Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 10-01-2005

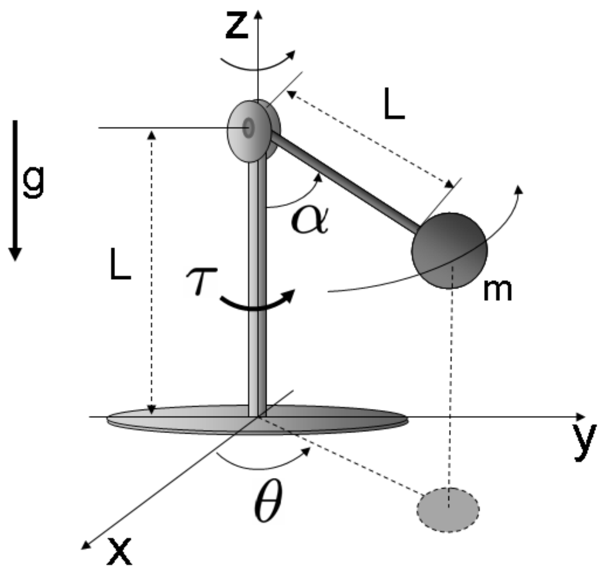

Figure 1:

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura dove $m = 1\,kg$ è la massa sospesa, $l = 1m$ la lunghezza dell'asta rigida che sostiene la massa e dell'albero, $I = 10^{-3}Kg/m^2$ è l'inerzia dell'albero e $g = 9.8m/s^2$ l'accelerazione di gravità. Siano α l'angolo formato dall'asta che sorregge la massa sospesa e l'albero e ω la velocità angolare della struttura.

Il sistema è attuato attraverso una coppia τ applicata alla base della struttura.

Le equazioni dinamiche del sistema risultano:

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\alpha} - \frac{1}{2}ml^2\sin(2\alpha)\omega^2 + mgl\sin\alpha = 0 \\ (I + ml^2\sin(\alpha)^2)\dot{\omega} + ml^2\sin(2\alpha)\dot{\alpha}\omega = \tau \end{cases} \tag{1}$$

A Si determinino tutti i punti di equilibrio corrispondenti a $\dot{\alpha} = 0$, $\omega(t) = \bar{\omega} = \sqrt{\frac{g\sqrt{2}}{l}}$.

B Si determinino le matrici dinamiche del sistema linearizzato intorno ai punti di equilibrio ottenuti.

C Si considerino due sensori in grado di leggere $\alpha \in [0, \pi]$ e ω rispettivamente. Si studino le proprietà di controllabilità e osservabilità per tutti i sistemi ottenuti utilizzando alternativamente i due sensori e si fornisca una interpretazione fisica dei risultati ottenuti.

D Per il sistema ottenuto con il sensore relativo a ω si determini se è possibile progettare dei regolatori che rendano i sistemi asintoticamente stabili. Si progetti, se possibile, un compensatore basato su regolatore in modo tale che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile.

E Si realizzi una simulazione numerica del comportamento del sistema ottenuto connettendo il compensatore ottenuto al passo precedente con il sistema non lineare e si commentino le simulazioni ottenute.

Soluzione

A Il moto del sistema corrispondente a $\dot{\alpha} = 0$ e $\omega = \sqrt{\frac{g\sqrt{2}}{l}}$ è caratterizzato da $\tau = 0$ (seconda equazione). Dalla prima equazione si ottiene $\sin(\alpha) = 0$ e $l \cos\alpha\, \omega^2 = g$ da cui $\alpha = \pm k\pi$ e $\alpha = \frac{\pi}{4}$ con $k \in \mathbf{Z}$. I punti di equilibrio sono

$$\begin{array}{rcl} \alpha(t) & = & \frac{\pi}{4} \\ \omega(t) & = & \sqrt{\frac{g\sqrt{2}}{l}} \\ \dot{\alpha}(t) & = & 0. \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} \alpha(t) & = & 0 \\ \omega(t) & = & \sqrt{\frac{g\sqrt{2}}{l}} \\ \dot{\alpha}(t) & = & 0. \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} \alpha(t) & = & \pi \\ \omega(t) & = & \sqrt{\frac{g\sqrt{2}}{l}} \\ \dot{\alpha}(t) & = & 0. \end{array} \tag{2}$$

B Si scelgano come variabili di stato le variabili $x = (x_1,\, x_2,\, x_3) = (\alpha,\, \omega,\, \dot{\alpha})$. Nelle nuove coordinate si ha

$$\begin{cases} \dot{x}_2 & = -\frac{ml^2 \sin(2\mathbf{x}_1)x_2x_3}{I+ml^2\sin(x_1)^2} + \frac{1}{I+ml^2\sin(x_1)^2}\tau \\ \dot{x}_3 & = \frac{1}{2}\sin(2x_1)x_2^2 - \frac{g}{l}\sin x_1 \end{cases} \tag{3}$$

La matrice dinamica e il vettore degli ingressi del linearizzato risultano:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{ml^2\sin(2\bar{\alpha})\omega}{I+ml^2\sin(\bar{\alpha})^2} \\ \cos(2\bar{\alpha})\omega^2 - \frac{g}{l}\cos\bar{\alpha} & \sin(2\bar{\alpha})\omega & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I+ml^2\sin(\bar{\alpha})^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

vanno ora calcolati nei punti di equilibrio $(\bar{\alpha}, \bar{\omega}, 0)$.

Equilibrio in $\bar{\alpha} = \frac{\pi}{4}$: Linearizzando intorno al punto di equilibrio relativo ad $\bar{\alpha} = \frac{\pi}{4}$ si ottiene la matrice dinamica

$$A_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7.43 \\ -6.929 & 3.722 & 0 \end{bmatrix};$$

Si noti che la relazione tra le nuove variabili di stato z, associate alla matrice dinamica $A_{\frac{\pi}{4}}$, e le variabili x risulta

$$\begin{cases} z_1 & = x_1 - \bar{\alpha} \\ z_2 & = x_2 - \bar{\omega} \\ z_3 & = x_3 \end{cases} \tag{4}$$

Nelle nuove variabili di stato il vettore di ingresso $B_{\frac{\pi}{4}}$ vale

$$B_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.996 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Equilibrio in $\bar{\alpha} = 0$: Linearizzando intorno al punto di equilibrio $\bar{\alpha} = 0$ si ottiene la matrice dinamica

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.05 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Il vettore di ingresso B_0 vale

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Equilibrio in $\bar{\alpha} = \pi$: Linearizzando intorno al punto di equilibrio $\bar{\alpha} = \pi$ si ottiene la matrice dinamica

$$A_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 23.65 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Il vettore di ingresso B_π vale

$$B_\pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \end{bmatrix},$$

C Ingresso τ

Equilibrio in $\bar{\alpha} = \frac{\pi}{4}$: La matrice di raggiungibilità risulta

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7.43 \\ 1.996 & 0 & -55.216 \\ 0 & 7.43 & 0 \end{bmatrix}$$

R ha rango 3 e pertanto il sistema risulta completamente raggiungibile.

Equilibri in $\bar{\alpha} = k\pi$ In questi casi la matrice dinamica ha la seconda colonna nulla che corrisponde al secondo elemento di B, unico elemento non nullo del vettore degli ingressi. Si nota quindi facilmente che in questi casi la matrice di raggiungibilità ha rango 1.

Uscita ω Il sensore che legge il valore ω può essere utilizzato per calcolare la variabile di uscita del sistema $z_2 = \omega - \bar{\omega}$. Quindi, nelle variabili z, il vettore di uscita C_ω risulta

$$C_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

la matrice di osservabilità

$$O_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{ml^2 \sin(2\bar{\alpha})\bar{\omega}}{I+ml^2\sin(\bar{\alpha})^2)} \\ \frac{ml\sin(2\bar{\alpha})\bar{\omega}(-\cos(2\bar{\alpha})\bar{\omega}^2 l+g\cos(\bar{\alpha})))}{(I+ml^2\sin(\bar{\alpha})^2)} & -\frac{ml^2\sin(2\bar{\alpha})^2\bar{\omega}^2}{I+ml^2\sin(\bar{\alpha})^2)} & 0 \end{bmatrix}$$

Equilibri in $\bar{\alpha} = k\pi$ È facile notare che in questi casi $\sin(2\bar{\alpha}) = 0$ e quindi la matrice di osservabilità ha rango 1.

Equilibrio in $\bar{\alpha} = \frac{\pi}{4}$ in questo caso la matrice di osservabilità ha rango 3. Fisicamente il fatto è spiegabile notando che dalla velocità angolare è possibile ricostruire l'angolo α e di conseguenza la sua derivata.

Uscita α Il sensore che legge il valore α può essere utilizzato per calcolare la variabile di uscita del sistema $z_1 = \alpha - \bar{\alpha}$. Quindi, nelle variabili z, il vettore di uscita C_α risulta

$$C_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

la matrice di osservabilità

$$O_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos(2\bar{\alpha})\omega^2 - \frac{g}{l}\cos\bar{\alpha} & \sin(2\bar{\alpha})\bar{\omega} & 0 \end{bmatrix}$$

Equilibri in $\bar{\alpha} = k\pi$ È facile notare che in questi casi $\sin(2\bar{\alpha}) = 0$ e quindi la matrice di osservabilità ha rango 2.

Equilibrio in $\bar{\alpha} = \frac{\pi}{4}$ in questo caso la matrice di osservabilità ha rango 3. Fisicamente il fatto è spiegabile notando che dalla conoscenza di α è possibile ricostruire la velocità angolare del sistema.

D È possibile progettare un compensatore basato sul regolatore che renda il sistema asintoticamente stabile nel caso dell'equilibrio $\alpha = \frac{\pi}{4}$ in quanto solo in questo caso il sistema risulta completamente raggiungibile e osservabile.

Si consideri ora il sistema con ingresso τ e uscita $\omega - \bar{\omega}$, sia $sys = ss(A, B, C_\theta, 0)$, il progetto del compensatore basato sul regolatore si ottiene con i seguenti comandi matlab:

- Retroazione: la matrice di retroazione K tale che gli autovalori di $A - BK$ siano in $p = -2, -4 + i, -4 - i$ è ottenibile dal comando matlab

```
>>p =[ -2 -4+i -4-i];
>>K=acker(A,B,p)
K =
   -4.7501    5.0100   -0.2144
```

- Stimatore: la matrice L di iniezione delle uscite sugli stati tale che gli autovalori di $A - LC$ siano in $-4, -6 + i, -6 - i$ è ottenibile dal comando matlab

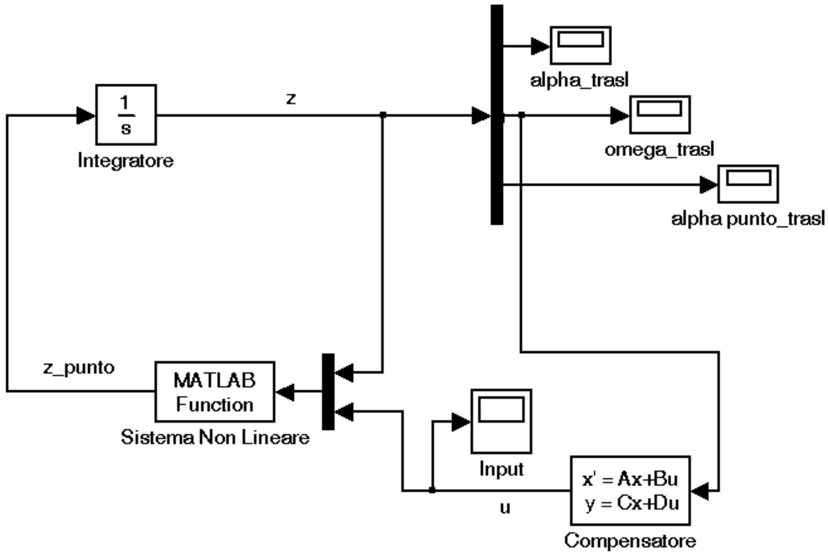

Figure 2: Schema Simulink del sistema non lineare controllato con il regolatore che ha come ingresso τ e come uscita θ.

```
>>q = [-4.0000  -6.0000 + 1.0000i  -6.0000 - 1.0000i]
>>L=transpose(acker(A',C',q))
  L =
    0.7210
   16.0000
   -6.7836
```

- Compensatore: il compensatore basato sul regolatore si ottiene con il comando matlab `rsys= reg(sys,K,L)`. La funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore (ottenibile con il comando `tf(rsys)`) risulta

$$R(s) = \frac{-78.19s^2 - 273.1s - 363.8}{s^3 + 26s^2 + 87.34s + 115.5}$$

E Lo schema simulink per la simulazione del sistema non lineare controllato con il regolatore progettato sul sottosistema osservabile e raggiungibile del linearizzato è riportato in figura 4. Nel blocco *Sistema non lineare* si trova la dinamica non lineare traslata nell'equilibrio. Nel blocco *Compensatore* ci sono le matrici del compensatore basato sul regolatore.