

Numero di matricola

-	-	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	-
---	---	------------------	-----------------	------------------	---

Si consideri lo schema semplificato della dinamica di rollio di una imbarcazione a vela riportato in fig.1. In prima approssimazione, la inerzia complessiva del sistema barca + albero + vela si suppone equivalente a quella di una massa puntiforme M posta sull'albero a distanza L dal punto C di contatto dello scafo con la superficie del mare, modellato come un fulcro attorno al quale la barca ruota formando un angolo θ con la verticale. Un sistema di stabilizzazione attiva della barca può impiegare una massa mobile (pensata in aiuto al velista, la cui massa supponiamo trascurabile). Questa massa può spostarsi lungo un binario ortogonale all'albero, essendo x_m la distanza tra la massa ed il fulcro C , sotto l'azione di una forza F esercitata da apposito attuatore. Il momento d'attrito tra la carena del catamarano e la superficie del mare si approssima alla funzione $M_{attr} = b\dot{\theta}$. L'azione trasversale del vento sulla dinamica del sistema complessivo è pensata equivalente ad una forza δ applicata orizzontalmente al punto in cui si trova la massa M .

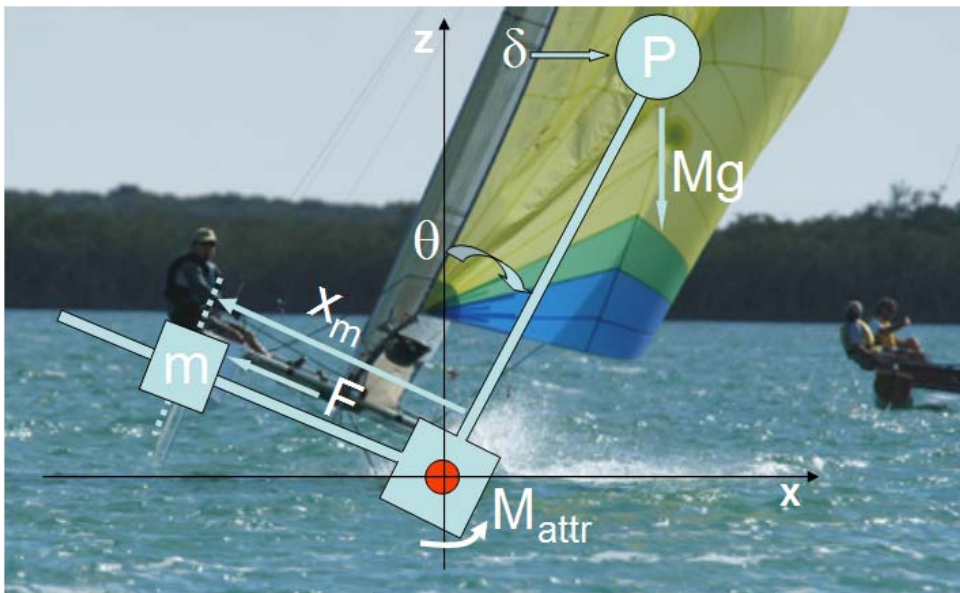


Figure 1: Schema esemplificativo del funzionamento di un catamarano.

Il sistema é descritto dalle seguenti equazioni dinamiche

$$\begin{cases} m\ddot{x}_m - mx_m\dot{\theta}^2 + mg \sin(\theta) = F \\ (ML^2 + mx_m^2)\ddot{\theta} + 2mx_m\dot{\theta}\dot{x}_m - MgL \sin(\theta) + mgx_m \cos(\theta) = \delta L \cos(\theta) - b\dot{\theta} \end{cases}$$

dove in particolare $L = 2 + 0.1\alpha$ m, $b = 2 + 0.1\beta$ Nms/rad, $m = 80$ Kg, $M = \sqrt{3}m + 0.1\gamma$ Kg, e $g = 9.81$ m/s².

- Trovare il punto di equilibrio del sistema corrispondente ad una intensità del vento $\bar{\delta} = mg$ N e una forza di richiamo $\bar{F} = \frac{mg}{2}$ N. Si discuta la stabilità del sistema linearizzato.
- Per lo stesso sistema, si descriva il rapporto ingresso F - uscita θ mediante funzione di trasferimento.
- Si progetti un controllore in retroazione che usi la misura della uscita θ e il controllo dell'ingresso F per stabilizzare la funzione di trasferimento ottenuta al punto **B**).

Si riporti uno schema a blocchi del sistema retroazionato.

Si commentino adeguatamente i passaggi effettuati durante le fasi di progetto del controllore.

Soluzione

A Il sistema risulta descritto da due equazioni dinamiche del secondo ordine nelle variabili x_m e θ . Consideriamo la scelta del vettore di stato $X = [x_m, \theta, \dot{x}_m, \dot{\theta}]^T = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, e del vettore degli ingressi $U = [F, \delta]^T$. Il sistema in forma di stato risulta quindi

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} \\ y = \theta \end{cases} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{x_1 x_4^2 - g \sin(x_2) + \frac{F}{m}}{ML^2 + m\bar{x}_1^2} \\ \frac{-2mx_1x_3x_4 + MgL \sin(x_2) - mgx_1 \cos(x_2) - bx_4}{ML^2 + m\bar{x}_1^2} + \frac{L \cos(x_2)}{ML^2 + m\bar{x}_1^2} \delta \end{pmatrix}$$

Per il calcolo del punto di equilibrio \bar{X} , posto il vettore degli ingressi all'equilibrio $\bar{U} = [\bar{F}, \bar{\delta}]^T = [\frac{mg}{2}, mg]^T$, si pone l'eguaglianza $\dot{X} = 0$ ottenendo le equazioni

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ \sin(\bar{x}_2) = \frac{\bar{F}}{mg} \\ MgL \sin(\bar{x}_2) - mg\bar{x}_1 \cos(\bar{x}_2) + \bar{\delta}L \cos(\bar{x}_2) = 0 \end{cases}$$

che, risolte (per il caso $\alpha = \beta = \gamma = 0$ che verrà d'ora innanzi considerato ad esempio) portano a

$$\bar{X} = \left[\frac{\bar{\delta}L + MgL\sqrt{3}}{mg}, \arcsin\left(\frac{\bar{F}}{mg}\right), 0, 0 \right]^T = \left[2L, \frac{\pi}{6}, 0, 0 \right]^T.$$

Le matrici del sistema linearizzato attorno all'equilibrio \bar{X} trovato risultano

$$A = \frac{\partial f(X, U)}{\partial X} \Big|_{\bar{X}, \bar{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

in cui

$$\begin{cases} a_{32} = -g \cos(\bar{x}_2) = -8.487 \\ a_{41} = -\frac{mg \cos(\bar{x}_2)}{ML^2 + m\bar{x}_1^2} - \frac{2m\bar{x}_1(MgL \sin(\bar{x}_2) - mg\bar{x}_1 \cos(\bar{x}_2) + L \cos(\bar{x}_2)\bar{\delta})}{(ML^2 + m\bar{x}_1^2)^2} = -0.3702 \\ a_{42} = \frac{MgL \cos(\bar{x}_2) + mg\bar{x}_1 \sin(\bar{x}_2) - L \sin(\bar{x}_2)\bar{\delta}}{ML^2 + m\bar{x}_1^2} = 1.7097 \\ a_{44} = -\frac{b}{ML^2 + m\bar{x}_1^2} = -0.001. \end{cases}$$

$$B_f = \frac{\partial f(X, U)}{\partial f} \Big|_{\bar{X}, \bar{U}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0125 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_\delta = \frac{\partial f(X, U)}{\partial \delta} \Big|_{\bar{X}, \bar{U}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{L \cos(\bar{x}_2)}{ML^2 + m\bar{x}_1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9.44 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$C = (0 \ 1 \ 0 \ 0), \quad D = 0.$$

Gli autovalori della matrice dinamica A risultano

$$\lambda_1 = -1.6805; \lambda_2 = 1.6797; \lambda_{3,4} = -0.0001 \pm j 1.055,$$

e la presenza del polo λ_2 reale positivo implica l'instabilità del sistema.

B Le due funzioni di trasferimento richieste risultano

$$\frac{\theta(s)}{f(s)} = G_f = C(sI - A)^{-1}B_f + D = \frac{-0.004627}{s^4 + 0.001s^3 - 1.71s^2 - 3.142}$$

$$\frac{\theta(s)}{\delta(s)} = G_\delta = C(sI - A)^{-1}B_\delta + D = \frac{0.000944s^2}{s^4 + 0.0001s^3 - 1.71s^2 - 3.142}$$

C Si utilizza il metodo del luogo delle radici per il progetto di un controllore in retroazione stabilizzante per la funzione di trasferimento G_f . Essendo tale funzione di trasferimento instabile in anello aperto, e il guadagno della funzione G_f negativo, si utilizzerà un controllore con guadagno statico negativo (retroazione positiva). Il luogo delle radici e i relativi diagrammi di Bode del sistema in retroazione positiva sono riportati in fig.2.

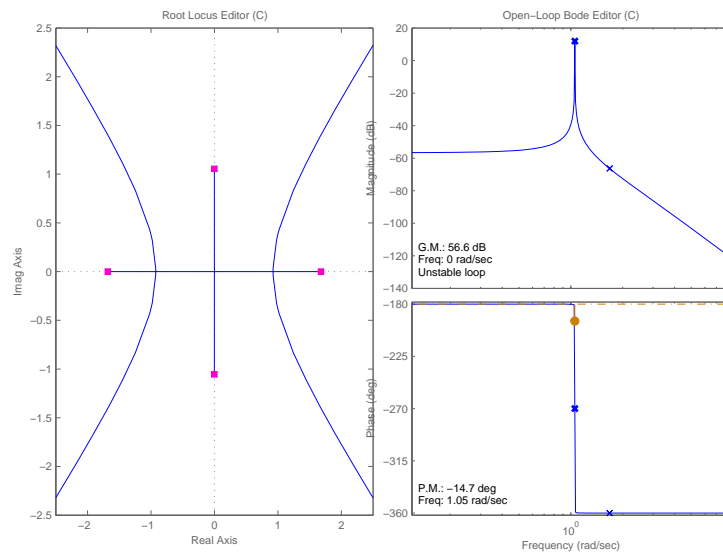


Figure 2: Luogo delle radici e diagrammi di Bode per la $G_f(s)$ chiusa in retroazione positiva.

Per il progetto del controllore, si sceglie la strada della cancellazione dei due poli in $\lambda_{3,4} = -0.0001 \pm j1.055$, utilizzando una coppia di zeri complessi coniugati. Non essendo necessario peraltro che la cancellazione sia esatta, i due zeri possono essere piazzati in $z_{1,2} = -0.0002 \pm j1.055$. Il risultato è riportato in fig.3. Come si nota, il luogo delle radici tende a quello proprio di una coppia di poli reali di cui uno instabile.

Al fine di attrarre i rami del luogo nel semipiano complesso a parte reale negativa, si può inserire nel controllore una rete anticipatrice con zero posto in $s = -1$ e polo in $s = -10$. In questo caso è necessario aumentare anche il guadagno del controllore. Il risultato dell'inserimento della rete anticipatrice nel controllore, con guadagno pari a $K = 10^3$ è riportato in fig.4. In questo caso abbiamo ottenuto un sistema stabile in retroazione con margine di fase $\phi \approx 40$.

Al fine di rendere causale il controllore $C(s)$ si inseriscono due poli a frequenze tali da non degradare troppo il margine di fase del sistema complessivo, ad esempio coincidenti in $\omega = 100 \frac{rad}{s}$. Il risultato del controllore finale,

$$C_I(s) = -10^3 \frac{(1 + 0.00036 + (0.95s)^2)(s + 1)}{(0.1s + 1)(0.01s + 1)^2},$$

è riportato in fig.5.

In fig.6 è riportato lo schema a blocchi del sistema in retroazione.

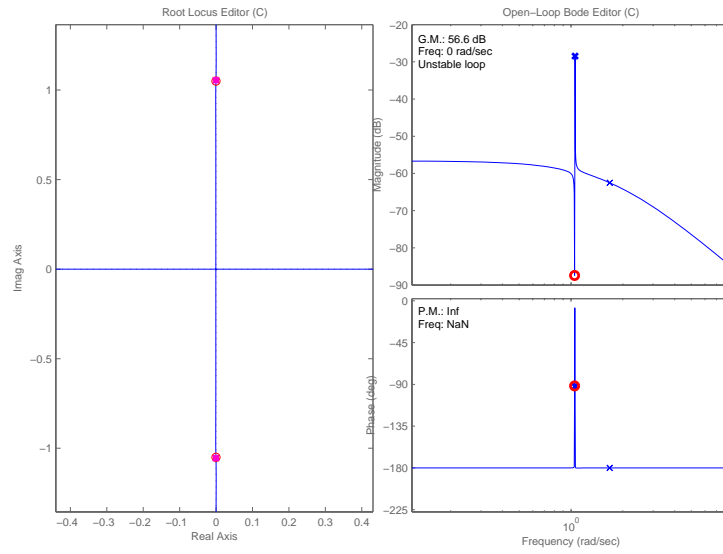


Figure 3: Luogo delle radici e diagrammi di Bode per la $G_f(s)$ chiusa in retroazione con controllore non causale $C_I(s) = -\frac{1+0.00036+(0.95s)^2}{1}$.

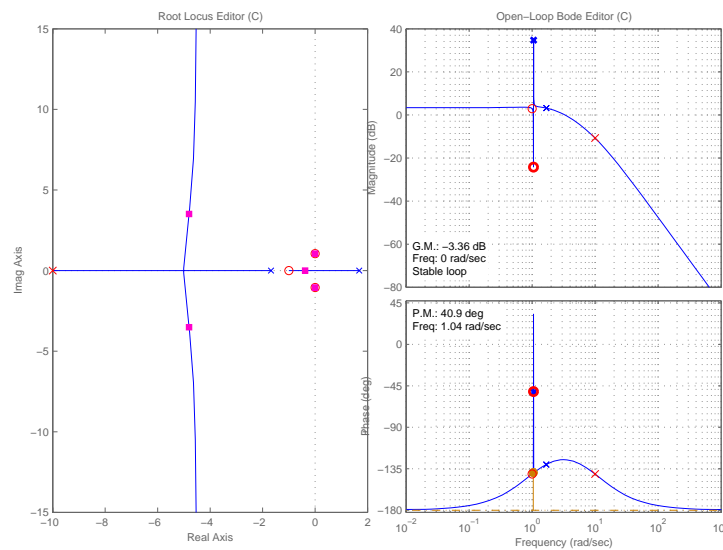


Figure 4: Luogo delle radici e diagrammi di Bode per la $G_f(s)$ chiusa in retroazione con controllore non causale $C_I(s) = -10^3 \frac{(1+0.00036+(0.95s)^2)(s+1)}{(0.1s+1)}$.

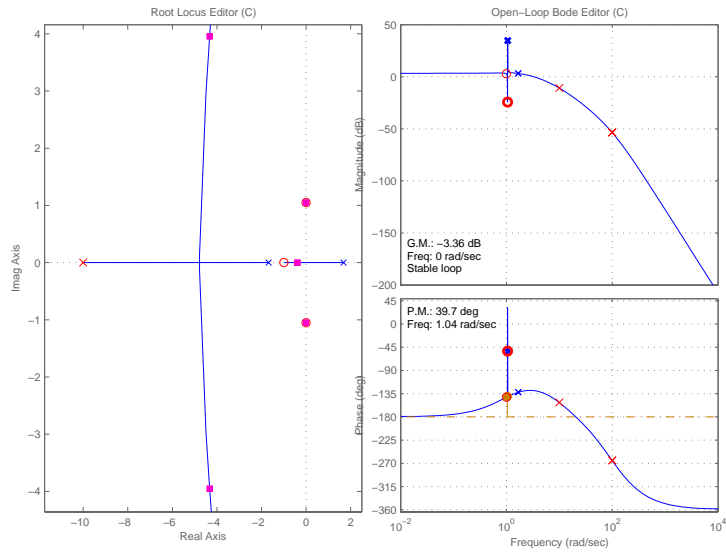


Figure 5: Luogo delle radici e diagrammi di Bode per la $G_f(s)$ stabilizzata in retroazione.

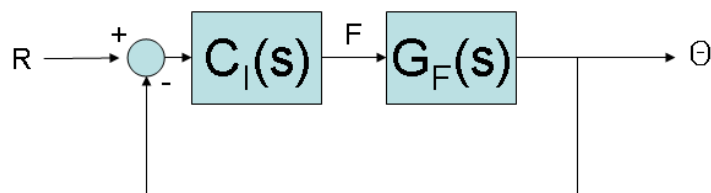


Figure 6: Schema del sistema di controllo a doppio anello di retroazione.