Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 31-05-2004

Si consideri il modello approssimato del sistema meccanico riportato nella figura 1.

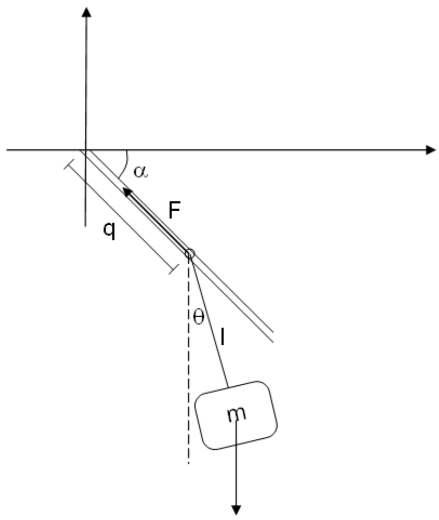

Figure 1: Sistema Meccanico rappresentato da un cavo con un peso

Se l'angolo di inclinazione del cavo è $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e la massa sospesa ha oscillazioni di piccola ampiezza il sistema è descritto in prima approssimazione dalle equazioni:

$$\begin{cases} \ddot{q} = -\frac{m\dot{q}\dot{\theta} - mg\theta\sqrt{2} - m\dot{\theta}^2 l\sqrt{2} - m\dot{\theta}^2 l\theta\sqrt{2} - mg\sqrt{2}}{m(1+2\theta)} - \frac{2}{m(1+2\theta)}F \\ \ddot{\theta} = \frac{-mg + \theta\sqrt{2}m\dot{q}\dot{\theta} - ml\dot{\theta}^2 + \sqrt{2}m\dot{q}\dot{\theta} - mg\theta}{ml(1+2\theta)} + \frac{\sqrt{2} - \theta\sqrt{2}}{ml(1+2\theta)}F \end{cases} \tag{1}$$

dove $m = 100\,Kg$ è la massa del corpo sospeso e $l = 2\,m$ la lunghezza del cavo che sorregge la massa. F è la forza applicata sul cavo, q la distanza della massa sospesa dall'origine degli assi e θ l'angolo di oscillazione della massa sospesa.

Considerando il sistema 1:

A Si determini il valore della forza F e il moto di riferimento del sistema, nel caso in cui la velocità del cavo sia mantenuta costante e pari a $\dot{q} = V = -1\,m/s$ e $\theta = 0$;

B Si linearizzi il sistema intorno al moto di riferimento e si studi la controllabilità del modello linearizzato considerando come ingresso la forza F; si discuta inoltre la osservabilità dello stesso considerando alternativamente come uscita l'angolo θ e la distanza q.

C Si confrontino le f.d.t. per le due diverse uscite;

D Si progetti, se possibile, un regolatore che, usando la misura dei valori di uscita θ e q, regoli la forza F in modo da garantire l'asintotica stabilità del moto di riferimento;

E Si valuti, tramite simulazioni, la asintotica stabilità del sistema non lineare, sottoposto agli ingressi controllati tramite il regolatore ottenuto al punto precedente, al variare delle condizioni iniziali. Si dia una interpretazione dei risultati ottenuti.

F Supponendo di controllare il sistema linearizzato in catena aperta mediante un controllore digitale (con frequenza di controllo/campionamento di $20Hz$), si dica se e come è possibile fare evolvere lo stato del sistema dal punto $[0, 0, 0, 0]$ al punto $[0.001; 0; 0; 0]$ in 1 secondo. E' possibile raggiungere tale risultato in un tempo minore?

Soluzione

A Il moto di riferimento del sistema è caratterizzato da $\theta = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, $\ddot{q} = 0$ e $q = V$. Quindi, per mantenere il sistema lungo il moto di riferimento è necessaria una forza $F = \bar{F} = m\,g\frac{\sqrt{2}}{2} = 693,67 Kgp$.

B Scegliendo come variabili di stato $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\theta,\ q - Vt - q_0,\ \dot{\theta},\ \dot{q} - V)$ il linearizzato è caratterizzato dalle matrici:

$$A = \frac{\partial f(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2\frac{g}{l} & 0 & \frac{\sqrt{2}V}{l} & 0 \\ g\sqrt{2} & 0 & -V & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9.81 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 13.87 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{ml} \\ -\frac{2}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{200} \\ -\frac{1}{50} \end{bmatrix}.$$

Se si sceglie come uscita il valore θ, la matrice delle uscite è $C_\theta = [1\,0\,0\,0]$, se invece si sceglie il valore q, la matrice delle uscite è $C_q = [0\,1\,0\,0]$.

Calcolando il rango della matrice di raggiungibilità per l'ingresso F si ottiene che il sistema è completamente raggiungibile. Alternativamente, usando il comando Matlab `rank(ctrb(A,B))` si ottiene subito che la matrice di controllabilità ha rango pieno e pari a 4.

La matrice di osservabilità nel caso in cui si osserva θ ha rango 2 mentre ha rango 4 nel caso in cui si osserva lo scostamento $q - Vt - q_0$. Questo si può vedere anche con i comandi Matlab `rank(obsv(A,`C_θ`))` e `rank(obsv(A,`C_q`))`.

C Le funzioni di trasferimento, che si ottengono con i comandi Matlab G_θ`=tf(ss(A,B,`C_θ`,0))` e G_q`=tf(ss(A,B,`C_q`,0))`, sono:

$$G_\theta = \frac{0.007071}{s^2 + 0.7071s + 9.8}$$

$$G_q = \frac{-0.02s^2 - 0.007071s - 0.098}{s^2(s^2 + 0.7071s + 9.8)}$$

La funzione di trasferimento G_θ ha ordine 2, non ha zeri e non ha i due poli nell'origine che ha invece la G_q.

D Per progettare un regolatore usando le uscite q e θ del sistema si può procedere in vari modi.

Il primo modo che descriviamo è quello di scegliere come uscita la sola q per la quale il sistema risulta completamente raggiungibile e osservabile. Sia $sys = ss(A, B, C_\theta, D)$, il progetto del regolatore si ottiene con i seguenti comandi matlab:

- Retroazione: la matrice di retroazione K tale che gli autovalori di $A - BK$ siano in -0.1, $-0.2 + 0.1i$, $-0.2 - 0.1i$, -0.3, è ottenibile dal comando matlab

```
>>p = [-0.1, -0.2+0.1*i, -0.2-0.1*i, -0.3];
>>K=acker(A,B,p)
  K= 1.0e+003 *
  -1.3538   -0.0000    0.0122   -0.0003
```

- Stimatore: la matrice L di iniezione delle uscite sugli stati tale che gli autovalori di $A - LC$ siano in -10, -20, -10, -20 è ottenibile dal comando matlab

```
>>q=[-1, -2+i, -2-i, -3];
>>L=transpose(acker(A',C',q))
  L =
    -2.9282
     7.2929
    -5.3062
     9.0331
```

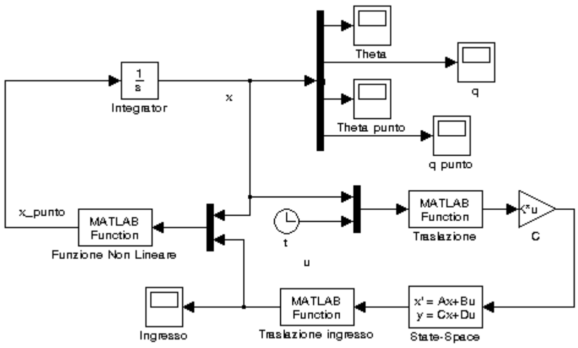

Figure 2: Schema Simulink del sistema non lineare controllato con il regolatore che ha come ingresso la variabile q.

- Regolatore: il regolatore si ottiene con il comando matlab `rsys= reg(sys,K,L)`. La funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore (ottenibile con il comando `tf(rsys)`) risulta

$$R(s) = \frac{-3896s^3 - 1.035\,10^4 s^2 + 5.366s + 0.2294}{s^4 + 8.093s^3 + 15.11s^2 + 41s + 104}$$

- Sistema regolato: il sistema regolato si ottiene con il comando `fsys=feedback(series(rsys,sys),1,+1)` e la funzione di trasferimento risulta

$$G_R(s) = \frac{77.9253(s+2.657)(s-0.004969)(s+0.004459)(s^2+0.3536s+4.905)}{(s+3)(s+1)(s+0.3)(s+0.1)(s^2+0.4s+0.05)(s^2+4s+5)}$$

Con la stessa procedura è possibile costruire il regolatore utilizzando entrambe le uscite e quindi vedendo il sistema come SIMO. L'unica accortezza è quella di utilizzare il comando Matlab `place` al posto del comando `acker`.

E Lo schema simlink per la simulazione del sistema non lineare controllato con il regolatore progettato sul linearizzato è riportato in figura 2. Nel blocco `Funzione non lineare` si trova la dinamica non lineare delle quattro variabili di stato. Nel blocco *State-Space* ci sono le matrici del regolatore. Se nell'integratore le condizioni iniziali vengono poste a $[000-1]$ si ha che gli stati convergono al moto di riferimento. Nel blocco *Traslazione* si trasla il moto di riferimento nell'origine. Mentre all'uscita del regolatore si trasla l'ingresso. Se nel primo integratore si perturba la condizione iniziale si trova che la condizione iniziale $x_1(0) = 0.01$ è al di fuori della regione di asintotica stabilità perchè l'andamento della prima variabile diverge.

F Si cerca ora una sequenza di al più $20 = \frac{1sec}{0.05sec}$ controlli che siano limitati e che facciano variare lo stato $x_1 = \theta$ da 0 a 0.001 considerando le altre variabili di stato in condizioni di equilibrio e quindi nulle. Si chiede quindi di discretizzare il sistema con tempo di campionamento di $\Delta T = 0.05sec$ e quindi pianificare in al più 20 passi la traiettoria desiderata per la variabile x_1.

Con la tecnica di integrazione di Eulero in avanti si ottiene che le matrici del sistema discretizzato risultano $A_k = A\Delta T + eye(8)$, $B_k = B\Delta T$, $C_k = C$ e $D_k = 0$. Il sistema discretizzato risulta completamente raggiungibile ed è quindi possibile applicare tecniche di pianificazione ottima.

Una procedura automatica per il calcolo della matrice di raggiungibilità in 20 passi Rck è data da

```
Rck = bk;
for i=1:19
    [m,n] = size(Rck);
    RR = Rck(:,n);
    Rck = [Rck,Ak*RR];
end
```

La sequenza di controlli a modulo minimo che porta il sistema dallo stato iniziale

```
x0 = [0; 0; 0; 0]
```

allo stato finale

```
xt = [0.001; 0; 0; 0]
```

è data dalla soluzione del problema di pianificazione ottima e cioè da

```
u20 = Rck' * inv(Rck * Rck')*(xt - Ak^20*x0).
```

La sequenza di 20 controlli così trovata è:

> -10.4855, -5.5128, -1.5560, 1.4086, 3.4292, 4.5784, 4.9508, 4.6615, 3.8432, 2.6431, 1.2197
> -0.2615, -1.6315, -2.7225, -3.3714, -3.4247, -2.7416, -1.1982, 1.3093, 4.8621

Sicuramente possono bastare 4 passi per raggiungere la configurazione desiderata in quanto il sistema è completamente raggiungibile. Con una procedura equivalente a quella descritta si può provare a vedere se è possibile raggiungere lo stato desiderato in meno di 4 passi. Alternativamente si verifica se la differenza tra lo stato desiderato e quello iniziale appartiene all'immagine della matrice di raggiungibilità in un passo, due passi e tre passi. Sia $v = [0.001,\ 0,\ 0,\ 0]'$ la differenza tra lo stato desiderato e quello iniziale, per verificare se il numero minimo di passi in cui si raggiunge lo stato è 1 è sufficiente calcolare il rango della matrice: $[b, v]$ avendo questa rango 2 lo stato desiderato non è raggiungibile in un passo. La matrice $[b, Ab, v]$ ha rango 3 e quindi lo stato desiderato non è raggiungibile in due passi, infine la matrice $[b, Ab, A^2b, v]$ ha rango 4 e quindi lo stato desiderato non è raggiungibile in tre passi. Concludendo il minimo numero di passi per cui è possibile raggiungere lo stato desiderato è 4.