Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 06-06-05

Il veicolo riportato in figura 1 puó avanzare in direzione perpendicolare all'asse delle ruote e ruotare attorno al centro dell'asse stesso.

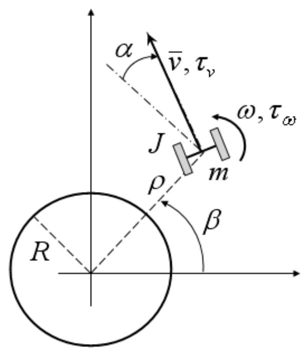

Figure 1: Modello di veicolo da controllare

Il modello dinamico del veicolo in coordinate polari risulta

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \sin(\alpha)\bar{v} \\ \dot{\alpha} = \cos(\alpha)\frac{\bar{v}}{\rho} - \omega \\ \dot{\beta} = \cos(\alpha)\frac{\bar{v}}{\rho} \\ \dot{\bar{v}} = \frac{\tau_v}{m}\rho + \bar{v}^2\rho\sin\alpha \\ \dot{\omega} = \frac{\tau_\omega}{J} \end{cases} \tag{1}$$

Tramite la sostituzione $\bar{v} = v\rho$ il sistema risulta

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho\sin(\alpha)v \\ \dot{\alpha} = \cos(\alpha)v - \omega \\ \dot{\beta} = \cos(\alpha)v \\ \dot{v} = \frac{\tau_v}{m} \\ \dot{\omega} = \frac{\tau_\omega}{J} \end{cases} \tag{2}$$

dove m rappresenta la massa del veicolo e J il momento di inerzia rispetto all'asse perpendicolare al piano di moto e passante per il baricentro. Per il secondo sistema, con riferimento al sottospazio di stato $\bar{X} = [\rho, \alpha, v, \omega]^T$, si consideri il problema di stabilizzare il moto del veicolo sulla circonferenza di raggio R con velocità angolare di avanzamento $v = \hat{v}$ costante.

A Si determini la matrice dinamica del sistema linearizzato nel punto di equilibrio desiderato.

B Si determini se è possibile stabilizzare il veicolo nel cammino prescelto utilizzando la coppia τ_ω e/o la coppia τ_v. Si giustifichi la risposta, e se ne dia una intepretazione fisica.

C Si disponga di due sensori, uno in grado di misurare la distanza dall'origine ρ della terna di riferimento, e l'altro in grado di misurare la quantità $\cos(\alpha)v$. Si determini quale di questi due sensori è assolutamente necessario qualora si voglia riscostruire lo stato iniziale del sistema.

Si considerino ora i seguenti valori numerici: $m = 20kg$, $J = 0.5kg\,m^2$, $R = 10m$ e $v = 5m/sec$.

D Si determinino quanti e quali attuatori e sensori tra quelli disponibili sono necessari per progettare un compensatore basato sul regolatore che renda il sistema asintoticamente stabile in retroazione nei limiti di validità del modello linearizzato. Progettare il compensatore basato sul regolatore utilizzando gli attuatori e i sensori scelti.

Controlli Automatici: E Si realizzi una simulazione numerica del comportamento del sistema ottenuto connettendo il compensatore ottenuto al passo precedente con il sistema non lineare e si commentino i risultati ottenuti.

Teoria dei Sistemo: F Dato il sistema tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1x_2 - x_3^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_3 \end{cases} \tag{3}$$

Si studi la stabilità dell'origine.

Soluzione

A Il moto del sistema corrispondente alla stabilizzazione sulla circonferenza con velocità di avanzamento scalata costante ($v_{eq} = \hat{v}$) impone la distanza di equilibrio $\rho_{eq} = R$ e inoltre che $\tau_\omega = 0$ e $\tau_v = 0$. All'equilibrio si avrà $\dot{\rho} = 0 \rightarrow \alpha_{eq} = 0$ e quindi $\omega_{eq} = \hat{v}$. Il moto di riferimento è quindi un moto circolare uniforme con velocità angolare $\hat{v}$.

Si scelgano come variabili di stato le variabili $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\rho - R, \alpha, v - \hat{v}, \omega - \hat{v})$. Nelle nuove coordinate e rispetto al sottospazio in esame (con equilibrio nell'origine), si ha:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= (x_1 + R)\sin(x_2)(x_3 + \hat{v}) \\ \dot{x}_2 &= \cos(x_2)(x_3 + \hat{v}) - (x_4 + \hat{v}) \\ \dot{x}_3 &= u_1 \\ \dot{x}_4 &= u_2 \end{cases} \tag{4}$$

Dove si considera $u_1 = \frac{\tau_v}{m}$ e $u_2 = \frac{\tau_\omega}{J}$ che all'equilibrio $u_1 = u_2 = 0$. La matrice dinamica del sistema linearizzato risulta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & R\hat{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

B Per poter determinare se è possibile utilizzare soltanto l'ingresso u_1 o l'ingresso u_2 per stabilizzare il veicolo sul cammino prescelto è necessario stabilire se il sistema è stabilizzabile. Gli autovalori esterni al sottospazio raggiungibile devono essere già asintoticamente stabili. Si noti come gli autovalori della matrice dinamica siano tutti nell'origine. La condizione sulla stabilizzabilità diviene quindi una condizione sulla raggiungibilità. La matrice degli ingressi sarà:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la matrice di raggiungibilità associata al primo ingresso risulta:

$$R_{u_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R\hat{v} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice di raggiungibilità associata al secondo ingresso risulta:

$$R_{u_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -R\hat{v} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ciascun ingresso preso singolarmente non rende il sistema completamente raggiungibile, mentre l'uso combinato di entrambi gli ingressi rende il sistema completamente raggiungibile e quindi stabilizzabile. È quindi necessario poter disporre di entrambi gli attuatori per soddisfare la specifica richiesta.

Dal punto di vista fisico, risulta chiaramente possibile, a meno di manovre, poter spostare il veicolo in qualsiasi punto dello spazio di stato (posizione e velocità) avendo a disposizione entrambi i controlli sullo sterzo e sulla coppia di avanzamento. È altresì sempre possibile, nei limiti del modello dinamico scelto, trovare una condizione di equilibrio tra velocità angolare del veicolo e velocità lineare in grado di stabilizzare il veicolo su una circonferenza di qualsiasi raggio (escluso il raggio di lunghezza nulla).

C I due sensori descritti sono in grado di misurare, rispettivamente, la distanza ρ (o equivalentemente x_1) e la velocità angolare $\dot{\beta}$ che risulta non lineare negli stati. La matrice di uscita del linearizzato risulta quindi:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La ricostruzione dello stato iniziale corrisponde ad un tipico problema di osservabilità. È pertanto necessario calcolare lo spazio di osservabilità del sistema per ciascun sensore:

$$O_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R\hat{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R\hat{v} & -R\hat{v} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } O_{\dot{\beta}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dalle quali si evince come il sistema non sia completamente osservabile utilizzando solo uno dei due sensori mentre lo è se si utilizzano entrambi.

D È possibile progettare un compensatore basato sul regolatore che renda il sistema asintoticamente stabile nel caso in cui si disponga di entrambi i sensori e entrambi gli attuatori.

Il regolatore si progetta determinando una matrice di retroazione K che sposti gli autovalori della matrice A nella posizione desiderata. Essendo un sistema con due ingressi tale che non nessun ingresso preso singolarmente il sistema diventa completamente raggiungibile si può procedere come segue. Si sceglie una matrice di retroazione K_1 per la quale il sistema retroazionato $A+BK_1$ risulti completamente raggiungibile con uno solo dei due ingressi. Questo si può fare tramite il lemma di Haymann oppure scegliendo una matrice K_1 generica visto che per quasi ogni scelta di K_1 il sistema retroazionato $A + BK_1$ risulta completamente raggiungibile con uno solo dei due ingressi. As esempio scegliendo

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

si ottiene

$$A_1 = A + BK_1 = \begin{bmatrix} 0 & R\hat{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

che è completamente raggiungibile con il solo primo ingresso. Per determinare una matrice di retroazione K_2 sul sistema (A_1, B_1) in modo tale da spostare gli autovalori della matrice A dove desiderato si procede nel modo seguente. Si calcola la matrice di trasformazione T che porta il sistema (A_1, B_1) in forma canonica di controllo, si determina la retroazione $\hat{K}_2$ (vettore riga) nelle nuove variabili di stato operando nel modo classico sul polinomio caratteristico. Si riporta il vettore $\hat{K}_2$ nelle variabili di stato del sistema (A_1, B_1) ottenendo $\tilde{K}_2$. Per ottenere K_2 si aggiunge una riga nulla (relativa al secondo ingresso non utilizzato nella retroazione) al vettore $\tilde{K}_2$. La matrice di retroazione richiesta è $K = K_1 + K_2$.

Lo stesso procedimento si usa per il calcolo della matrice di iniezione delle uscite. In particolare si lavora come sopra sul sistema duale (A^T, C^T).

Alternativamente è possibile utilizzare il programma matlab come segue. Sia $sys = ss(A, B, C, 0)$, il progetto del compensatore basato sul regolatore si ottiene con i seguenti comandi `Matlab`:

- Retroazione: Per la determinazione della retroazione K in grado di allocare i poli per la stabilizzazione del sistema si utilizza la tecnica di controllo ottimo *LQR*. In particolare, utilizzando la funzione di Matlab `[K,s,p] = lqr(sys,Q,R)` è possibile ottenere la matrice di retroazione K che piazza i poli in p. La tecnica di allocazione degli autovalori LQR ricava la matrice di retroazione degli stati K in grado di rendere asintoticamente stabile il sistema *sys* minimizzando il funzionale di costo

  $$J = \int x'Qx + u'Rudt$$

  laddove, come di consueto, si sia indicato con x lo stato del sistema e con u il corrispondente ingresso. Nel caso in esame, il sistema è MIMO con due ingressi e due uscite, quindi Q ed R, le matrici peso del funzionale, sono due matrici di dimensione 4×4 e 2×2 rispettivamente. Q è stata scelta diagonale, con elementi sulla diagonale pari a $(10, 10, 10, 10)$ mentre R è anch'essa diagonale con elementi $(1, 1)$. Il risultato ottenuto è

  $$K = \begin{bmatrix} 2.2361 & 37.7252 & 7.9235 & -4.7612 \\ -2.2361 & -37.7252 & -4.7612 & 7.9235 \end{bmatrix}$$

  che piazza i poli in $p = (-3.1684 + 5.0186i,\ -3.1684 - 5.0186i,\ -6.3479,\ -3.1623)$ mediante la retroazione $A - B\ K$.

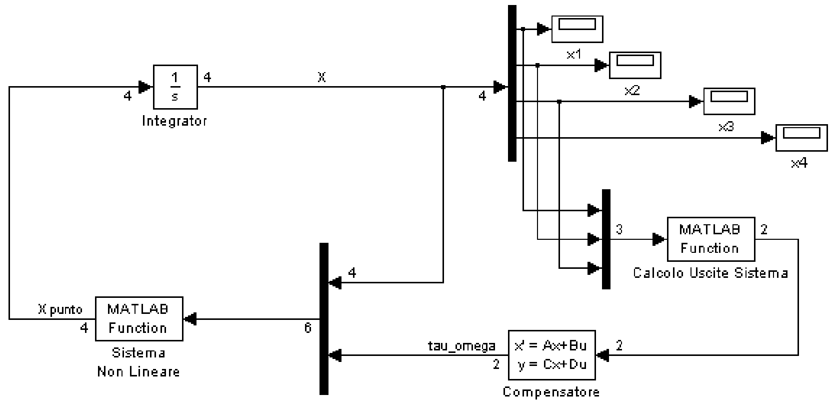

Figure 2: Schema Simulink del sistema non lineare controllato con il regolatore.

- La parte relativa alla ricostruzione dello stato è stata fatta con un osservatore di Kalman, robusto rispetto ai disturbi di attuazione e di misura. Il comando `[KEST,L] = kalman(sys,Q,R)` permette di ottenere come risultato la matrice di iniezione delle uscite L, utilizzando la matrice Q (fissata in questo esempio pari alla matrice identica 2×2, scalata di un fattore 10^3) come matrice di covarianza del rumore di attuazione, e la matrice R (fissata in questo esempio pari alla matrice identica 2×2) come matrice di covarianza del rumore di misura. La matrice di iniezione delle uscite L è la seguente

$$L = \begin{bmatrix} 23.5269 & 0.7635 \\ 5.5410 & 0.8420 \\ 0.7635 & 31.6136 \\ -31.6136 & 0.7635 \end{bmatrix}$$

- Compensatore: il compensatore basato sul regolatore si ottiene con il comando matlab `rsys= reg(sys,K,L)`. La matrice di trasferimento $R(s)$ del regolatore (ottenibile con il comando `tf(rsys)`) risulta

```
Transfer function from input 1 to output...
      -418.2 s^3 - 1.571e004 s^2 - 8.907e004 s - 1.74e005
 #1:  --------------------------------------------------
      s^4 + 70.99 s^3 + 1729 s^2 + 2.444e004 s + 1.801e005

      515.8 s^3 + 2.011e004 s^2 + 6.638e004 s + 1.233e005
 #2:  --------------------------------------------------
      s^4 + 70.99 s^3 + 1729 s^2 + 2.444e004 s + 1.801e005

Transfer function from input 2 to output...
        -280.3 s^3 - 8908 s^2 - 1.312e005 s - 7.078e005
 #1:  --------------------------------------------------
      s^4 + 70.99 s^3 + 1729 s^2 + 2.444e004 s + 1.801e005

         177.9 s^3 + 5126 s^2 + 5.951e004 s - 2.306e005
 #2:  --------------------------------------------------
      s^4 + 70.99 s^3 + 1729 s^2 + 2.444e004 s + 1.801e005
```

E Lo schema simulink per la simulazione del sistema non lineare controllato con il regolatore progettato sul linearizzato è riportato in figura 2. Nel blocco *Sistema non lineare* si trova la dinamica non lineare del sistema con equilibrio nell'origine. Il blocco *Compensatore* contiene la forma di stato del compensatore progettato. Nel blocco *Integratore* si inseriscono i valori iniziali del moto di equilibrio che si vanno poi a perturbare per simulare il comportamento del sistema al di fuori del punto di equilibrio. Infine nel blocco *Calcolo Uscite Sistema* si vanno a calcolare le uscite ρ e $\cos(\alpha)v$.

Nella figura 3 sono indicati gli andamenti delle quattro variabili di stato del sottosistema dinamico regolato $\bar{X}$ con equilibrio nell'origine.

La condizione iniziale per queste simulazioni è stata fissata a $\bar{X}_0 = [0.1\ \ \pi/4\ \ 0.1\ \ -0.1]^T$.

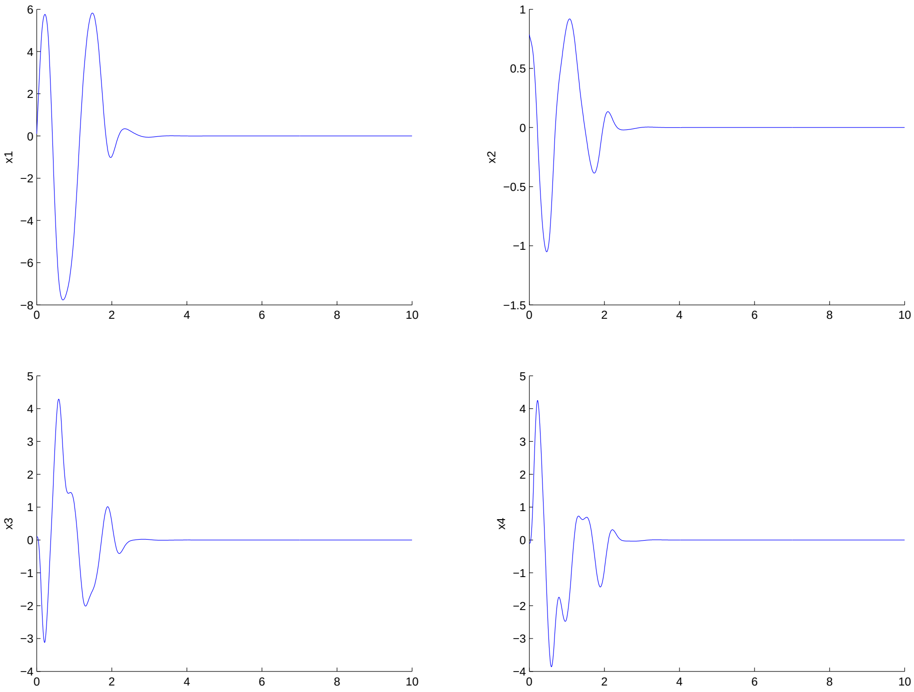

Figure 3: Andamento delle quattro variabili di stato traslate nel caso di stabilizzazione tramite controllo basato sul regolatore.

F Linearizzando il sistema si ottiene una matrice con autovalori nulli e un autovalore in -1, tramite il linearizzato non è quindi possibile concludere sulla stabilità del sistema non lineare.

Si consideri quindi la candidata di Lyapunov $V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ la cui derivata direzionale risulta $\dot{V} = -2x_2^2$ e quindi è semi definita negativa. Si consideri quindi l'insieme N in cui la derivata direzionale di V si annulla, si ha $N = \{(\alpha,\, 0,\, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. Tutte le traiettorie contenute in N sono tali che $x_2 \equiv 0$ e quindi $\dot{x}_2 \equiv 0$. Dalle equazioni dinamiche del sistema si ottiene $x_1 \equiv 0$ e quindi anche $x_3 \equiv 0$. L'unica traiettoria del sistema contenuta in N è l'origine e quindi, per il Teorema di Krasowskii-Lasalle, si ha che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.