Regolazione e Controllo (solo V.O.) — II Parte — 7 Settembre 2005

A) Si consideri il serbatoio rappresentato in figura fig.1-a dove Q_i e Q_o sono le portate di ingresso e uscita rispettivamente, $H > 0$ è il livello dell'acqua e $A(H)$ l'area della sezione orizzontale del serbatoio alla quota H dal fondo. Si suppone $A(H) > 0, \forall H$.

a Flusso di ingresso costante $Q_i(t) = \bar{Q}_i$ e flusso di uscita costante $Q_o(t) = \bar{Q}_o$;

b Flusso di ingresso costante $Q_i(t) = \bar{Q}_i$ e flusso di uscita proporzionale al quadrato del battente $Q_o(t) = \alpha H^2$.

Si determinino nei due casi ed al variare della forma del serbatoio $A(H)$

1. tutte le configurazioni di equilibrio e si decida se sono instabili, ovvero stabili marginalmente o asintoticamente, e in questo caso se lo sono localmente o globalmente.
2. Considerando disponibile come uscita di misura l'area $A(H)$, si determini la osservabilità del sistema
3. Considerando disponibile come ingresso il flusso di ingresso $Q_i(t)$ (che è assunto quindi adesso come variabile), si determini la raggiungibilità del sistema.

Si discutano i risultati analitici anche con considerazioni fisiche.

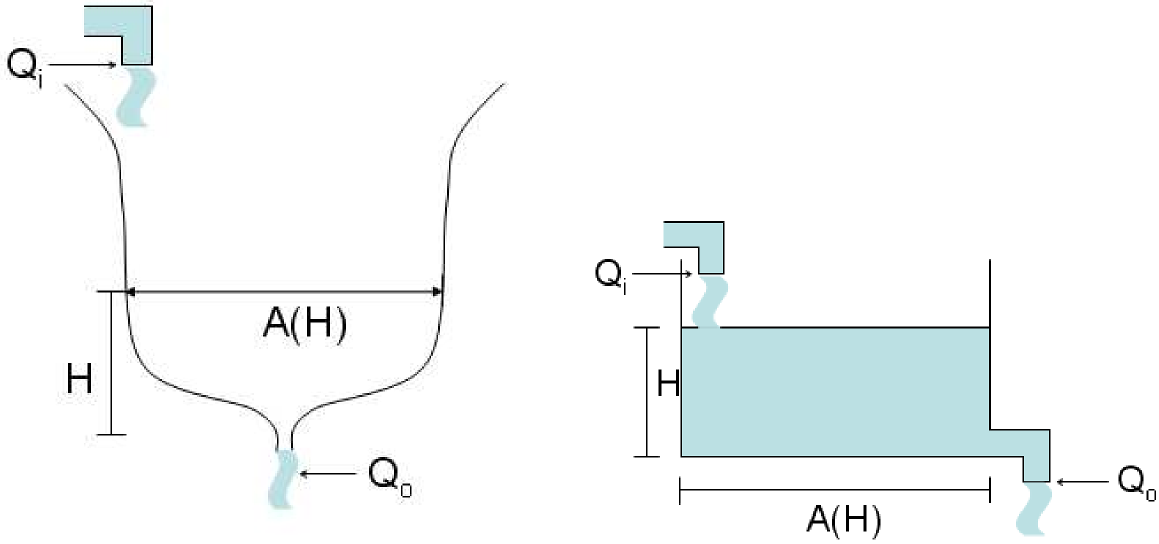

Figure 1: Serbatoio di forma generica (a sinistra) e caso particolare di serbatoio cilindrico.

Soluzione

1. Scritto il volume di acqua contenuta nel serbatoio come

$$W = \int_0^H A(h)dh, \tag{1}$$

e scrivendo l'equazione dinamica del sistema come

$$\frac{d}{dt}W = Q_i(t) - Q_o(t),$$

differenziando (1) si ha

$$A(H)\dot{H} = Q_i(t) - Q_o(t).$$

Gli equilibri sono pertanto le soluzioni di

$$Q_i(t) = Q_o(t), \forall t.$$

Nel caso a) si ha equilibrio solo se i flussi sono costanti ed uguali, $Q_i(t) = Q_o(t) = \bar{Q}, \forall t$. In questo caso, ogni valore di H è di equilibrio, quindi ogni equilibrio è marginalmente stabile.

Nel caso b), si deve invece risolvere $\bar{Q}_i = \alpha H^2$, da cui $\bar{H} = \sqrt{\frac{\bar{Q}_i}{\alpha}}$. Per studiare la stabilità di questo equilibrio, conviene traslarlo nella origine mediante la posizione $z = H - \bar{H}$, dalla quale si ha immediatamente

$$A(z+\bar{H})\dot{z} = \bar{Q}_i - \alpha(z+\bar{H})^2,$$

quindi

$$\dot{z} = -\frac{\alpha}{A}z^2 - 2\frac{\alpha\bar{H}}{A}z.$$

Ponendo come candidata di Lyapunov la funzione $V = \frac{1}{2}z^2$, si ottiene

$$\dot{V} = -\frac{\alpha}{A}z^3 - 2\frac{\alpha\bar{H}}{A}z^2.$$

La regione in cui $\dot{V} < 0$ è studiata facilmente, e coincide con $z > -2\bar{H}$. Matematicamente, il sistema sarebbe quindi localmente stabile con regione di asintotica stabilità pari almeno a $\{z \in \mathbb{R}| \; |z| < 2\bar{H}$. Fisicamente comunque, essendo altezze negative non ammissibili, l'equilibrio in $\bar{H}$ è stabile e attrattivo per qualsiasi stato iniziale ammissibile.

Come risulta dalla discussione, il valore dell'equilibrio e la sua stabilità per un dato flusso di ingresso costante non dipendono dalla forma del serbatio, come è logico attendersi da elementari nozioni di idraulica.

2. Il sistema linearizzato ha equazione dinamica

$$\dot{z} = -2\alpha\frac{\bar{H}}{A(\bar{H})}z$$

mentre la linearizzazione della uscita $y = A(z+\bar{H})$ è scritta nella forma

$$y = \frac{\partial A}{\partial z}z := Cz.$$

Avendo il sistema un solo stato ($n = 1$), la condizione di osservabilità $\mathsf{rank}\,\mathcal{O}$ si riduce alla condizione $\mathsf{rank}\,C = 1$, da cui si ha che il sistema è osservabile in quelle configurazioni $\bar{H}$ nel cui intorno l'area del serbatoio non è costante: serbatoi cilindrici come quello riportato in fig. 1 non sono osservabili con misure come quelle date.

3. Quando si considerino variabili gli ingressi e si ponga $u = Q_i - \bar{Q}_i = \bar{Q}_o$, la dinamica nel caso a) diviene

$$\dot{z} = \frac{1}{A}u$$

quindi si ha sempre raggiungibilità per sezioni di area A finita. Si noti che il concetto matematico di raggiungibilità implicherebbe che il sistema potrebbe essere portato a qualsiasi stato desiderato in rempo arbitrariamente breve disponendo di ingressi illimitati: nella realtà fisica, questo non avviene, in particolare perchè non è possibile applicare controlli $u < -\bar{Q}_i$ se non spillando liquido invece che versarne.

Nel caso b) si ha la equazione dinamica

$$\dot{z} = -\frac{\alpha}{A}z^2 - 2\frac{\alpha}{A}\sqrt{\frac{\bar{Q}_i}{\alpha}}z + \frac{1}{A}u,$$

che linearizzata in $z = 0$, $u = 0$ diviene

$$\dot{z} = -2\frac{\alpha\bar{H}}{A}z - \frac{1}{A}u.$$

La discussione della proprietà di raggiungibilità è quindi identica al caso precedente.