Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 25-1-2006

Quesito 1
Si consideri un sistema la cui f.d.t. sia data da

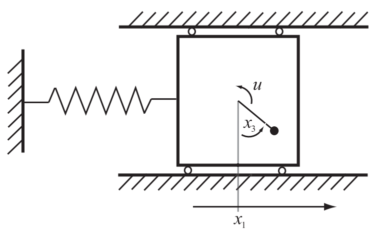
$$G(s) = \frac{(s-1)}{(s-2)(s^2+4s+5)} \tag{1}$$

1.A Si progetti un regolatore che renda asintoticamente stabile il sistema e garantisca un errore nullo a regime nell'inseguimento di un gradino. Si descriva la procedura di progettazione in dettaglio, e si riportino gli schemi a blocchi che descrivono il montaggio del regolatore;

1.B Si ottenga la f.d.t. del controllore $C(s)$ progettato e la si riporti esplicitamente. Si discuta il progetto effettuato in termini di luogo delle radici del sistema originale e compensato, interpretando i risultati della progettazione eseguita nello spazio di stato in termini delle classiche procedure sul luogo delle radici;

1.C Simulare le risposte del sistema compensato al gradino ed alle sinusoidi di frequenza 1, 10, e 100 Hz, rispettivamente.

Quesito 2
Si consideri il sistema meccanico di figura, che rappresenta un oscillatore lineare con attuatore rotante.



Sistema meccanico

Le equazioni dinamiche del sistema sono date da

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{-x_1 + \varepsilon x_4^2 \sin x_3}{1-\varepsilon^2\cos^2 x_3} + \frac{-\varepsilon \cos x_3}{1-\varepsilon^2\cos^2 x_3} u \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{\varepsilon \cos x_3 (x_1 - \varepsilon x_4^2 \sin x_3) + u}{1-\varepsilon^2\cos^2 x_3}
\end{aligned}$$

dove $\varepsilon = 0.1$ è un parametro che tiene conto delle masse e delle rigidezze nel sistema. Le variabili (x_1, x_2, x_3, x_4) corrispondono, a meno di normalizzazioni, rispettivamente allo scostamento dalla posizione di equilibrio ed alla velocità del carrello, all'angolo misurato rispetto alla verticale ed alla velocità angolare. Operando il seguente cambio di variabili $z_1 = x_1 + \varepsilon \sin x_3$, $z_2 = x_2 + \varepsilon x_4 \cos x_3$, $z_3 = x_3$ e $z_4 = x_4$, il sistema assume la forma

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= -z_1 + \varepsilon \sin z_3 \\
\dot{z}_3 &= z_4 \\
\dot{z}_4 &= \frac{1}{1-\varepsilon^2\cos^2 z_3}\left[\varepsilon \cos z_3 \left(z_1 - \varepsilon\left(1+z_4^2\right)\sin z_3\right) + u\right].
\end{aligned}$$

2.A Si progetti una legge di controllo in grado di rendere il sistema a ciclo chiuso globalmente asintoticamente stabile nell'origine.

[*Suggerimento:* Si faccia uso della seguente (candidata) funzione di Lyapunov di controllo: $V(z) = \frac{1}{2}\left(z_1 - \varepsilon \sin z_3\right)^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 + \frac{1}{2}z_4^2$.]

Soluzione

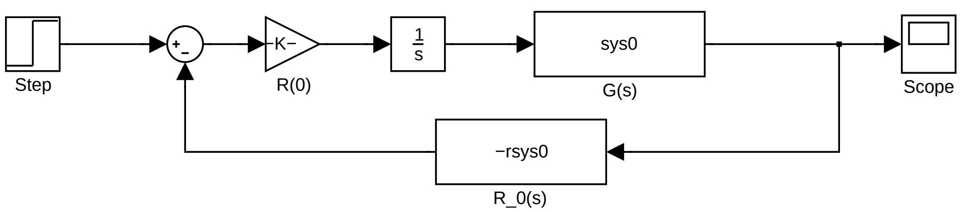
1.A Il sistema in esame è instabile ad anello aperto e a fase non minima. Al fine di ottenere un sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile sfrutteremo le tecniche di progettazione nello spazio di stato avvalendoci della proprietà di separazione degli autovalori dell'osservatore e del controllore. La specifica di errore nullo al gradino si realizza inserendo un polo nell'origine nella catena diretta. Per ottenere questo, si procede a modificare il sistema originale (descritto ad esempio in Matlab da `sys0=zpk(1,[2 -2-j -2+j])`) aggiungendovi fittiziamente un polo nell'origine (`sys=series(sys,tf(1,[1 0]))`), per progettare poi il regolatore su questo sistema aumentato.

Calcoliamo (ad esempio con `[A,B,C,D]=ssdata(sys)`) una possibile realizzazione del sistema aumentato ad anello aperto:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1.7783 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1.687 & 0.5623 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0.$$

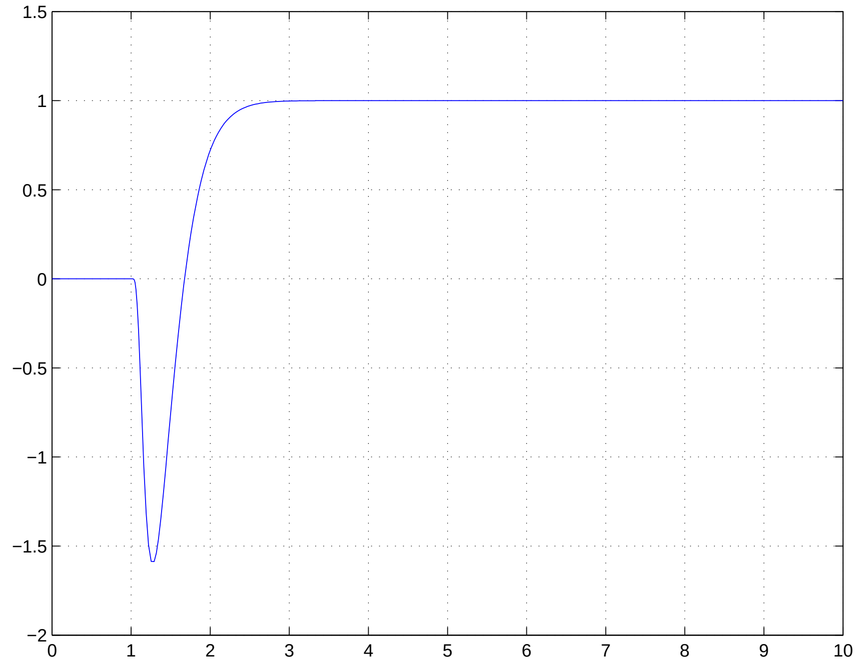
Effettuiamo l'allocazione degli autovalori a ciclo chiuso ad esempio in $p = [-5 \pm j, -50, -60]$. La matrice di retroazione che alloca i poli di $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ (calcolata ad esempio con `K=acker(A,B,p)`) vale $\mathbf{K} = 10^4 \begin{bmatrix} 1.3727 & 0.9926 & 0.3657 & 0.0118 \end{bmatrix}$. La matrice $\mathbf{L}$ di iniezione delle uscite sugli stati che pone i poli di $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ in q, ad esempio $q = [-50 \pm 5j, -80, -100]$, (`L=transpose(acker(A',C',q))`) è data da $\mathbf{L} = 10^7 \begin{bmatrix} 0.3820 & 1.1461 & 2.1513 & 2.2825 \end{bmatrix}^T$.

Il regolatore $\mathbf{R}(s) = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC})^{-1}\mathbf{L}$ (che può essere ottenuto ad esempio con `R=ss(A-B*K-L*C,L,K,0)` ovvero -a meno di un segno- con `rsys=reg(sys,K,L)`) può essere montato in retroazione negativa, mentre l'integratore deve essere posto in catena diretta. Al fine di rendere effettivamente nullo l'errore a regime al gradino è necessario spostare il guadagno statico del compensatore $\mathbf{R}(0)$ dal canale di retroazione alla catena diretta, ponendolo cioè in serie all'integratore, come illustrato in figura (si fa notare che $\mathbf{R}_0(s) = \frac{\mathbf{R}(s)}{\mathbf{R}(0)}$).



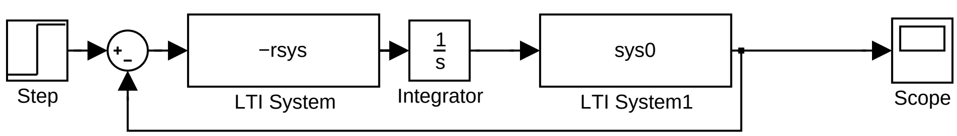
Tale correzione sui guadagni diviene necessaria poiché per garantire errore a regime nullo il guadagno statico nel canale di retroazione deve essere unitario. Questa considerazione risulta evidente dall'applicazione del teorema del valore finale alla funzione di trasferimento dell'errore soggetta ad un ingresso a gradino

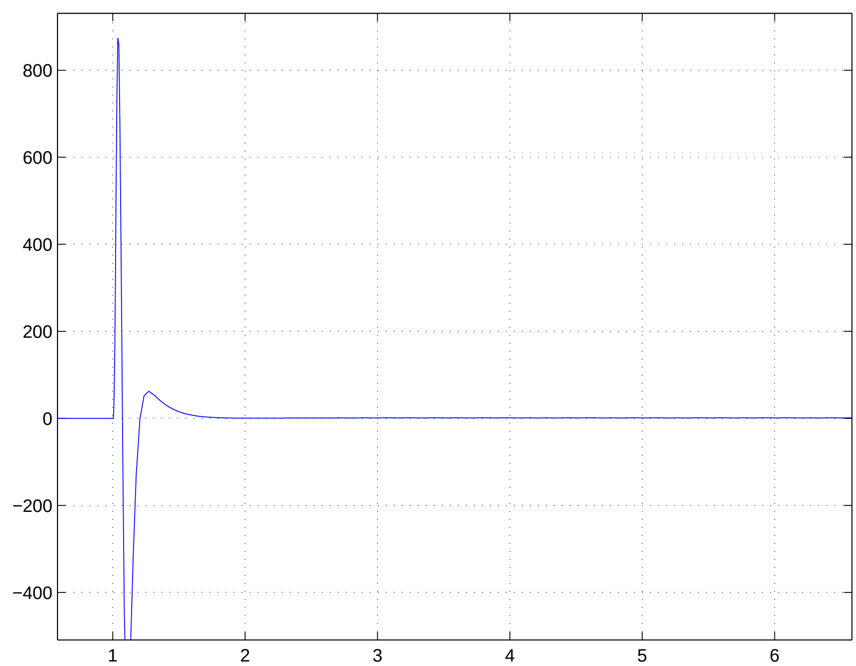
$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0} s\mathbf{E}(s)\frac{1}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \left(1 - \frac{\frac{\mathbf{R}(0)}{s}\mathbf{G}(s)}{1 + \frac{\mathbf{R}(0)}{s}\mathbf{G}(s)\mathbf{R}_0(s)} \right) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{s + \mathbf{R}(0)\mathbf{G}(s)\mathbf{R}_0(s) - \mathbf{R}(0)\mathbf{G}(s)}{s + \mathbf{R}(0)\mathbf{G}(s)\mathbf{R}_0(s)} \\
&= \frac{\mathbf{R}_0(0) - 1}{\mathbf{R}_0(0)} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{R}_0(0) = 1.
\end{aligned}$$



La risposta al gradino del sistema compensato presenta una inversione di segno (cosa inevitabile, data la presenza di uno zero a fase non minima che non può essere eliminato dal controllo).

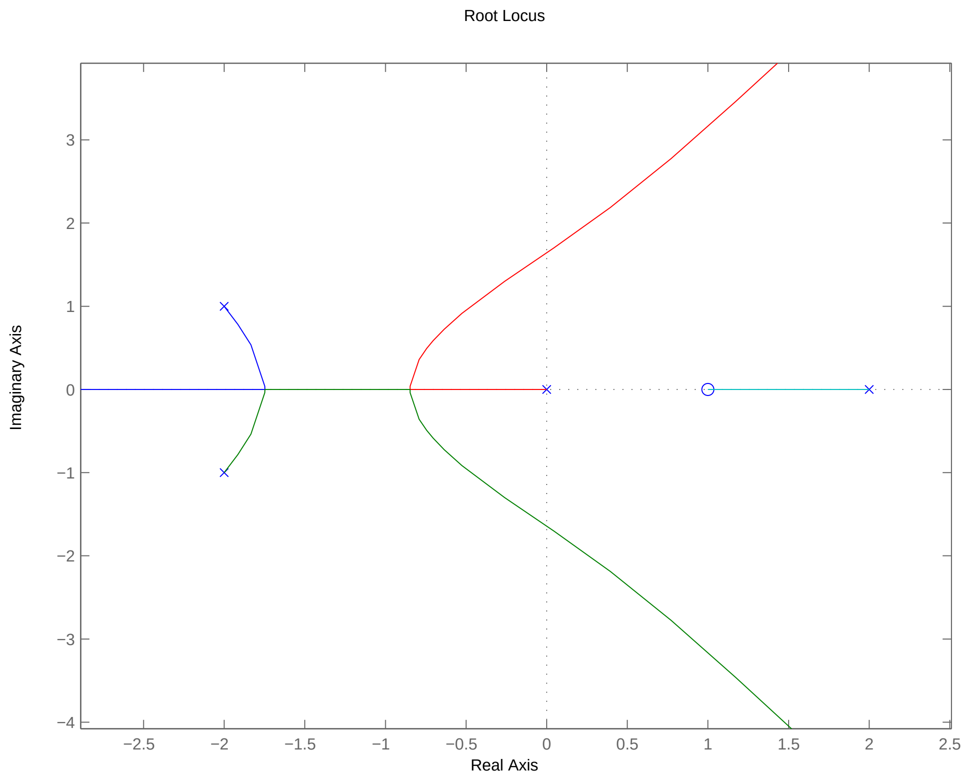
Un diverso possibile montaggio è riportato nella figura sottostante, assieme alla risposta al gradino ottenuta.



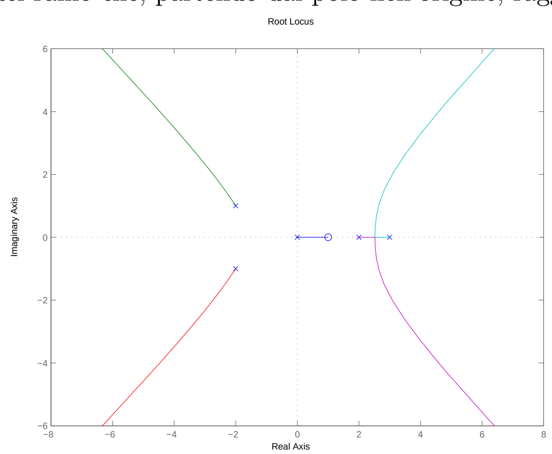


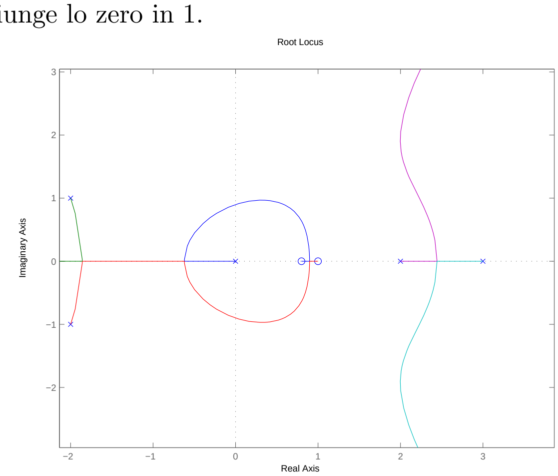
Si osserva dalla risposta riportata che il gradino è raggiunto solo dopo un transitorio inaccettabile.

1.B Il luogo delle radici del sistema assegnato, dopo aver inserito il polo nell'origine per la verifica delle specifiche statiche, si presenta come in figura



La stabilizzazione del sistema è resa problematica dal ramo che partendo dal polo instabile, raggiunge lo zero a parte reale positiva. È evidente che nessun controllore a fase minima (cioè con singolarità tutte a parte reale negativa) può risolvere questo problema. L'inserimento di un polo instabile a destra dello zero in 1 permette di avere una biforcazione del luogo (si veda la figura a sinistra), che allontana i rami dall'asse reale e potrebbe quindi consentire ad una forte azione anticipatrice di attrarli a sinistra dell'asse immaginario. A questo si oppone però adesso la presenza del ramo che, partendo dal polo nell'origine, raggiunge lo zero in 1.





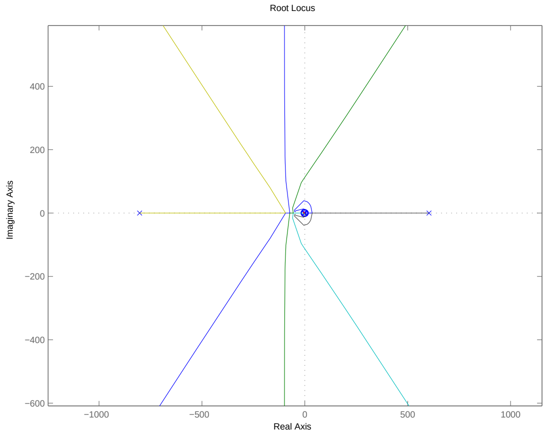
Qualsiasi nuovo polo instabile non eliminerebbe questo o analogo problema. È quindi indispensabile inserire anche uno zero a parte reale positiva, nei pressi di quello già esistente. Il luogo risultante si presenta come nella figura di destra. La effettiva stabilizzazione di questo luogo sarebbe possibile usando azioni anticipatrici, il cui progetto per tentativi è però non banale.

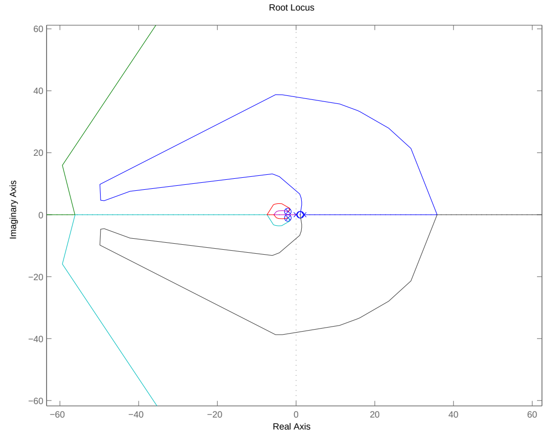
La funzione di trasferimento del compensatore ottenuto dalla sintesi del regolatore (in retroazione negativa) è data da

$$\mathbf{C}(s) = 2.476\ 10^{11}\ \frac{1}{s}\ \ \frac{(s-1.167)}{(s-603.4)}\ \ \frac{(s^2+4.2s+5.451)}{(s+803)(s^2+198.4s+5.104\ 10^5)}.$$

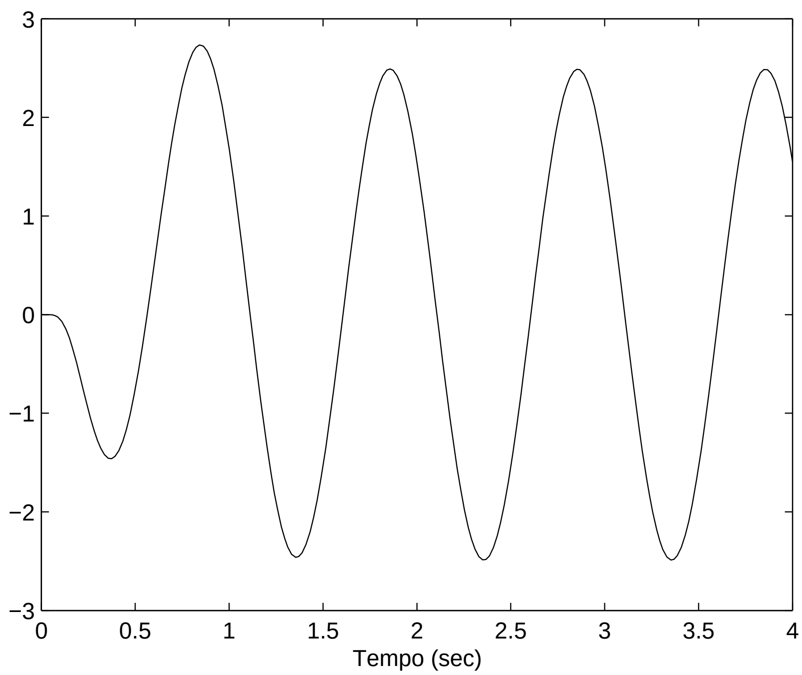
Si possono facilmente osservare in questo compensatore, progettato in modo del tutto sistematico, gli elementi sopra illustrati. Si nota tra l'altro la presenza di due zeri complessi coniugati che all'incirca cancellano la coppia di poli stabili del sistema. Il luogo delle radici del sistema $\mathbf{C}(s)\mathbf{G}(s)$

è riportato nelle figure sottostanti su due diverse scale.

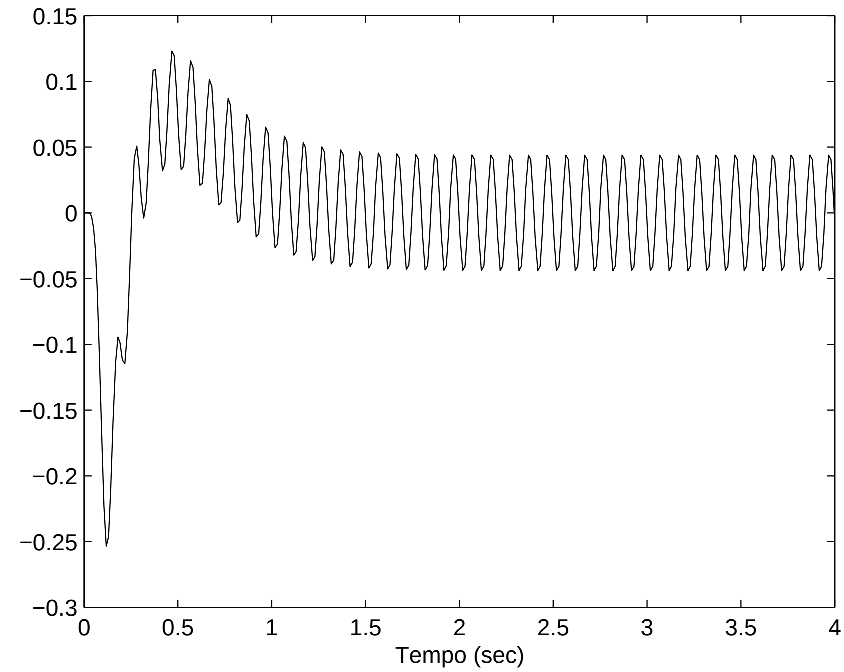




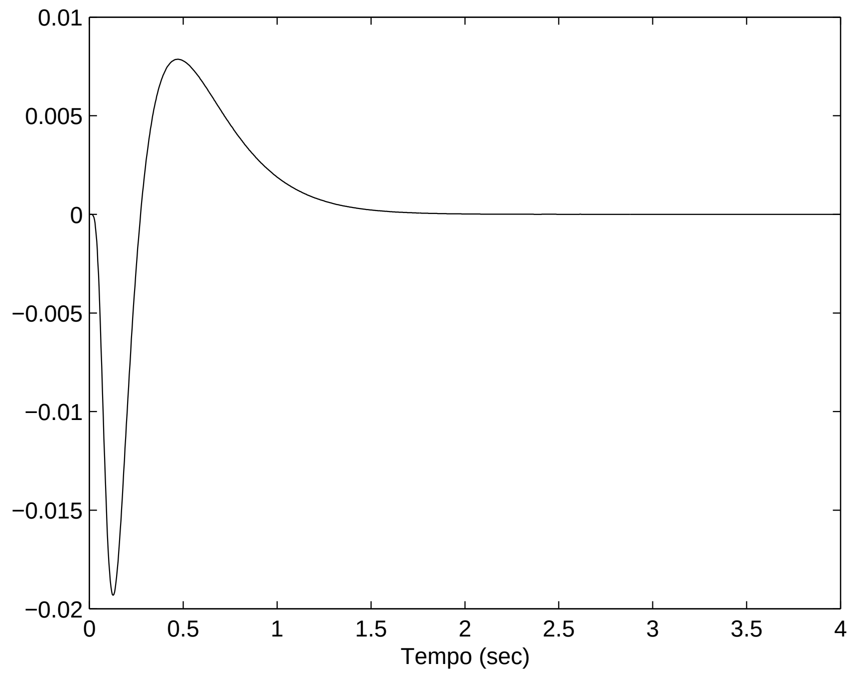
1.C La risposta al gradino del sistema compensato è stata già riportata nel quesito 1A relativamente al primo montaggio. Fermo restando tale montaggio, le risposte alle sinusoidi sono di seguito illustrate.



Risposta del sistema a ciclo chiuso alla sinusoide di frequenza 1 Hz

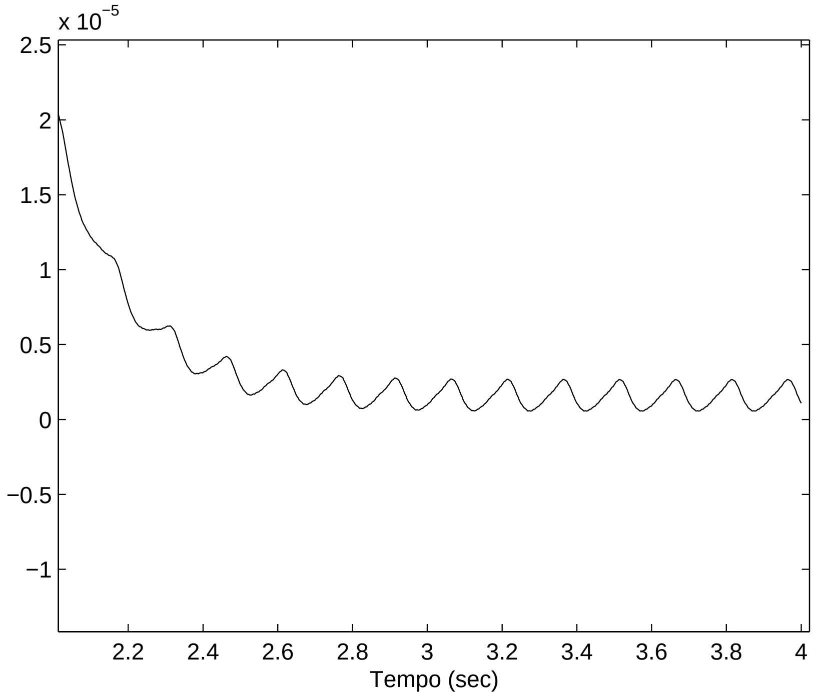


Risposta del sistema a ciclo chiuso alla sinusoide di frequenza 10 Hz



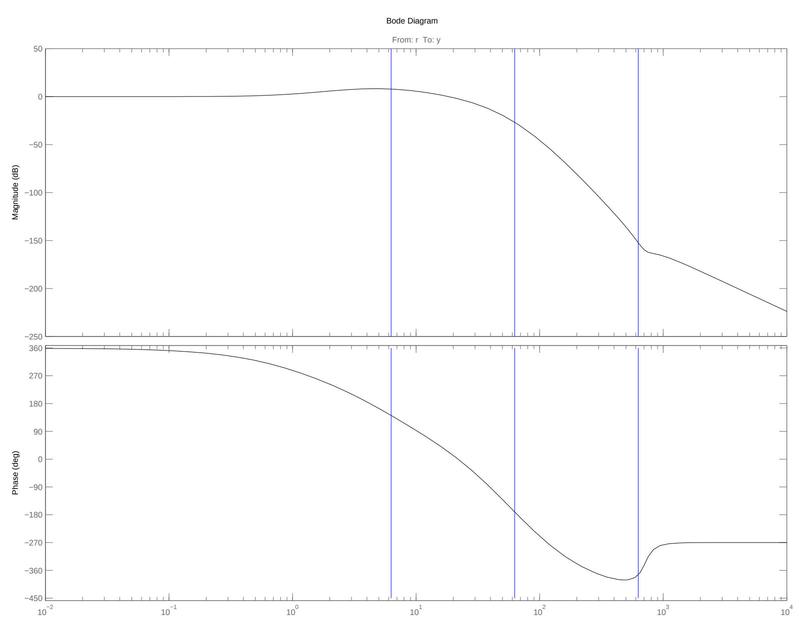
Risposta del sistema a ciclo chiuso alla sinusoide di frequenza 100 Hz

Come si nota dalle figure precedenti, la risposta del sistema alle sinusoidi è costituita da un breve transitorio seguito da una sinusoide alla medesima frequenza di quella in ingresso. Nel caso della sinusoide a 100 Hz può essere utile il seguente ingrandimento



Risposta del sistema a ciclo chiuso alla sinusoide di frequenza 100 Hz (ingrandimento)

In accordo con quanto previsto dal teorema della risposta armonica l'ampiezza e la fase della sinusoide di uscita a regime sono date dai valori di modulo e fase della funzione di trasferimento del sistema a ciclo chiuso.



Diagrammi di Bode del sistema a ciclo chiuso

2.A È facile verificare che la funzione di Lyapunov di controllo suggerita $V(z) = \frac{1}{2}\left(z_1 - \varepsilon \sin z_3\right)^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 + \frac{1}{2}z_4^2$ risulta essere definita positiva ovunque e nulla solo nell'origine, nonché radialmente illimitata.Queste proprietà la rendono idonea per la progettazione di una legge di controllo globalmente stabilizzante. Calcoliamo, pertanto, la derivata rispetto al tempo di detta funzione:

$$\frac{dV(z)}{dt} = \left(z_1 - \varepsilon \sin z_3\right)\left(\dot{z}_1 - \varepsilon \dot{z}_3 \cos z_3\right) + z_2\dot{z}_2 + z_3\dot{z}_3 + z_4\dot{z}_4.$$

Sostituendo la dinamica del sistema nella precedente relazione, si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{dV(z)}{dt} &= (z_1 - \varepsilon \sin z_3)(z_2 - \varepsilon z_4 \cos z_3) - z_2 (z_1 - \varepsilon \sin z_3) + z_3 z_4 \\
&+ \frac{z_4}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 z_3} \left[\varepsilon \cos z_3 \left(z_1 - \varepsilon \left(1 + z_4^2\right) \sin z_3\right) + u\right] \\
&= z_4 \left[-\varepsilon \cos z_3 (z_1 - \varepsilon \sin z_3) + z_3 + \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 z_3} \left[\varepsilon \cos z_3 \left(z_1 - \varepsilon \left(1 + z_4^2\right) \sin z_3\right) + u\right]\right].
\end{aligned}$$

La legge di controllo deve essere in grado di eliminare i termini non definiti in segno, in modo da produrre una funzione almeno semidefinita negativa. Una possibile scelta è la seguente:

$$u = -\varepsilon \cos z_3 \left(z_1 - \varepsilon \left(1 + z_4^2\right) \sin z_3\right) + \left(1 - \varepsilon^2 \cos^2 z_3\right) \left[\varepsilon \cos z_3 (z_1 - \varepsilon \sin z_3) - z_3 - z_4\right]. \qquad (2)$$

La derivata della funzione di Lyapunov diviene dunque

$$\frac{dV(z)}{dt} = -z_4^2.$$

Si tratta di una funzione semidefinita negativa ed è quindi sufficiente a stabilire la stabilità semplice dell'equilibrio nell'origine, ma non è in grado di appurarne la sua eventuale natura asintotica. A tal fine è possibile fare ricorso al teorema di Krasovskii-LaSalle per accertare se intere traiettorie del sistema sono incluse nell'insieme $\mathcal{S} = \left\{z \in \mathbb{R}^n : \frac{dV(z)}{dt} = 0\right\}$. Nel caso in esame l'insieme $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{R}^n : z_4 = 0\}$. Il sistema in variabili z con la legge di controllo (2) assume la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= -z_1 + \varepsilon \sin z_3 \\
\dot{z}_3 &= z_4 \\
\dot{z}_4 &= \varepsilon \cos z_3 (z_1 - \varepsilon \sin z_3) - z_3 - z_4.
\end{aligned} \qquad (3)$$

Sostituendo in esso la condizione $z_4 = 0$ e dunque $\dot{z}_4 = 0$, dalla terza equazione si ha che $\dot{z}_3 = 0$ e quindi $z_3 =$ costante. Risolvendo la quarta di (3) si ha $z_1 = \frac{z_3}{\varepsilon \cos z_3} + \varepsilon \sin z_3$, che risulta essere costante poiché funzione solo di z_3. Si fa notare che z_1 è ben definita poiché $\cos z_3 \neq 0$; se infatti fosse uguale a zero avremmo $z_3 = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi$ in contraddizione con la quarta equazione che darebbe $0 = \varepsilon \cos z_3 (z_1 - \varepsilon \sin z_3) - z_3 \Rightarrow 0 = -\frac{\pi}{2}$. $z_1 =$ costante implica $\dot{z}_1 = 0$ e, dalla prima di (3), anche $z_2 = 0$. Da quest'ultima relazione abbiamo anche $\dot{z}_2 = 0$ che, sostituita nella seconda di (3) produce $z_1 = \varepsilon \sin z_3$. Eguagliando le due relazioni trovate per z_1 si ha $\varepsilon \sin z_3 = \frac{z_3}{\varepsilon \cos z_3} + \varepsilon \sin z_3$, che ammette come unica soluzione $z_3 = 0$. Si è dunque provato che l'unico punto incluso in $\mathcal{S}$ e compatibile con le equazioni del sistema è l'origine. Di conseguenza, essa risulta essere punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile per il sistema soggetto alla legge di controllo (2).