima uscita. Si fornisca una giustificazione fisica dei risultati ottenuti;
- D** Si studi la stabilizzabilità e la detettabilità del sistema nei casi del punto precedente;
- E (Opzionale)** Si considerino i seguenti valori numerici:  $m = 1 \text{ Kg}$ ,  $M = 5 \text{ Kg}$ ,  $L = 0.1 \text{ m}$ ,  $I = 0.01 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$  e  $k = 20 \text{ N/m}$  e si supponga il valore del controllo limitato da  $|u| \leq 1$ . Si calcoli e si disegni una stima della proiezione nel piano  $(\theta, x)$  dell'insieme di punti raggiungibili in tempo limitato a partire da condizione iniziale nulla ( $\theta = x = \dot{\theta} = \dot{x}_c = 0$ ).

*Suggerimento.* Si discretizzi il sistema (linearizzato) secondo la tecnica 'Eulero in avanti' con tempo di campionamento  $T = 0.1 \text{ s}$  e si calcoli la proiezione nel piano  $(\theta, x)$  dell'insieme di punti raggiungibili in 4 passi.

## Soluzione

**A** Le equazioni dinamiche del sistema rispetto alle variabili di stato  $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\theta \ x_c \ \dot{\theta} \ \dot{x}_c]^T$  sono date da

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{mL \cos x_1}{\Delta(x_1)} (mLx_3^2 \sin x_1 - kx_2) + \frac{m+M}{\Delta(x_1)} u \\ \dot{x}_4 &= \frac{I+mL^2}{\Delta(x_1)} (mLx_3^2 \sin x_1 - kx_2) - \frac{mL \cos x_1}{\Delta(x_1)} u. \end{aligned} \quad (1)$$

I punti di equilibrio si calcolano ponendo  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = \dot{x}_4 = 0$ . Dalle equazioni dinamiche si ha:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_4 = 0 \\ \frac{mL \cos x_1}{\Delta(x_1)} kx_2 &= -\frac{m+M}{\Delta(x_1)} u \\ \frac{I+mL^2}{\Delta(x_1)} kx_2 &= -\frac{mL \cos x_1}{\Delta(x_1)} u \end{aligned}$$

da cui si ottiene (essendo  $\Delta(x_1) \neq 0$ )

$$\begin{aligned} u &= -\frac{m}{m+M} kLx_2 \cos x_1 \\ (m+M)(I+mL^2)x_2 &= m^2L^2x_2 \cos^2 x_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Distinguiamo i casi  $x_2 = 0$  e  $x_2 \neq 0$ .

Se  $x_2 = 0$  allora i punti di equilibrio (e il relativo controllo) sono dati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_3 = x_4 = 0 \\ x_1 &\text{ qualunque} \\ u &= 0. \end{aligned}$$

Si vede, infatti, che se la posizione orizzontale è nulla come nulle sono le velocità e la forzante esterna, allora la posizione angolare della massa rotante è indifferente; quindi in tal caso ogni valore d'angolo è punto di equilibrio.

Se  $x_2 \neq 0$ , dalla seconda delle (2) si ottiene

$$\cos^2 x_1 = \frac{(m+M)(I+mL^2)}{m^2L^2}$$

la quale non ammette soluzione poiché il secondo membro è sempre maggiore di 1. Pertanto l'unico equilibrio si ha per  $x_2 = 0$ .

**B** Linearizziamo il sistema (1) nell'intorno dell'origine ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $u = 0$ ). Posto  $f_3(\mathbf{x}, u) = -\frac{mL \cos x_1}{\Delta(x_1)} (mLx_3^2 \sin x_1 - kx_2) + \frac{m+M}{\Delta(x_1)} u$  e  $f_4(\mathbf{x}, u) = \frac{I+mL^2}{\Delta(x_1)} (mLx_3^2 \sin x_1 - kx_2) - \frac{mL \cos x_1}{\Delta(x_1)} u$  e ricordando che  $\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta(x_1) \Big|_{x_1=0} = 2m^2L^2 \cos x_1 \sin x_1 \Big|_{x_1=0} = 0$ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} f_3(\mathbf{x}, u) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ u=0}} &= \frac{1}{\Delta^2(x_1)} [(mL \sin x_1 (mLx_3^2 \sin x_1 - kx_2) - m^2L^2x_3^2 \cos^2 x_1) \Delta(x_1) \\ &\quad - \frac{\partial \Delta(x_1)}{\partial x_1} (-mL \cos x_1 (mLx_3^2 \sin x_1 - kx_2))] + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{m+M}{\Delta(x_1)} u \right) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ u=0}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial}{\partial x_2} f_3(\mathbf{x}, u) \right|_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ u=0}} &= \left. \frac{mkL \cos x_1}{\Delta(x_1)} \right|_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ u=0}} = \frac{mkL}{I(m+M) + mML^2} \\ \left. \frac{\partial}{\partial x_3} f_3(\mathbf{x}, u) \right|_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ u=0}} &= \left. \frac{-2m^2L^2x_3 \cos x_1 \sin x_1}{\Delta(x_1)} \right|_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ u=0}} = 0 \\ \left. \frac{\partial}{\partial x_4} f_3(\mathbf{x}, u) \right|_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ u=0}} &= 0 \\ \left. \frac{\partial}{\partial u} f_3(\mathbf{x}, u) \right|_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ u=0}} &= \left. \frac{m+M}{\Delta(x_1)} \right|_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ u=0}} = \frac{m+M}{I(m+M) + mML^2}\end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} f_4(\mathbf{x}, u) \right|_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ u=0}} = \frac{(I+mL^2)}{\Delta^2(x_1)} \left[ mLx_3^2 \Delta(x_1) \cos x_1 - \frac{\partial \Delta(x_1)}{\partial x_1} (mLx_3^2 \sin x_1 - kx_2) \right] + \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{mL \cos x_1}{\Delta(x_1)} u \right) \right|_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ u=0}} = 0$$

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial}{\partial x_2} f_4(\mathbf{x}, u) \right|_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ u=0}} &= \left. -\frac{k(I+mL^2)}{\Delta(x_1)} \right|_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ u=0}} = -\frac{k(I+mL^2)}{I(m+M) + mML^2} \\ \left. \frac{\partial}{\partial x_3} f_4(\mathbf{x}, u) \right|_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ u=0}} &= \left. \frac{2(I+mL^2)mL}{\Delta(x_1)} x_3 \sin x_1 \right|_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ u=0}} = 0 \\ \left. \frac{\partial}{\partial x_4} f_4(\mathbf{x}, u) \right|_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ u=0}} &= 0 \\ \left. \frac{\partial}{\partial u} f_4(\mathbf{x}, u) \right|_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ u=0}} &= \left. -\frac{mL \cos x_1}{\Delta(x_1)} \right|_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ u=0}} = -\frac{mL}{I(m+M) + mML^2}.\end{aligned}$$

Il sistema linearizzato è dunque pari a

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + bu \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ a_1 &= \frac{mkL}{I(m+M) + mML^2}, \quad a_2 = -\frac{k(I+mL^2)}{I(m+M) + mML^2} \\ b_1 &= \frac{m+M}{I(m+M) + mML^2}, \quad b_2 = -\frac{mL}{I(m+M) + mML^2}\end{aligned}$$

**C** La matrice di raggiungibilità del sistema linearizzato è data da

$$R = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & a_1 b_2 \\ 0 & b_2 & 0 & a_2 b_2 \\ b_1 & 0 & a_1 b_2 & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 b_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Essa ha determinante pari a  $\det(R) = -b_2^2(a_1b_2 - a_2b_1)^2$ , che è sempre diverso da zero poiché  $a_1b_2 - a_2b_1 = I(m+M) + mML^2 \neq 0$ . Dunque il sistema è completamente raggiungibile.

Per quanto concerne l'osservabilità definiamo la matrice  $c_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$  che considera come uscita la variabile  $\theta$  e la matrice  $c_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$  che considera come uscita la variabile  $x_c$ . Con queste due uscite otteniamo le seguenti matrici di osservabilità:

$$O_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}, \quad O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix},$$

da cui, essendo  $a_1 \neq 0$  e  $a_2 \neq 0$ , si ha che  $\text{rank}(O_1) = 4$  e  $\text{rank}(O_2) = 2$ . Il sistema risulta quindi completamente osservabile dalla variabile angolare  $\theta$ , ma non completamente osservabile dalla variabile  $x_c$ . Questi risultati non stupiscono se si considera la matrice dinamica  $A$  del linearizzato dalla quale risulta evidente che la variabile  $\theta$  non influenza la dinamica di  $x_c$  mentre  $x_c$  compare nella dinamica di  $\theta$ . D'altronde ciò era già risultato evidente dall'analisi degli equilibri del sistema. Se  $x_c$  viene tenuta ad un valore costante, la variabile  $\theta$  può assumere un valore arbitrario purché costante. Il motivo di questa asimmetria dipende dal fatto che nel sistema non lineare per valori di  $\dot{\theta} \approx 0$  la variabile  $\theta$  influenza "meno" la variabile  $x_c$  di quanto non sia da essa influenzata. Infatti nelle equazioni dinamiche non lineari, la variabile  $x_c$  compare direttamente (come forza di richiamo della molla) nella dinamica di  $\theta$ , mentre la variabile  $\theta$  compare pesata dal quadrato di  $\dot{\theta}$ , quindi con un valore superiore di infinitesimo. Il fatto che  $\dot{\theta}$  figuri nelle equazioni solo al quadrato fornisce una giustificazione al perché, se  $\dot{\theta} \approx 0$ , anche essa non risulta osservabile da  $x_c$ .

Due stati iniziali distinti che producano la stessa uscita per qualunque valore del segnale di ingresso  $u$ , si possono avere solo nel caso di perdita di osservabilità, pertanto dei due casi precedenti consideriamo solo il secondo (osservazione di  $x_c$ ). I due stati iniziali cercati sono tali per cui la loro differenza appartiene al sottospazio di non osservabilità, cioè al  $\ker(O_2)$ . Quindi, poniamo siano essi  $\mathbf{x}_{01}$  e  $\mathbf{x}_{02}$ , devono soddisfare la relazione  $\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02} = [\alpha \ 0 \ \beta \ 0]^T$ , con  $\alpha, \beta$  generici non contemporaneamente nulli. Ciò è una conferma che dalla conoscenza di  $x_c$  non sia possibile risalire allo stato iniziale di  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ .

**D** Il sistema risulta completamente raggiungibile e dunque ovviamente stabilizzabile. Disponendo della misura della variabile  $\theta$  come uscita esso risulta completamente osservabile e quindi ovviamente detettabile. Rimane da considerare il caso in cui si misuri la sola variabile  $x_c$ . Affinché il sistema risulti detettabile, i modi non osservabili dovranno essere asintoticamente stabili. Portiamo quindi il sistema in forma standard di osservazione. Dalla matrice di osservabilità si ottiene subito che  $\bar{O} = \ker(O_2) = \text{span} \left\{ [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \right\}$ , pertanto una matrice di trasformazione può essere costruita come

$$T = [ T_{\mathcal{O}} \mid T_{\bar{\mathcal{O}}} ] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

mediante la quale si ottiene

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[ \begin{array}{cc|cc} A_{\mathcal{O}} & \mathbf{0} \\ \hline A_{\mathcal{O}\bar{\mathcal{O}}} & A_{\bar{\mathcal{O}}} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Quindi  $A_{\bar{\mathcal{O}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  i cui autovalori sono  $\lambda_{1,2} = 0$ . Il sistema non è quindi detettabile tramite l'uscita  $x_c$ .

**E** L'equazione alle differenze che descrive il sistema discretizzato secondo la tecnica 'Eulero in avanti' è la seguente

$$x(t+T) = (I + TA)x(t) + Tbu(t)$$

quindi le matrici sono date da

$$A_d = I + TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & Ta_1 & 1 & 0 \\ 0 & Ta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1.818 & 1 & 0 \\ 0 & -0.364 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_d = Tb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Tb_1 \\ Tb_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.455 \\ -0.091 \end{bmatrix}$$

L'insieme  $\mathcal{X}_4$  dei punti raggiungibili in 4 passi a partire da condizione iniziale nulla al variare di tutti i possibili controlli entro i limiti imposti è definito dalla seguente equazione

$$x = R_4 \begin{bmatrix} u(3) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

ove con  $R_4$  si sia indicata la matrice di raggiungibilità in 4 passi. L'insieme  $\mathcal{U}_v$  dei controlli vincolati è dato da un ipercubo di lato 2 in  $\mathbb{R}^4$  centrato nell'origine, i cui vertici sono dati dai valori estremi (1 e -1) assumibili dal controllo. I vettori che definiscono tali vertici sono pertanto  $2^4 = 16$  e sono riportati di seguito

$$\begin{aligned} w_1 = -w_{16} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & w_2 = -w_{15} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, & w_3 = -w_{14} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, & w_4 = -w_{13} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \\ w_5 = -w_{12} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & w_6 = -w_{11} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, & w_7 = -w_{10} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, & w_8 = -w_9 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

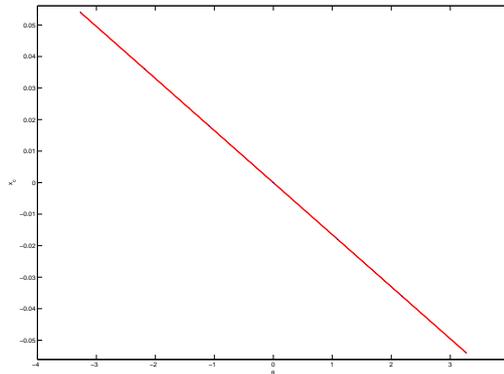
È noto che una trasformazione lineare applicata ad un politopo produce un altro politopo i cui vertici sono i vecchi vertici trasformati secondo la medesima applicazione. In altri termini, nel caso in esame, l'insieme  $\mathcal{X}_4 = R_4 \mathcal{U}_v$  si ottiene trasformando secondo  $R_4$  i vertici  $w_i$ . I nuovi vertici  $v_i = R_4 w_i$  sono dati da

$$\begin{aligned} v_1 = -v_{16} &= \begin{bmatrix} 3.271 \\ -0.054 \\ 21.752 \\ -0.350 \end{bmatrix}, & v_2 = -v_{15} &= \begin{bmatrix} 0.002 \\ 0 \\ 10.942 \\ -0.188 \end{bmatrix}, & v_3 = -v_{14} &= \begin{bmatrix} 1.089 \\ -0.018 \\ 10.876 \\ -0.175 \end{bmatrix}, & v_4 = -v_{13} &= \begin{bmatrix} -2.180 \\ 0.036 \\ 0.066 \\ -0.013 \end{bmatrix}, \\ v_5 = -v_{12} &= \begin{bmatrix} 2.180 \\ -0.036 \\ 10.843 \\ -0.169 \end{bmatrix}, & v_6 = -v_{11} &= \begin{bmatrix} -1.089 \\ 0.018 \\ 0.033 \\ -0.007 \end{bmatrix}, & v_7 = -v_{10} &= \begin{bmatrix} -0.002 \\ 0 \\ -0.033 \\ 0.007 \end{bmatrix}, & v_8 = -v_9 &= \begin{bmatrix} -3.271 \\ 0.054 \\ -10.843 \\ 0.169 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Siamo interessati ad una proiezione di tale politopo sul piano  $(\theta, x)$ , pertanto una sua rappresentazione planare (in  $\mathbb{R}_2$ ) sarà data dall'involucro convesso dei vettori ottenuti prelevando le prime due componenti dai precedenti

$$\begin{aligned} v_{r1} = v_{r9} = -v_{r8} - v_{r16} &= \begin{bmatrix} 3.271 \\ -0.054 \end{bmatrix}, & v_{r2} = v_{r10} = -v_{r7} = -v_{r15} &= \begin{bmatrix} 0.002 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ v_{r3} = v_{r11} = -v_{r6} = -v_{r14} &= \begin{bmatrix} 1.089 \\ -0.018 \end{bmatrix}, & v_{r4} = v_{r12} = -v_{r5} = -v_{r13} &= \begin{bmatrix} -2.180 \\ 0.036 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

I vettori utili sono quindi solo 8. Una rappresentazione grafica dell'insieme cercato è riportato in figura.



Proiezione sul piano  $(\theta, x)$  dell'insieme dei punti raggiungibili in 4 passi.

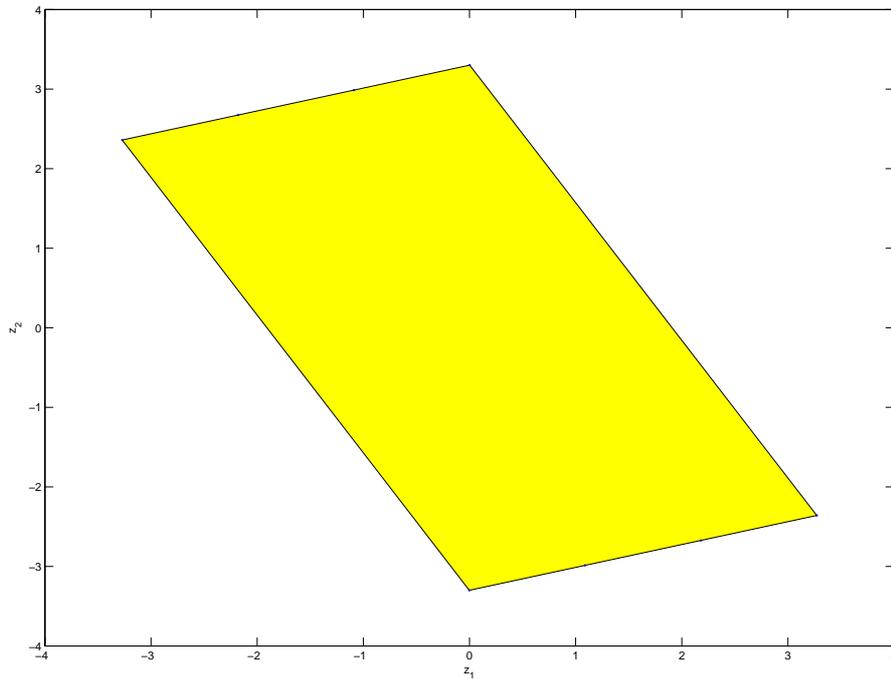
Come si può notare l'insieme dei punti raggiungibili in 4 passi è fortemente schiacciato lungo una direzione preferenziale, ad indicare che alcune posizioni sono più facilmente raggiungibili di altre (cioè con controlli dal valore più basso). Allo scopo di visualizzare meglio tale insieme operiamo una trasformazione lineare del tipo

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_g \begin{bmatrix} \theta \\ x_c \end{bmatrix}$$

e rappresentiamo l'insieme rispetto alle nuove coordinate  $(z_1, z_2)$ . Ponendo

$$T_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9999 & -0.0165 \\ 0.0165 & 0.9999 \end{bmatrix}$$

si ottiene il grafico riportato di seguito.



Rappresentazione nelle coordinate  $(z_1, z_2)$  dell'insieme dei punti raggiungibili in 4 passi nel piano  $(\theta, x)$ .