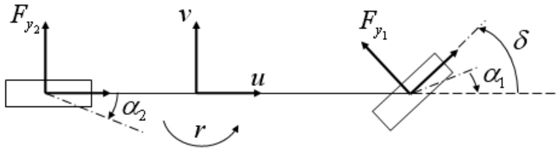
Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 18-07-2005

Si consideri il modello monotraccia di un autoveicolo



descritto dalle seguenti equazioni dinamiche

$$\begin{aligned} m(\dot{v} + ru) &= F_{y_1} + F_{y_2} - mvr\delta \\ J\dot{r} &= aF_{y_1} - bF_{y_2} - mvra\delta, \end{aligned}$$

con pneumatici dalla caratteristica lineare

$$\begin{aligned} F_{y_1} &= C_1\alpha_1 \\ F_{y_2} &= C_2\alpha_2, \end{aligned}$$

dove gli angoli di deriva α_1 e α_2 sono legati all'angolo di sterzo effettivo δ mediante le relazioni linearizzate

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \delta - \tfrac{v+ra}{u} \\ \alpha_2 &= -\tfrac{v-rb}{u}. \end{aligned}$$

La massa dell'autoveicolo è pari a $m = 500\,[kg]$, il momento di inerzia rispetto al baricentro $J = 100\,[kgm^2]$, il semipasso anteriore $a = 1.5\,[m]$ e quello posteriore $b = 1\,[m]$. r rappresenta la velocità angolare del veicolo. Per quanto riguarda il modello dei pneumatici, si considerino le rigidezze di deriva degli assali anteriore e posteriore pari a $C_1 = 1500\,[N/rad]$ e $C_2 = 2000\,[N/rad]$. Si noti la caratteristica sovrasterzante del veicolo $aC_1 - bC_2 > 0$. Si supponga di poter controllare l'angolo di sterzo δ e di viaggiare a velocità u costante.

A Si determini l'ingresso di equilibrio del sistema e la traiettoria di equilibrio nel caso in cui si impongono le velocità u e v costanti ($u_{eq} = 10\,[m/s]$, $v_{eq} = 5\,[m/s]$) e velocità angolare r costante. Si dia una interpretazione fisica della traiettoria di equilibrio.

B Si determini il linearizzato del sistema attorno alla traiettoria di equilibrio ottenuta.

C Si studi la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema supponendo di misurare il valore della velocità v.

D Si progetti un compensatore basato sul regolatore che sia in grado di stabilizzare il sistema attorno alla traiettoria di equilibrio.

E (Solo CA) Si effettui una simulazione del sistema ottenuto connettendo il controllore progettato nel punto precedente con il modello nonlineare del sistema.

F (Solo CA) Si dia una stima delle condizioni iniziali a partire dalle quali il controllore progettato in precedenza al punto **E**, è capace di garantire la convergenza del sistema sulla configurazione desiderata.

G (Solo TS) Si studino gli equilibri e la stabilità del seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1^2 + x_2^2 - 4)x_1 \\ \dot{x}_2 = (x_1^2 + x_2^2 - 4)x_2 \end{cases}$$

e se ne valuti la regione di asintotica stabilità.

Soluzione

A Si imponga $\dot{v} = \dot{r} = 0$. Moltiplicando la prima delle due equazioni per a e sottraendo a questa la seconda equazione si ottiene una equazione nella sola variabile r:

$$amu_{eq}r_{eq} = -C_2 \frac{v_{eq} - r_{eq}b}{u_{eq}}(a+b)$$

da cui si ricava che $r_{eq} = -\frac{C_2 v_{eq}(a+b)}{-C_2 b(a+b)+au_{eq}^2 m} = -.3571$. Sostituendo il valore di r_{eq} nella seconda equazione si ottiene l'ingresso di equilibrio $\delta_{eq} = \frac{v_{eq}(C_1C_2(a+b)^2-(C_1a-C_2b)u_{eq}^2 m)}{(C_1C_2b(a+b)-C_1au_{eq}^2m-mv_{eq}^2C_2(a+b))u_{eq}} = -0.0186$.

La traiettoria di equilibrio è quindi un moto a velocità costante con velocità di rotazione costante e negativa. Il veicolo in queste condizioni percorre una traiettoria circolare con angolo di sterzo negativo.

B Riscrivendo il sistema traslato in forma di stato si ottiene

$$\begin{cases} \dot{v} &= \frac{C_1}{m}(\delta+\delta_{eq}) - \frac{C_1}{m}\frac{(v+v_{eq})+(r+r_{eq})a}{u_{eq}} - \frac{C_2}{m}\frac{(v+v_{eq})-(r+r_{eq})b}{u_{eq}} - (v+v_{eq})(r+r_{eq})(\delta+\delta_{eq}) - (r+r_{eq})u_{eq}; \\ \dot{r} &= \frac{aC_1}{J}(\delta+\delta_{eq}) - \frac{aC_1}{J}\frac{(v+v_{eq})+(r+r_{eq})a}{u_{eq}} + \frac{bC_2}{J}\frac{(v+v_{eq})-(r+r_{eq})b}{u_{eq}} - \frac{ma}{J}(v+v_{eq})(r+r_{eq})(\delta+\delta_{eq}); \end{cases}$$

Il linearizzato lungo la traiettoria di equilibrio risulta quindi

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{C_1+C_2}{mu_{eq}} - r_{eq}\delta_{eq} & \frac{C_2b-C_1a}{mu_{eq}} - v_{eq}\delta_{eq} - u_{eq} \\ \frac{C_2b-C_1a}{Ju_{eq}} - \frac{ma}{J}r_{eq}\delta_{eq} & -\frac{(C_1a^2+C_2b^2)}{Ju_{eq}} - \frac{ma}{J}v_{eq}\delta_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7067 & -9.9567 \\ -0.3 & -4.6754 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{C_1}{m} - v_{eq}r_{eq} \\ \frac{aC_1}{J} - \frac{ma}{J}v_{eq}r_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.7857 \\ 35.8929 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori della matrice dinamica A sono $-0.983, 8.29$. Il sistema è dunque instabile data la presenza di polo a parte reale posistiva.

C La matrice di raggiungibilità risulta ($R = [B, AB]$)

$$R = \begin{bmatrix} 4.7857 & -360.7568 \\ 35.8928 & -169.2480 \end{bmatrix}$$

che ha rango 2. Potendo misurare il valore della velocità v, la matrice delle uscite è $C = [1\ 0]$. La matrice di osservabilità risulta

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.706 & -9.9567 \end{bmatrix}$$

La matrice di osservabilità ha rango 2.

D Si applichi la tecnica di progetto del regolatore nello spazio di stato allo scopo di ottenere un sistema stabile.

Per la determinazione della retroazione K in grado di allocare i poli per la stabilizzazione del sistema si utilizza la tecnica di controllo ottimo *LQR*. In particolare, utilizzando la funzione di Matlab `[K,s,p] = lqr(sys,Q,R)` è possibile ottenere la matrice di retroazione K che piazza i poli in p. La tecnica di allocazione degli autovalori LQR ricava la matrice di retroazione degli stati K in grado di rendere asintoticamente stabile il sistema *sys* minimizzando il funzionale di costo

$$J = \int x^T Qx + u^T Rudt$$

laddove, come di consueto, si è indicato con x lo stato del sistema e con u il corrispondente ingresso. Nel caso in esame, il sistema è SISO, quindi Q ed R, le matrici peso del funzionale, sono due matrici di dimensione 2×2 e 1×1 rispettivamente. Q è stata scelta diagonale, con elementi sulla diagonale pari a $(10, 10)$, mentre R è stata scelta come l'identità. Il risultato ottenuto è

$$K = \begin{bmatrix} -2.9065 & 3.6798 \end{bmatrix}$$

che piazza i poli in $p = [-9.2956, -114.2538]$ mediante la retroazione $A - B\,K$.

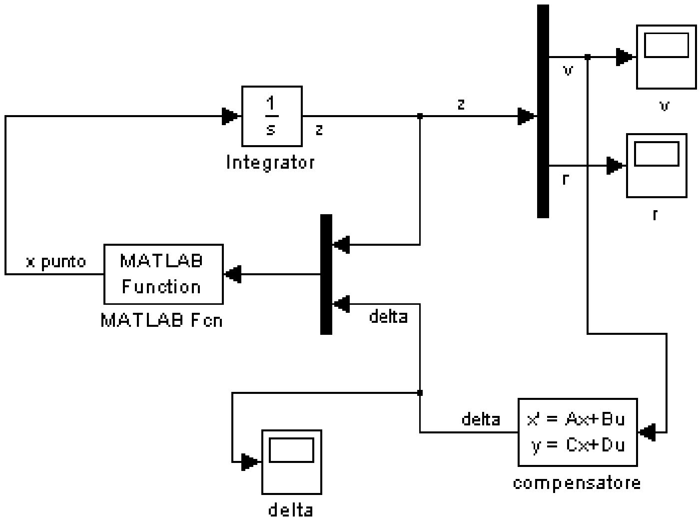


Figure 1: Schema a blocchi per la simulazione.

La parte relativa alla ricostruzione dello stato è stata fatta con un osservatore di Kalman, robusto rispetto ai disturbi di attuazione e di misura. Il comando `[KEST,L] = kalman(sys,Q,R)` permette di ottenere come risultato la matrice di iniezione delle uscite L, utilizzando la matrice Q (fissata in questo esempio pari alla matrice identica 1×1) come matrice di covarianza del rumore di attuazione, e la matrice R (fissata in questo esempio pari alla matrice identica 1×1, scalata di un fattore 10^{-5}) come matrice di covarianza del rumore di misura. La matrice L è la seguente

$$L = 1000 \begin{bmatrix} 1.5765 \\ -9.8994 \end{bmatrix}$$

Un modo alternativo di ricavare le matrici K ed L è il posizionamento dei poli tramite il comando `place` di Matlab, per il quale è necesario specificare i poli a ciclo chiuso p ed i poli dell'osservatore (usualmente più veloci, $q = 2p$).

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato si costruisce col comando `rsys = reg(sys,K,L)`.

E Uno schema Simulink del sistema stabilizzato e' riportata in figura 1.

Il blocco Simulink *Matlab Function* contiene la seguente funzione:

```
function out = SistemaNONLineare(in)

% Input parser
z1 = in(1);
z2 = in(2);
delta = in(3);

% Parameters
m = 500;
J = 100;
a = 1.5;
b = 1;
C_1 = 1500;
C_2 = 2000;
v_eq = 5;
u_eq = 10;
r_eq = -.3571428572;
delta_eq = -0.01865671642;
```

```
% Sistema traslato
deltaT = delta + delta_eq;
z1T = z1+v_eq;
z2T = z2+r_eq;

% Dinamica del sistema
dot_z1 = C_1/m*deltaT-C_1/m*(z1T+z2T*a)/u_eq-C_2/m*(z1T-z2T*b)/u_eq-z1T*z2T*deltaT-z2T*u_eq;
dot_z2 =a*C_1/J*deltaT-a*C_1/J*(z1T+z2T*a)/u_eq+b*C_2/J*(z1T-z2T*b)/u_eq-m*a*z1T*z2T*deltaT/J;

% Uscite del blocco
out(1) = dot_z1;
out(2) = dot_z2;
```

mentre il blocco *State-Space* contiene le matrici del regolatore precedentemente progettato.

Variando le condizioni iniziali dell'integratore si vede che per condizioni iniziali traslate pari a [0.1 0.2] il sistema è ancora convergente aumentando la seconda condizione il sistema esce dalle condizioni in cui vale l'approssimazione lineare.

G Il sistema lineare a ciclo chiuso è `fsys=feedback(series(rsys,sys),1,+1)`. La matrice dinamica $\mathbf{A}_f \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ di questo sistema (che si può ottenere con il comando `[Af,Bf,Cf,Df]=ssdata(fsys)`) avrà gli autovalori nelle locazioni scelte in precedenza (si veda il punto **E**). Per il sistema linearizzato, si può agevolmente trovare una funzione di Lyapunov del tipo $V_Q = \mathbf{z}^T\mathbf{P}_Q\mathbf{z}$, con $\mathbf{P}_Q$ soluzione della equazione di Lyapunov $\mathbf{P}_Q\mathbf{A}_f + \mathbf{A}_f^T\mathbf{P}_Q = -\mathbf{Q}$ (ad esempio col comando `Pq=lyap(Af',Q)`), per qualche $\mathbf{Q}$ simmetrica positiva definita.

Per stimare (per difetto) la regione di asintotica stabilità del sistema nonlineare stabilizzato, si deve quindi valutare la regione in cui vale la disequazione $\dot{V}_Q = -\mathbf{z}^T\mathbf{Q}\mathbf{z}+2\mathbf{z}^T\mathbf{P}_Q\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) < 0$, e trovare la più grande curva di livello di V_Q interamente contenuta in quella regione. La disequazione può essere studiata numericamente generando numeri casualmente distribuiti sulla curva $V_Q = R$ e guardando al segno di $\dot{V}_Q$ al variare di R, ad esempio con la semplice procedura

```
function evalvdot(P,Q,R)
  M=inv(sqrtm(P));
  for i=1:1:500000           % Numero di tentativi casuali
    x = (rand(12,1)-0.5);
    y=sqrt(R)*x/norm(x);     % Vettore di direzione random e lunghezza sqrt(R)
    z=M*y;                   % Punto random sulla curva di livello
    vdot=-z'*Q*z+2*z'*P*f(z);
    if vdot > 0
        disp('Punto forse esterno alla R.A.S.!'),
        break;
    end
  end
```

Una volta ottenuta la prima stima è possibile andare a scegliere una nuova funzione di Lyapunov modificando opportunamente la matrice Q, ad esempio con

```
    m = 12;
    Q = zeros(m);
    for j = 1:m
        x = 100*(rand(m,1) - 0.5);
        Q(j:m,j) = x(j:m);
    end
    Q = (Q*Q')/2;

    Pq = lyap(Af',Q);
```

e ripetendo la procedura riportata precedentemente. Una stima della regione di asintotica stabilità per il sistema in esame è riportata in figura 2.

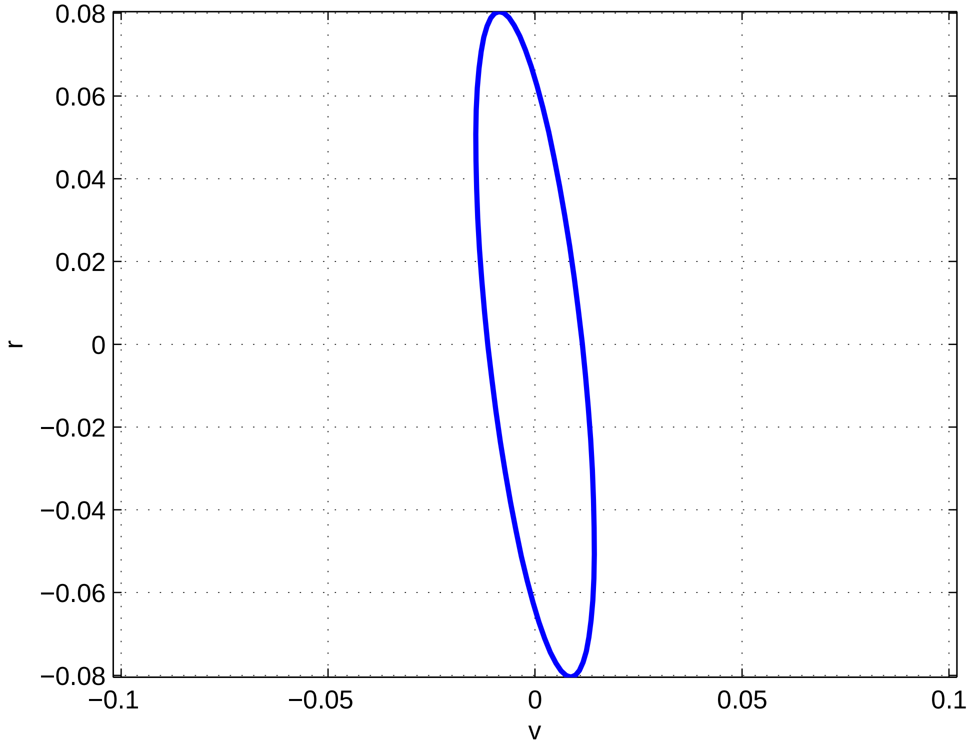


Figure 2: Stima, per difetto, della regione di asintotica stabilità del sistema in esame.

G I punti di equilibrio sono l'origine e i punti della circonferenza centrata nell'origine e di raggio 2. Per quanto riguarda l'equilibrio nell'origine il linearizzato risulta

$$A_0 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Per cui l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile.

Per i punti $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ sulla circonferenza si ha che il linearizzato risulta

$$A_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} = \begin{bmatrix} 2\bar{x}_1^2 & 2\bar{x}_1\bar{x}_2 \\ 2\bar{x}_1\bar{x}_2 & 2\bar{x}_2^2 \end{bmatrix}$$

Le righe della matrice sono linearmente indipendenti in quanto moltiplicando la prima riga per x_2 e la seconda per x_1 si ottengono due righe uguali. Equivalentemente è sufficiente vedere che il determinante di A è sempre nullo. Un autovalore di A è quindi nullo, per trovare il segno del secondo autovalore di A si può procedere calcolandone la traccia $2(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) = 8$. Pertanto gli autovalori di A sono 0 e 8 e quindi i punti sono instabili.

Alternativamente si poteva scegliere come candidata di Lyapunov la $V = (x_1^2 + x_2^2 - 4)^2$ che si annulla sui punti in considerazione ed è definita positiva. La derivata direzionale della V risulta

$$\dot{V} = 4(x_1^2 + x_2^2 - 4)^2(x_1^2 + x_2^2)$$

che si annulla nei punti di equilibrio ed è definita positiva. Si trova anche in questo modo che i punti della circonferenza sono equilibri instabili.