

## Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 27-06-2005

Si consideri il modello dinamico di motore per hovercraft (figura 1).

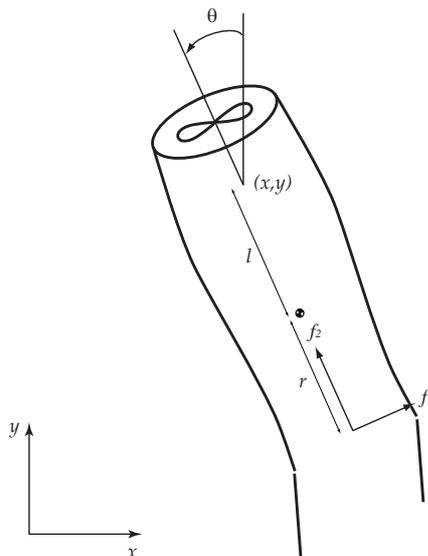


Figure 1: Modello dinamico di motore per hovercraft.

Si indichi con la terna  $(x, y, \theta)$  la posizione e l'orientazione di un punto sull'asse principale del motore a distanza  $l$  dal centro di massa. Si assuma che le forze agenti sulla ventola siano  $f_1$  perpendicolare all'asse della ventola ed agente a distanza  $r$  dal centro di massa ed una forza  $f_2$  parallela all'asse della ventola. Siano inoltre  $m$  la massa del motore,  $J$  il suo momento di inerzia e  $g$  l'accelerazione di gravità.

Le equazioni dinamiche del sistema sono

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -d\dot{x} + f_1 \cos \theta - f_2 \sin \theta \\ m\ddot{y} = -d\dot{y} + f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta - mg \\ J\ddot{\theta} = r f_1 \end{cases}$$

dove  $d$  rappresenta il coefficiente di attrito viscoso dell'aria.

- A** Si determinino i punti e gli ingressi di equilibrio del sistema in condizione di "hovering" ( $\dot{x} = \dot{y} = \dot{\theta} = 0$ ) e se ne dia una interpretazione fisica;
- B** Si determini il linearizzato del sistema attorno all'equilibrio nell'origine;
- C** Si studi la raggiungibilità del sistema utilizzando alternativamente gli ingressi  $f_1$  ed  $f_2$  e se ne dia una interpretazione fisica;
- D** Si studi l'osservabilità del sistema supponendo di misurare la posizione  $x$  e  $y$ ;
- E** Si progetti un compensatore basato sul regolatore che sia in grado di stabilizzare il sistema nell'origine utilizzando entrambi gli ingressi disponibili e le due uscite. Si supponga che  $m = 11 \text{ Kg}$ ,  $J = 0.05 \text{ Kg m}^2$ ,  $r = 15 \text{ cm}$ ,  $d = 0.1 \text{ N sec}$  e  $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$ .
- F** (Solo CA) Si effettui una simulazione del sistema ottenuto connettendo il controllore progettato nel punto precedente con il modello nonlineare del sistema;
- G** (Solo CA) Si dia una stima delle condizioni iniziali a partire dalle quali il controllore progettato in precedenza al punto **E**, è capace di garantire la convergenza del sistema sulla configurazione desiderata;
- H** (Solo TS) Si studi la stabilità degli equilibri del seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sin x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 \end{cases}$$

e se ne valuti la regione di asintotica stabilità.

## Soluzione

**A** Dalla terza equazione si ricava immediatamente  $f_1 = 0$ . Quindi, sostituendo la condizione sulle velocità e sull'ingresso di equilibrio appena ottenuto, si ha

$$\begin{aligned} f_2 \sin \theta &= 0 \\ f_2 \cos \theta - mg &= 0 \end{aligned}$$

da cui si ricava  $\theta = \pm k\pi$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots$ , e  $f_2 = mg$ . Il sistema è indifferente alla posizione nel piano di  $x$  e  $y$ .

L'unico equilibrio significativo per il sistema corrisponde a  $\theta = 0$ , per il quale il motore è disposto verticalmente e ed esercita una forza verticale di tenuta in grado di compensare l'effetto della forza peso. La forza orizzontale è necessariamente nulla per mantenere il sistema in equilibrio.

**B** Scegliendo come variabili di stato  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$  il sistema non lineare in forma di stato risulta

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_4 \\ \dot{x}_2 &= x_5 \\ \dot{x}_3 &= x_6 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{m}(-dx_4 + f_1 \cos x_3 - f_2 \sin x_3) \\ \dot{x}_5 &= \frac{1}{m}(-dx_5 + f_1 \sin x_3 + f_2 \cos x_3 - mg) \\ \dot{x}_6 &= \frac{r}{J}f_1 \end{cases}$$

Traslando il sistema nel punto di equilibrio  $\bar{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ , con ingressi di equilibrio  $\bar{u} = (0, mg)$ , e linearizzando rispetto a tale punto si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -g & -\frac{d}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{r}{J} & 0 \end{bmatrix}$$

**C** Si consideri solo l'ingresso  $f_1$ , che corrisponde alla prima colonna  $b_1$  della matrice degli ingressi  $B$ . Calcolando la matrice di raggiungibilità ( $R_1 = [b_1, Ab_1, A^2b_1, A^3b_1, A^4b_1, A^5b_1]$ ) si ottiene

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & -\frac{d}{m^2} & -\frac{gr}{J} + \frac{d^2}{m^3} & -d\left(-\frac{gr}{J} + \frac{d^2}{m^3}\right)m^{-1} & d^2\left(-\frac{gr}{J} + \frac{d^2}{m^3}\right)m^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{J} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & -\frac{d}{m^2} & -\frac{gr}{J} + \frac{d^2}{m^3} & -d\left(-\frac{gr}{J} + \frac{d^2}{m^3}\right)m^{-1} & d^2\left(-\frac{gr}{J} + \frac{d^2}{m^3}\right)m^{-2} & -d^3\left(-\frac{gr}{J} + \frac{d^2}{m^3}\right)m^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{J} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 4 (si notino le due righe nulle). Fisicamente, l'utilizzo del solo controllo  $f_1$  non riesce ad influenzare l'altezza da terra  $y$  e la velocità verticale  $\dot{y}$ . Questa analisi ha chiaramente validità nel modello linearizzato, ossia nell'intorno dell'origine.

Nel caso in cui si utilizzi il controllo  $f_2$  (ovvero la sua variazione  $u_2$ ), la matrice di raggiungibilità costruita col vettore di ingresso  $b_2$ , risulta

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & -\frac{d}{m^2} & \frac{d^2}{m^3} & -\frac{d^3}{m^4} & \frac{d^4}{m^5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & -\frac{d}{m^2} & \frac{d^2}{m^3} & -\frac{d^3}{m^4} & \frac{d^4}{m^5} & -\frac{d^5}{m^6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo secondo caso la matrice di raggiungibilità ha rango 2. Si evince perciò che con la sola spinta verticale è possibile controllare solo l'altezza e la velocità verticale. Si intuisce anche che l'impiego di entrambi i controlli garantisce la completa raggiungibilità del sistema.

**D** Misurare la posizione  $(x, y)$  corrisponde ad avere una matrice di uscita pari a

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di osservabilità

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \end{bmatrix}$$

risulta a rango pieno. Perciò la dimensione dello spazio inosservabile del sistema è pari a zero.

**E** Si applichi la tecnica di progetto del regolatore nello spazio di stato allo scopo di ottenere un sistema stabile.

Per la determinazione della retroazione  $K$  in grado di allocare i poli per la stabilizzazione del sistema si utilizza la tecnica di controllo ottimo  $LQR$ . In particolare, utilizzando la funzione di Matlab `[K,s,p] = lqr(sys,Q,R)` è possibile ottenere la matrice di retroazione  $K$  che piazza i poli in  $p$ . La tecnica di allocazione degli autovalori LQR ricava la matrice di retroazione degli stati  $K$  in grado di rendere asintoticamente stabile il sistema  $sys$  minimizzando il funzionale di costo

$$J = \int x'Qx + u'Rudt$$

laddove, come di consueto, si sia indicato con  $x$  lo stato del sistema e con  $u$  il corrispondente ingresso. Nel caso in esame, il sistema è MIMO con due ingressi e due uscite, quindi  $Q$  ed  $R$ , le matrici peso del funzionale, sono due matrici di dimensione  $6 \times 6$  e  $2 \times 2$  rispettivamente.  $Q$  è stata scelta diagonale, con elementi sulla diagonale pari a  $(10, 10, 1, 1, 1, 1)$  in modo da pesare maggiormente gli scostamenti della posizione  $x$  ed  $y$ , mentre  $R$  è anch'essa diagonale con elementi  $(100, 1)$ , in modo da penalizzare maggiormente il controllo  $u_1$ . Il risultato ottenuto è

$$K = \begin{bmatrix} -0.3162 & 0 & 3.5914 & -0.4893 & 0 & 1.5634 \\ 0 & 3.1623 & 0 & 0 & 8.3012 & 0 \end{bmatrix}$$

che piazza i poli in  $p = [-0.7351 + 1.6344i, -0.7351 - 1.6344i, -1.5923 + 0.5994i, -1.5923 - 0.5994i, -0.3819 + 0.3764i, -0.3819 - 0.3764i]$  mediante la retroazione  $A - BK$ .

La parte relativa alla ricostruzione dello stato è stata fatta con un osservatore di Kalman, robusto rispetto ai disturbi di attuazione e di misura. Il comando `[KEST,L] = kalman(sys,Q,R)` permette di ottenere come risultato la matrice di iniezione delle uscite  $L$ , utilizzando la matrice  $Q$  (fissata in questo esempio pari alla matrice identica  $2 \times 2$ ) come matrice di covarianza del rumore di attuazione, e la matrice  $R$  (fissata in questo esempio pari alla matrice identica  $2 \times 2$ , scalata di un fattore  $10^{-5}$ ) come matrice di covarianza del rumore di misura. La matrice  $L$  è la seguente

$$L = \begin{bmatrix} 26.4673 & 0 \\ 0 & 7.5735 \\ -270.9713 & 0 \\ 350.2578 & 0 \\ 0 & 28.6791 \\ -948.6833 & 0 \end{bmatrix}$$

Un modo alternativo di ricavare le matrici  $K$  ed  $L$  è il posizionamento dei poli tramite il comando `place` di Matlab, per il quale è necessario specificare i poli a ciclo chiuso  $p$  ed i poli dell'osservatore (usualmente più veloci,  $q = 2p$ ).

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato si costruisce col comando `rsys = reg(sys,K,L)`.

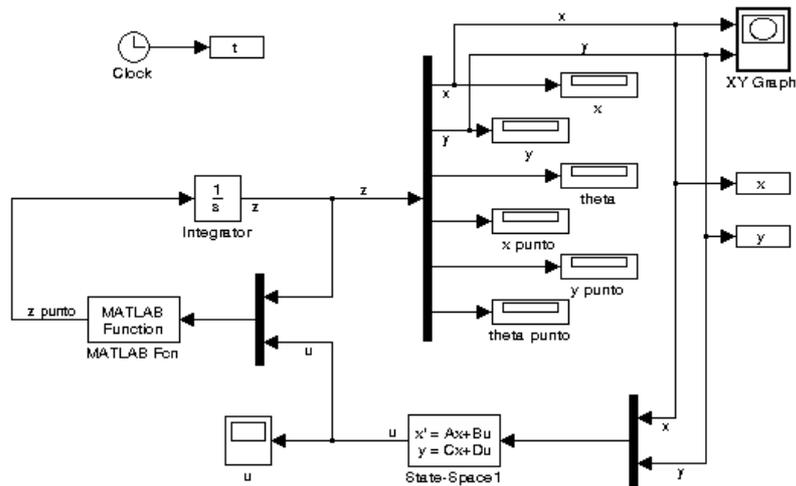


Figure 2: Schema a blocchi per la simulazione.

F Uno schema Simulink del sistema stabilizzato e' riportata in figura 2.

Il blocco Simulink *Matlab Function* contiene la seguente funzione:

```
function out = SistemaNONLineare(in)

% Input parser
z1 = in(1);
z2 = in(2);
z3 = in(3);
z4 = in(4);
z5 = in(5);
z6 = in(6);
u1 = in(7);
u2 = in(8);

% Parameters
m = 11;
g = 9.8;
J = 0.05;
r = 0.15;
d = 0.1;
l = 0.2;

% Sistema traslato
u2 = u2 + m*g;

% Dinamica del sistema
dot_z1 = z4;
dot_z2 = z5;
dot_z3 = z6;
dot_z4 = 1/m * (-d * z4 + u1 * cos(z3) - u2 * sin(z3));
dot_z5 = 1/m * (-d * z5 + u1 * sin(z3) + u2 * cos(z3) - m*g);
dot_z6 = r/J * u1;

% Uscite del blocco
out(1) = dot_z1;
out(2) = dot_z2;
out(3) = dot_z3;
```

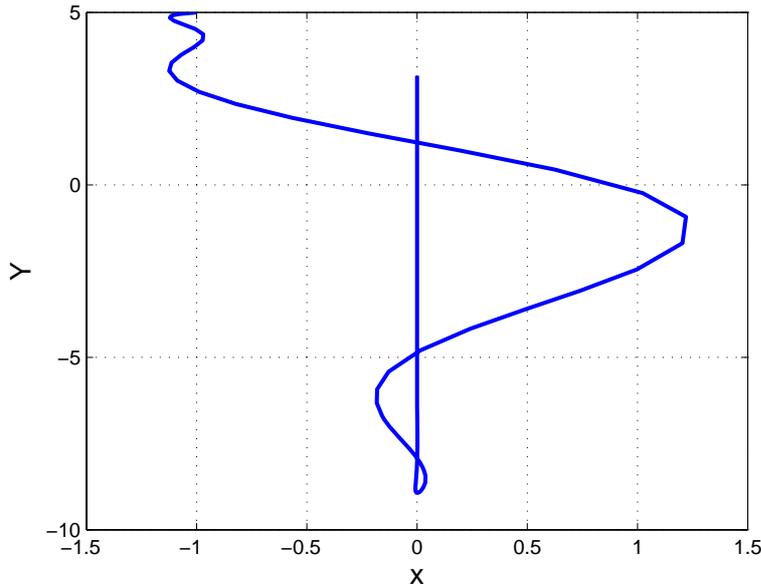


Figure 3: Traiettorie nel piano  $(x, y)$ .

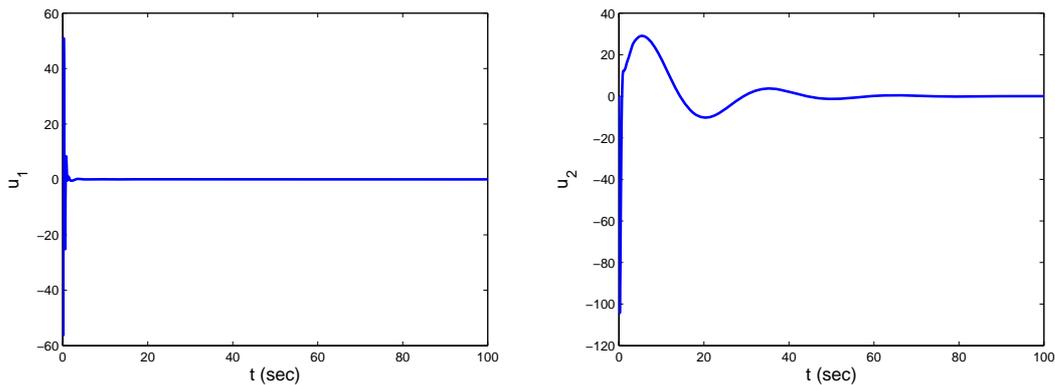


Figure 4: Controlli  $u_1$  (sinistra) e  $u_2$  (destra).

```
out(4) = dot_z4;
out(5) = dot_z5;
out(6) = dot_z6;
```

mentre il blocco *State-Space* contiene le matrici del regolatore precedentemente progettato.

La figura 3 riporta la traiettoria del motore nel piano  $(x, y)$  qualora venga posizionato nel punto di coordinate iniziali  $(x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}) = (-1, 5, 1, 0, 0, 0)$ . Il regolatore annulla per primo l'errore sull'asse  $x$  e poi regola la posizione lungo  $y$ . Questo comportamento si rintraccia anche nel grafico dei due controlli  $(u_1, u_2)$ , riportati in figura 4.

**G** Il sistema lineare a ciclo chiuso è `fsys=feedback(series(rsys,sys),eye(2),+1)`. La matrice dinamica  $\mathbf{A}_f \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  di questo sistema (che si può ottenere con il comando `[Af,Bf,Cf,Df]=ssdata(fsys)`) avrà gli autovalori nelle locazioni scelte in precedenza (si veda il punto **E**). Per il sistema linearizzato, si può agevolmente trovare una funzione di Lyapunov del tipo  $V_Q = \mathbf{z}^T \mathbf{P}_Q \mathbf{z}$ , con  $\mathbf{P}_Q$  soluzione della equazione di Lyapunov  $\mathbf{P}_Q \mathbf{A}_f + \mathbf{A}_f^T \mathbf{P}_Q = -\mathbf{Q}$  (ad esempio col comando `Pq=lyap(Af',Q)`), per qualche  $\mathbf{Q}$  simmetrica positiva definita.

Per stimare (per difetto) la regione di asintotica stabilità del sistema nonlineare stabilizzato, si deve quindi valutare la regione in cui vale la disequazione  $\dot{V}_Q = -\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + 2\mathbf{z}^T \mathbf{P}_Q \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) < 0$ , e trovare la più

grande curva di livello di  $V_Q$  interamente contenuta in quella regione. La disequazione può essere studiata numericamente generando numeri casualmente distribuiti sulla curva  $V_Q = R$  e guardando al segno di  $\dot{V}_Q$  al variare di  $R$ , ad esempio con la semplice procedura

```
function evalvdot(P,Q,R)
M=inv(sqrtm(P));
for i=1:1:500000 % Numero di tentativi casuali
x = (rand(12,1)-0.5);
y=sqrt(R)*x/norm(x); % Vettore di direzione random e lunghezza sqrt(R)
z=M*y; % Punto random sulla curva di livello
vdot=-z'*Q*z+2*z'*P*f(z);
if vdot > 0
disp('Punto forse esterno alla R.A.S.!'),
break;
end
end
end
```

Una volta ottenuta la prima stima è possibile andare a scegliere una nuova funzione di Lyapunov modificando opportunamente la matrice  $Q$ , ad esempio con

```
m = 12;
Q = zeros(m);
for j = 1:m
x = 100*(rand(m,1) - 0.5);
Q(j:m,j) = x(j:m);
end
Q = (Q*Q')/2;

Pq = lyap(Af',Q);
```

e ripetendo la procedura riportata precedentemente. Una stima della regione di asintotica stabilità per il sistema in esame è riportata in figura 5.

**H** I punti nei quali  $\dot{x}_2 = 0$  sono  $x_1 = 0$  o  $x_2 = 0$ : nel primo caso si evince da  $\dot{x}_1 = 0$  che necessariamente  $x_2 = 0$ ; nel secondo caso si ha ancora da  $\dot{x}_1 = 0$  che  $x_1 = 0 \pm k\pi$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots$ . I punti di equilibrio del sistema non lineare  $\dot{x} = f(x)$  sono quindi

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \pm k\pi \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

nel primo caso si ha il linearizzato valutato in  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  pari a

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che per il teorema indiretto di Lyapunov non permette di giungere a nessuna conclusione. Si applichi perciò il teorema diretto di Lyapunov e si scelga la seguente candidata di Lyapunov

$$\mathbf{V}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

con derivata direzionale pari a

$$L_f \mathbf{V}(x_1, x_2) = -x_1 \sin x_1 + x_1 x_2^2 - x_1 x_2^2 = -x_1 \sin x_1$$

che è n.s.d. nell'intorno del punto di equilibrio in questione (si ricorda che  $\sin x_1 \approx x_1$  nell'intorno dell'origine). La derivata direzionale è però solo semi definita, e quindi è possibile solo concludere per la stabilità. Per l'asintotica stabilità, si applichi il teorema di Krasowskii e si verifichi che la regione  $\Omega = \{(x_1, x_2) | L_f \mathbf{V}(x_1, x_2) = 0\}$  non contiene alcuna traiettoria del sistema (oltre al punto di equilibrio in questione). Nell'intorno dell'origine,  $\Omega = \{(0, x_2)\}$  e quindi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

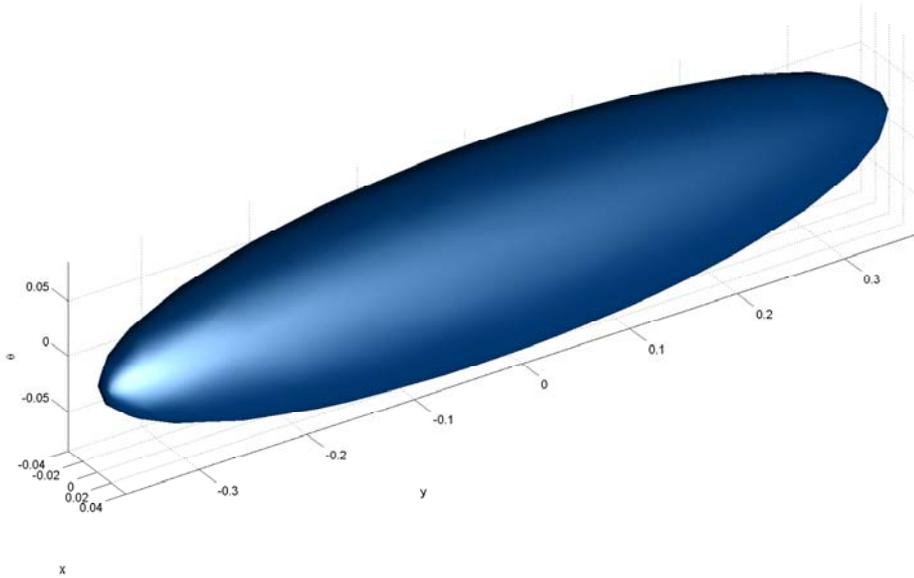


Figure 5: Stima, per difetto, della regione di asintotica stabilità del sistema in esame.

da ciò si evince che anche  $x_2 = 0$  e quindi  $\Omega$  non contiene alcuna traiettoria del sistema oltre all'origine ed è quindi possibile concludere per l'asintotica stabilità dell'equilibrio. Questa condizione ha una interpretazione grafica (figura 6): ogni punto per il quale  $x_1 = 0$  (la retta delle ordinate) avrà una velocità perpendicolare alla regione  $\Omega$ , tranne che nell'origine. Da ciò segue anche graficamente che una traiettoria interamente giacente sull'asse delle ordinate non è permessa al sistema. Per

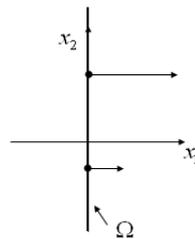


Figure 6: Dimostrazione grafica del teorema di Krasowskii per l'asintotica stabilità dell'origine.

quanto riguarda gli altri punti di equilibrio  $(x_1, x_2) = (\pm k\pi, 0)$ , il linearizzato risulta

$$\begin{bmatrix} -\cos k\pi & 0 \\ 0 & -k\pi \end{bmatrix}$$

Pertanto per tutti i punti di equilibrio con  $k < 0$  si ha un autovalore positivo e l'equilibrio del non lineare risulta instabile. Lo stesso vale per  $k > 0$  e pari. Mentre per  $k > 0$  e dispari entrambi gli autovalori del linearizzato sono minori di zero e l'equilibrio risulta asintoticamente stabile.