Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici — 23 Novembre 2005

Numero di matricola						
	–	–	–	–	–	–

A) Si consideri la risposta al gradino unitario riportata in fig. 1 e si determini qualitativamente la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema che la ha generata. Si osservi che nella risposta riportata appare un ritardo pari a circa $\tau = 0.1$s, e che quindi la $G(s)$ è del tipo $G(s) = G'(s)e^{-s\tau}$, dove $G'(s)$ può essere stimata sulla base dei dati riportati.

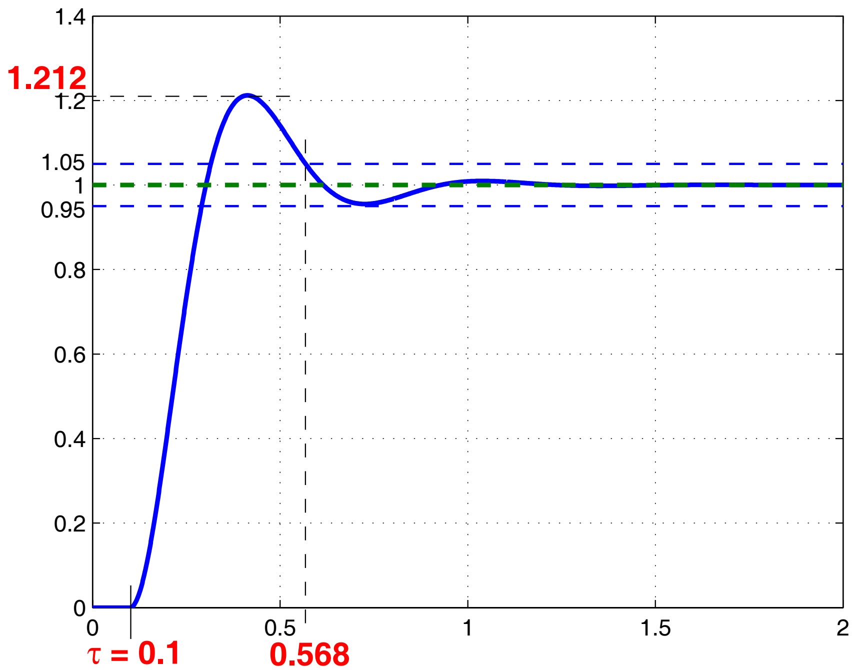

Figure 1: Risposta al gradino unitario del sistema dinamico con ritardo.

B) Osservando che la f.d.t. del ritardo può essere approssimata con $e^{-s\tau} \approx \frac{1-s\tau/2}{1+s\tau/2}$, si discuta la stabilità a ciclo chiuso del sistema utilizzando il metodo del luogo delle radici. In particolare, si determini una approssimazione dell'intervallo di valori del guadagno di anello per i quali il sistema risulta asintoticamente stabile.

C) Si progetti un controllore in modo tale che il sistema controllato insegua con errore nullo a regime un gradino unitario con sovraelongazione nulla e tempo di assestamento $T_{ass} \leq 2$s.

Soluzione

A) In fig. 1 si osserva che il sistema risponde con un ritardo $\tau = 0.1s$, e delle oscillazioni smorzate ad un segnale a gradino unitario. Qualitativamente l'andamento della risposta è quello di un sistema del secondo ordine con ritardo caratterizzato da una f.d.t. del tipo:

$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\delta s}{\omega_n} + 1} e^{-s\tau}.$$

I valori di K, δ e ω_n possono essere calcolati facendo riferimento alla figura. In particolare, essendo il valore di regime della risposta pari a 1, per il teorema del valor finale risulta $K = 1$. Inoltre, la risposta al gradino presenta una sovraelongazione pari a:

$$S = \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty} = \frac{1.212 - 1}{1} = 0.212.$$

Utilizzando l'espressione $S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$, che lega la sovraelongazione S al coefficiente di smorzamento δ di un sistema del secondo ordine, si ricava $\delta = 0.0.4427$. Per determinare ω_n si può utilizzare la relazione approssimata che lega la pulsazione naturale di un sistema del secondo ordine al tempo di assestamento T_a,

$$\omega_n \simeq \frac{3}{\delta T_a}. \tag{1}$$

Per determinare T_a va osservato che la risposta si assesta all'interno del 5% del valore di regime dopo un tempo pari a 0.568s. Tuttavia considerando la presenza del ritardo, per determinare correttamente il tempo di assestamento del sistema occorre sottrarre al valore 0.568 il ritardo $\tau = 0.1$s. Di conseguenza risulta $T_a = 0.468$s. Sostituendo tale valore in eq. (1) si ottiene $w_n = 14.479$rad/s.
A questo punto è possibile riportare il valore numerico della $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{0.0048s^2 + 0.0612s + 1} e^{-0.1s}.$$

B) Approssimando il termine di ritardo che compare nella f.d.t. riportata al punto **A)** con l'espressione suggerita nel testo, si ottiene la seguente f.d.t.

$$G(s) = \frac{1 - 0.05s}{(0.0048s^2 + 0.0612s + 1)(1 + 0.05s)}.$$

Il sistema risultante è a fase non minima data la presenza dello zero reale positivo in $s_z = 20$ ed è asintoticamente stabile a ciclo aperto con poli in $s_1 = -20$ e $s_{2,3} = -6.4103 \pm 12.9827i$. Un metodo per valutare l'intervallo di valori che il guadagno K di anello può assumere garantendo l'asintotica stabilitá del sistema a ciclo chiuso, é quello di tracciare il luogo delle radici diretto e inverso per la $G(s)$ ed aumentare il modulo dei rispettivi guadagni portando il sistema al limite di stabilitá. I luoghi diretto e inverso richiesti sono riportati rispettivamente in fig. 2 e in fig. 3. Per soddisfare la specifica richiesta il guadagno di anello deve appartenere approssimativamente all'intervallo aperto $(-1, +1)$.

C) Affinchè il sistema a ciclo chiuso possa inseguire un riferimento a gradino con errore nullo a regime, è necessario inserire un polo nell'origine nel controllore che assume la forma:

$$C(s) = \frac{K_c}{s},$$

con K_c da determinare in modo tale da soddisfare le specifiche sul tempo di assestamento e sovraelongazione richieste. Il luogo delle radici per guadagno $K_c = 1$ é riportato in fig. 4, mentre la corrispondente risposta al gradino unitario é riportata in fig. 5. Come si nota la specifica sul tempo di assestamento non risulta soddisfatta, mentre viene soddisfatta la specifica sulla sovraelongazione data la pendenza pari a -1 con la quale il diagramma di Bode delle ampiezze attraversa l'asse a 0db (approssimazione ad un polo dominante).
Per soddisfare la specifica sul tempo di assestamento possiamo scegliere un guadagno di anello tale da soddisfare il vincolo sulla pulsazione di taglio $\omega_T \geq \frac{3}{T_a} = 1.5$rad/s. Un valore del guadagno che soddisfa i vincoli sul tempo di assestamento e sulla sovraelongazione risulta $K_c = 1.5$. La risposta al gradino unitario del sistema controllato con controllore $C(s) = \frac{1.5}{s}$ é riportata in fig. 6.

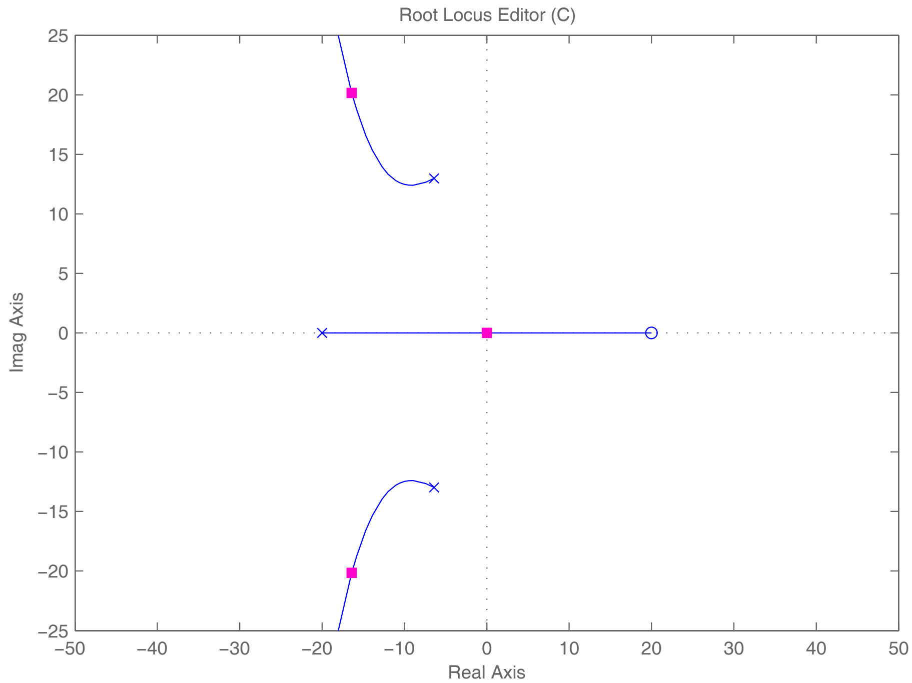

Figure 2: Luogo delle Radici diretto della $G(s)$. É evidenziata la posizione dei poli a ciclo chiuso per il valore del guadagno di anello $K = +1$

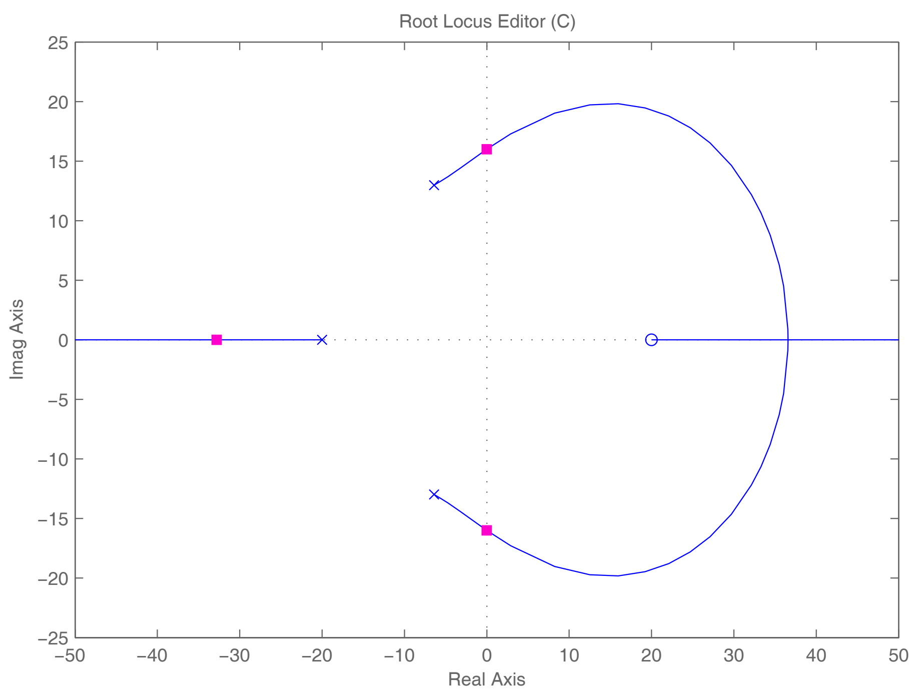

Figure 3: Luogo delle Radici inverso della $G(s)$. É evidenziata la posizione dei poli a ciclo chiuso per il valore del guadagno di anello $K = -1$

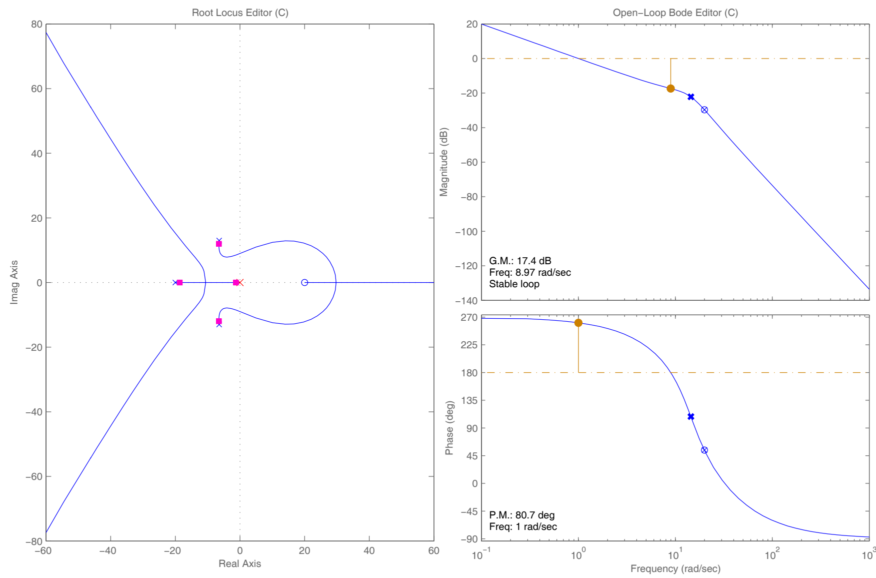

Figure 4: Luogo delle radici e diagrammi di Bode per il sistema controllato con $C(s) = 1/s$.

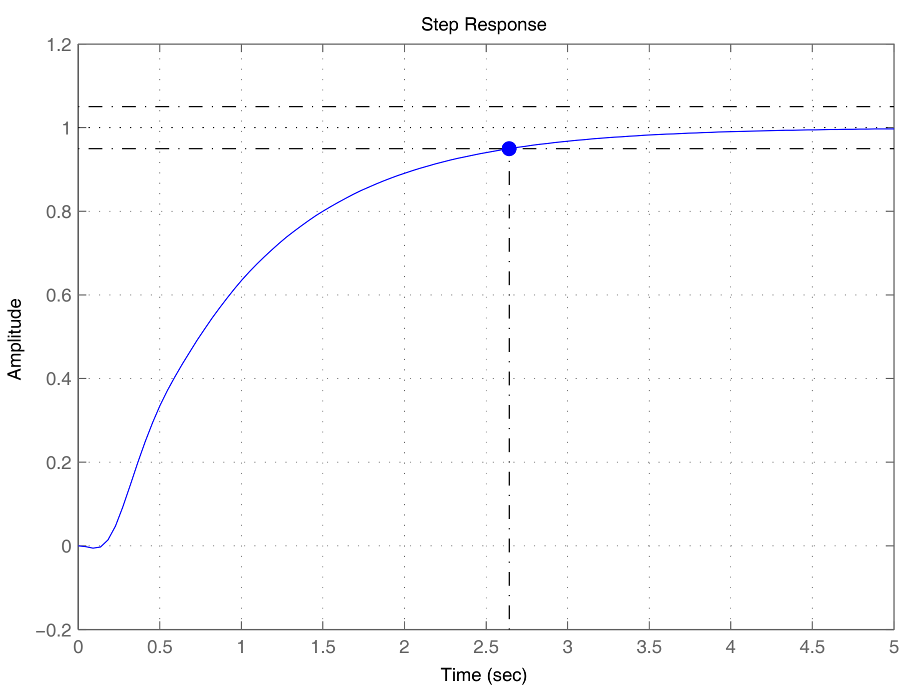

Figure 5: Risposta al gradino unitario del sistema controllato con $C(s) = 1/s$. Il tempo di assestamento risulta $T_a \approx 2.6$s.

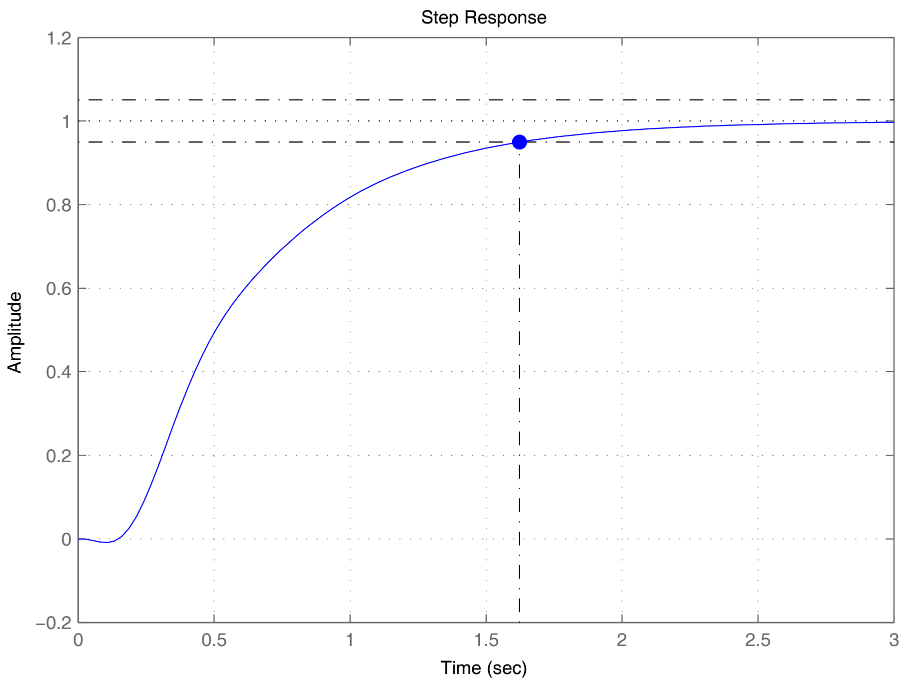

Figure 6: Risposta al gradino unitario del sistema controllato con $C(s) = 1.5/s$. Il tempo di assestamento risulta $T_a \approx 1.6$s.