

Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 10-02-2004

Si consideri il modello approssimato del sistema meccanico riportato nella figura 1, descritto dalle

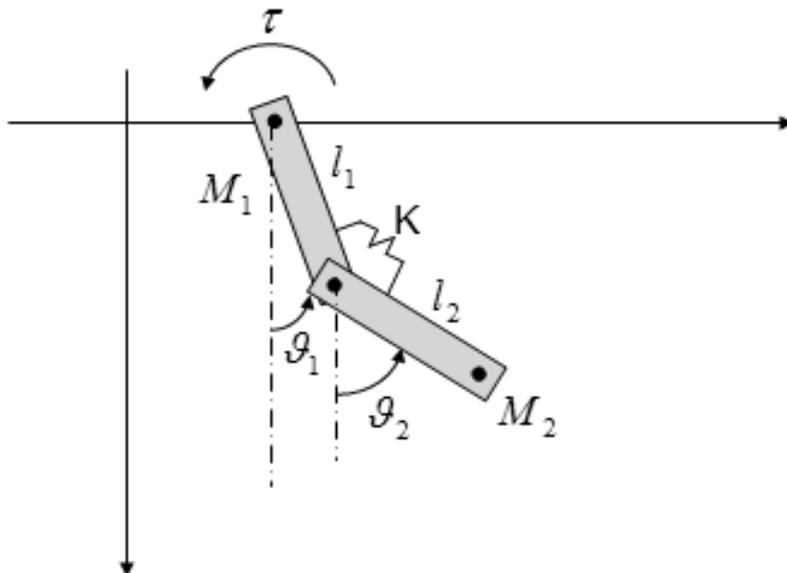


Figure 1: Modello del sistema

equazioni

$$\begin{cases} (J_1 + M_2 l_1^2) \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} M_2 l_2 l_1 \ddot{\theta}_2 + K(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} M_1 g l_1 \sin \theta_1 & = \tau \\ \frac{1}{2} M_2 l_2 l_1 \ddot{\theta}_1 + J_2 \ddot{\theta}_2 + K(\theta_2 - \theta_1) & = 0 \end{cases}$$

dove $J_1 = 0.08 \text{ kgm}^2$ e $J_2 = 0.05 \text{ kgm}^2$ sono rispettivamente i momenti di inerzia del primo e del secondo link di lunghezza $l_1 = 0.8 \text{ m}$ ed $l_2 = 0.5 \text{ m}$. Le masse dei due link sono rispettivamente $M_1 = 2 \text{ kg}$ ed $M_2 = 0.5 \text{ kg}$, e la costante elastica vale $K = 3000 \text{ N/m}$. Si tenga inoltre in considerazione che l'accelerazione gravitazionale è fissata a $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

- A** Si calcoli il punto di equilibrio del sistema una volta che sia imposto $\bar{\theta}_1 = \pi$, e se ne discuta la stabilità;
- B** Si linearizzi il sistema e si studi la controllabilità del modello linearizzato considerando come ingresso la coppia τ ; si discuta inoltre la osservabilità dello stesso considerando alternativamente come uscita l'angolo θ_1 (attuatore e sensore *co-locati*) e l'angolo θ_2 (attuatore e sensore *non co-locato*);
- C** Si confrontino le f.d.t. per le due diverse uscite, e si dia una interpretazione fisica delle differenze riscontrate;
- D** Si progetti un regolatore che, usando la misura del valore di uscita θ_1 , regoli la coppia τ in modo da garantire l'asintotica stabilità del punto di equilibrio ed un errore a regime di inseguimento al riferimento a gradino nullo;
- E** Si effettui una simulazione del sistema ottenuto connettendo il controllore progettato nel punto precedente con il modello nonlineare del sistema;
- F** Si dia una stima delle condizioni iniziali a partire dalle quali il controllore progettato in precedenza al punto **D**, è capace di garantire la convergenza del sistema sulla configurazione desiderata;
- G** Facoltativo: si dia una interpretazione della uscita ottenuta qualora si ponga in ingresso al sistema regolato una sinusoide di frequenza pari a $\sqrt{60000} \text{ rad/s}$;
- H** Facoltativo: determinare se e come è possibile rendere inosservabili delle oscillazioni interne al sistema di partenza modificando corentemente i parametri del sistema.

Soluzione

A Scegliendo come variabili di stato $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ il sistema in forma di stato risulta

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{\Delta} [-2(2KJ_2 + M_2l_1l_2K)x_1 + 2(M_2l_1l_2K + 2KJ_2)x_2 - 2M_1gl_1J_2 \sin x_1 + 4J_2\tau] \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{\Delta} [(2M_2l_1l_2K + 4KJ_1 + 4KM_2l_1^2)x_1 - (2M_2l_1l_2K + 4KM_2l_1^2 + 4KJ_1)x_2] - \\ &\quad \frac{1}{\Delta} [M_2M_1l_1^2l_2g \sin x_1 - 2M_2l_1l_2\tau] \end{aligned}$$

dove $\Delta = -M_2^2l_1^2l_2^2 + 4J_2J_1 + 4J_2M_2l_1^2$. L'unico equilibrio compatibile con la condizione $\bar{\theta}_1 = \bar{x}_1 = \pi$ è in $\bar{x}_2 \equiv \pi, \bar{x}_3 \equiv 0, \bar{x}_4 \equiv 0$, con ingresso pari di equilibrio pari a $\bar{\tau} = 0$. Analizzando il sistema non lineare in forma di stato ed il punto di equilibrio imposto, è possibile notare che il braccio è in configurazione di "pendolo inverso". In tale configurazione, la forza peso non esercita alcun momento sul sistema, essendo interamente assorbita dalla cerniera attorno alla quale ruota il primo link (e.g. $\bar{\tau} = 0$). La forza peso, d'altronde, ha un effetto destabilizzante sul sistema: si intuisce facilmente che una piccola perturbazione attorno al punto di equilibrio porta il sistema verso l'altra configurazione di equilibrio stabile (e.g. $\bar{x}_1 \equiv \bar{x}_2 \equiv \bar{x}_3 \equiv \bar{x}_4 \equiv \bar{\tau} \equiv 0$). Si conclude pertanto che il punto di equilibrio scelto per il sistema è instabile.

B Traslando il sistema non lineare nelle nuove variabili di stato $z = x - \bar{x}$, si ottiene un sistema equivalente, con equilibrio nell'origine, con una dinamica identica alla precedente ma con il solo termine dovuto al $\sin z_1 = \sin(x_1 - \pi)$ cambiato di segno. A questo punto è possibile linearizzare il sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\Delta} [-2(M_2l_1l_2K + 2KJ_2) + 2M_1gl_1J_2] & \frac{1}{\Delta} 2(2KJ_2 + M_2l_1l_2K) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta} [2(2KJ_1 + M_2l_1l_2K + 2KM_2l_1^2) - M_1M_2l_1^2l_2g] & -\frac{1}{\Delta} 2(2KM_2l_1^2 + M_2l_1l_2K + 2KJ_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\Delta} 4J_2 \\ -\frac{1}{\Delta} 2M_2l_1l_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici e calcolando il rango della matrice di raggiungibilità per l'ingresso τ ($R = [B, AB, A^2B, A^3B]$) si ottiene che il sistema è completamente raggiungibile. Alternativamente, usando il comando Matlab `rank(ctrb(A,B))` si ottiene subito che la matrice di controllabilità ha rango pieno e pari a 4. Il risultato ottenuto è di facile interpretazione fisica: il sistema è infatti in grado di raggiungere qualsiasi configurazione (e.g. posizione e velocità angolare) in un tempo arbitrariamente piccolo. Questa analisi ha validità solo per questo modello, in quanto il sistema reale avrà delle non linearità sull'attuazione (tipicamente delle saturazioni) che pongono un vincolo non lineare alla coppia a disposizione del controllista.

Nel caso di sistema co-locato (uscita $y = \theta_1 = z_1$) si ha ovviamente $\mathbf{C}_{z_1} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$, da cui si ottiene una matrice di osservabilità

$$O_{z_1} = \begin{bmatrix} C_{z_1} \\ C_{z_1}A \\ C_{z_1}A^2 \\ C_{z_1}A^3 \end{bmatrix}$$

a rango pieno, quindi il sistema sarà completamente osservabile. Alternativamente, usando il comando Matlab `rank(ctrb(A',C'))`, equivalente a `rank(observ(A,C))`, si ottiene subito che la matrice di osservabilità ha rango pieno e pari a 4.

Nel caso di sistema non co-locato (uscita $y = \theta_2 = z_2$) si ha $\mathbf{C}_{z_2} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$, da cui si ottiene ancora una volta una matrice di osservabilità a rango pieno, confermando la completa osservabilità del sistema anche in questo secondo caso.

Si noti come la proprietà di osservabilità si mantiene nel passaggio da co-locato a non co-locato, andando infatti solo a modificare la posizione degli zeri, ma lasciando invariata la posizione dei poli. Il passaggio da sistema co-locato a non co-locato evita inoltre la cancellazione polo/zero responsabile della perdita di osservabilità.

C) Il primo sistema ha f.d.t.

$$G_{z_1}(s) = \mathbf{C}_{z_1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = 25 \frac{(s^2 + 60000)}{5s^4 + 974804s^2 - 11760000}$$

con poli in ± 3.473 e in $\pm j441.59$ e zeri $\pm j244.95$ (si veda la figura 2).

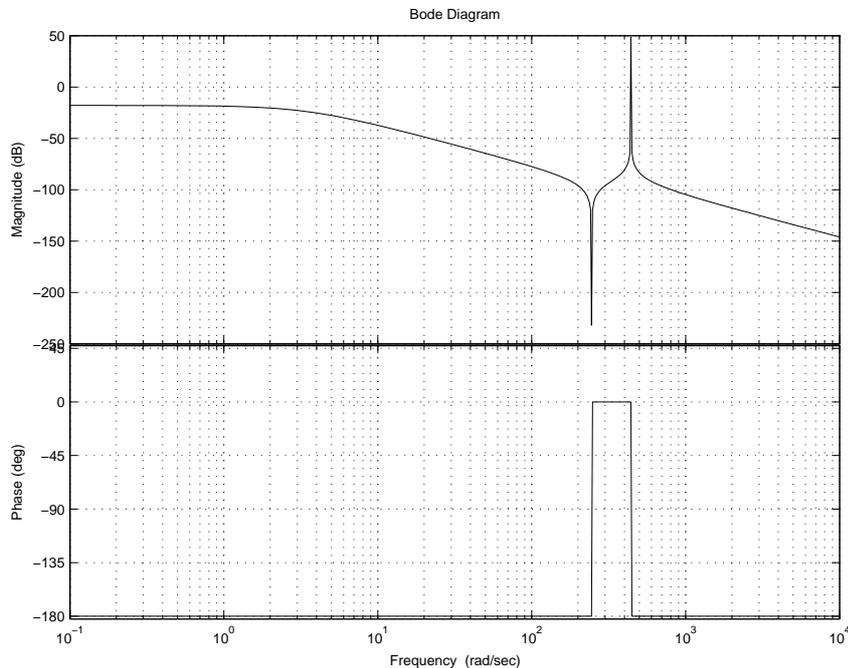


Figure 2: Funzione di trasferimento del sistema co-locato.

Il sistema con uscita $y = z_2$ ha invece f.d.t.

$$G_{z_2}(s) = \mathbf{C}_{z_2}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = -50 \frac{-30000 + s^2}{5s^4 + 974804s^2 - 11760000}$$

che ha ovviamente gli stessi poli del precedente (avendo la stessa matrice dinamica A e nessuna cancellazione), ma ha stavolta due zeri reali in ± 173.2 (si veda la figura 3). Il significato fisico dei due zeri reali, di cui uno positivo, è interpretabile fisicamente una volta che si consideri il sistema non co-locato. In tal caso il sensore è posizionato a valle della costante elastica, elemento che accumula energia. Se il sistema originario fosse stato già stabile, ponendo un ingresso al gradino si sarebbe notato in questo secondo caso un ritardo in controfase nella risposta stessa, dovuto all'accumulo di energia sul giunto elastico.

D) Si applichi la tecnica di progetto del regolatore nello spazio di stato allo scopo di ottenere un sistema stabile.

Con il piazzamento dei poli a ciclo chiuso è possibile contestualmente cercare di rispettare eventuali specifiche di progetto. Se il sistema in anello chiuso deve inseguire riferimenti (ovvero reiettare disturbi) costanti con errore nullo, la catena composta dal compensatore più il sistema deve contenere uno o più poli nell'origine. Il sistema non ha poli nell'origine, pertanto è necessario piazzare un polo nell'origine del compensatore. Si prenda dunque un nuovo impianto che contenga l'integratore in serie col comando `zsys=series(sys,tf(1,[1 0]))`, e si applichi poi la sintesi del regolatore tenendo conto dell'aumentato numero di stati.

Per la determinazione della retroazione K in grado di allocare i poli per la stabilizzazione del sistema si utilizza la tecnica di controllo ottimo LQR . In particolare, utilizzando la funzione di Matlab `[K,s,p] = lqry(sys,1000,1)` è possibile ottenere il vettore di retroazione K che piazza i poli in p . Il comando `lqry(sys,Q,R)` ricava un vettore di retroazione degli stati K in grado di rendere asintoticamente stabile il sistema sys secondo un funzionale di costo

$$J = \int y'Qy + u'Rudt$$

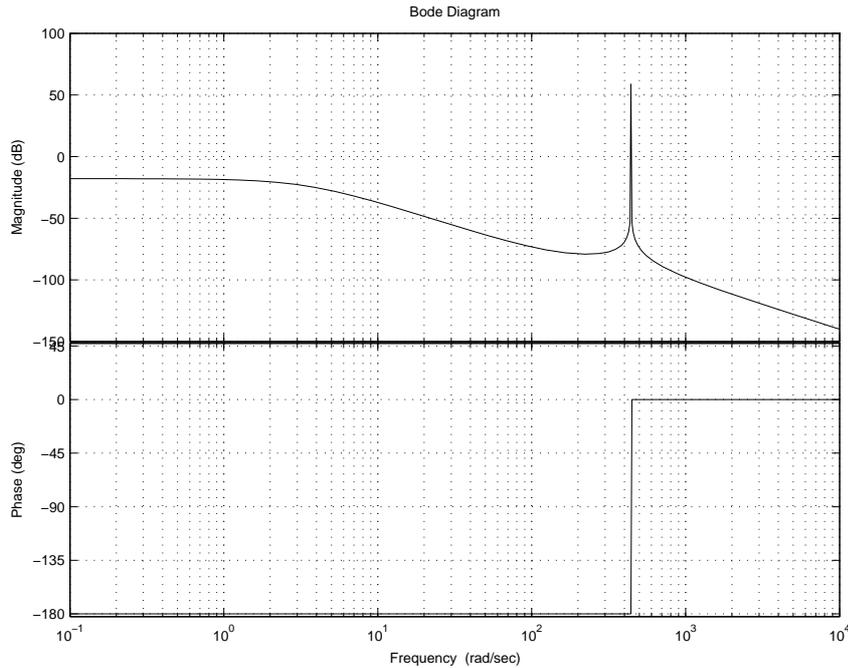


Figure 3: Funzione di trasferimento del sistema non co-localo.

laddove, come di consueto, si sia indicato con y l'uscita del sistema e con u il corrispondente ingresso. Nel nostro caso, il sistema è SISO, quindi Q ed R , che sono in generale matrici di peso, sono due scalari. La nostra scelta pesa in modo assai maggiore l'uscita rispetto alla spesa per il controllo: si ottiene così un sistema performante a discapito di controlli dispendiosi. Il risultato ottenuto con questa tecnica è così un vettore pari a $K = [31.6228 \ 22.3516 \ 6.7045 \ 4.7272 \ 1.4180]$ che piazza i poli in $p = 10^2[-2810^{-5} + 4.4156i - 2810^{-5} - 4.4156i - 0.0473 - 0.0236 + 0.0217i - 0.0236 - 0.0217i]$ mediante la retroazione $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$. Per quanto riguarda l'osservatore, la scelta più ovvia è quella di prendere dei poli che diano una dinamica più veloce a quest'ultimo rispetto alla retroazione degli stati, in particolare è stato scelto di allocare i poli in $q = 10 * p$. Il valore della matrice L di iniezione delle uscite sugli stati che pone gli autovalori di $A - LC$ in q , calcolato mediante il comando $L = \text{transpose}(\text{acker}(A', C', q))$, è dato da $\mathbf{L} = 10^9[0.00000009 \ 0.0193 - 0.0629 \ 1.8252 - 6.0631]^T$. Il compensatore basato sul regolatore appena progettato si costruisce col comando $\text{rzs} = \text{reg}(\text{zsys}, K, L)$. Il polo nell'origine sarà in ultima istanza implementato nel regolatore stesso, che risulterà pertanto dato da $\text{rzzs} = \text{series}(\text{rzs}, \text{tf}(1, [1 \ 0]))$. Per ottenere il sistema linearizzato regolato in catena chiusa può essere rapidamente ottenuto con il comando $\text{fzsys} = \text{feedback}(\text{series}(\text{rzzs}, \text{sys}), 1, +1)$. A tal proposito si riporta in figura 4 la risposta al gradino del sistema ottenuto. Si noti come la retroazione positiva ottenuta con il regolatore porti il sistema a regime verso il riferimento -1 .

In alternativa al regolatore, il progetto di un controllore potrebbe essere affrontato direttamente anche sul luogo delle radici mediante un controllore stabilizzante che verifichi anche la specifica sulla risposta al gradino. Inserendo una coppia di zeri in bassa frequenza, ad esempio in -2 e -1 per aumentare il guadagno e la fase, più due poli, uno nell'origine per la specifica sul gradino ed uno ad alta frequenza in -3000 per la causalità del controllore, ed aumentando il guadagno per ottenere una più elevata banda passante e quindi un sistema più pronto, si ottiene il controllore (in forma di Bode)

$$C_1(s) = 450 \frac{\left(\frac{s}{2} + 1\right)(s + 1)}{s \left(\frac{s}{3000} + 1\right)}$$

grazie al quale si ottiene il guadagno di anello riportato in figura 5. La risposta al gradino corrispondente è invece riportata in figura 6.

E Uno schema Simulink del sistema stabilizzato e' riportata in 7.

Il blocco Simulink *Matlab Function* contiene la seguente funzione:

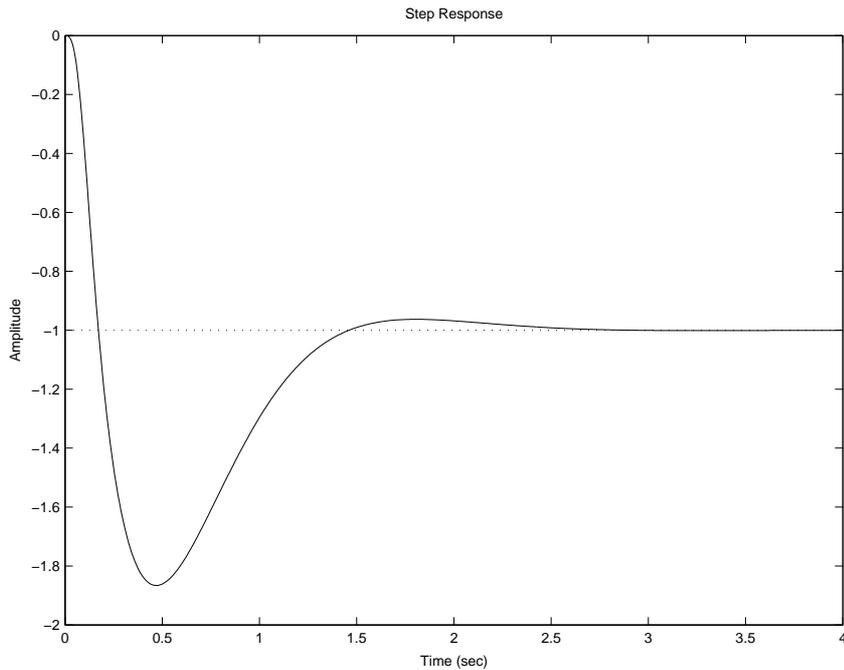


Figure 4: Risposta a gradino del sistema reformato.

```
function out = DinamicaNonLineare(in)

% Parametri del sistema
J1 = 0.08;
J2 = 0.05;
K = 3000;
g = 9.8;
M1 = 2;
M2 = 0.5;
l1 = 0.8;
l2 = 0.5;

% Variabili di stato
z_1 = in(1);
z_2 = in(2);
z_3 = in(3);
z_4 = in(4);

% Ingresso
u = in(5);

% Sistema non lineare traslato con equilibrio nell'origine
Delta = -M2^2 * l1^2 * l2^2 + 4 * J2 * J1 + 4 * J2 * M2 * l1^2;
out(1) = z_3;
out(2) = z_4;
out(3) = 1/Delta * (-2*(2*K*J2 + M2*l1*l2*K)*z_1 + 2*(M2*l1*l2*K +
2*K*J2)*z_2 + 2*M1*g*l1*J2*sin(z_1) + 4*J2*u);
out(4) = 1/Delta * ( (2*M2*l1*l2*K + 4*K*J1 + 4*K*M2*l1^2)*z_1 -
(2*M2*l1*l2*K + 4*K*M2*l1^2 + 4*K*J1)*z_2 + M2*M1*l1^2*l2*g*sin(z_1) - 2*M2*l1*l2*u);
```

mentre il blocco *State-Space* contiene le matrici del regolatore precedentemente progettato.

F Il sistema linearizzato ottenuto è $fzsys = feedback(series(rzsys, sys), 1, +1)$. La matrice dinamica $\mathbf{A}_f \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ di questo sistema (che si può ottenere con il comando $[A_f, B_f, C_f, D_f] = ssdata(fzsys)$)

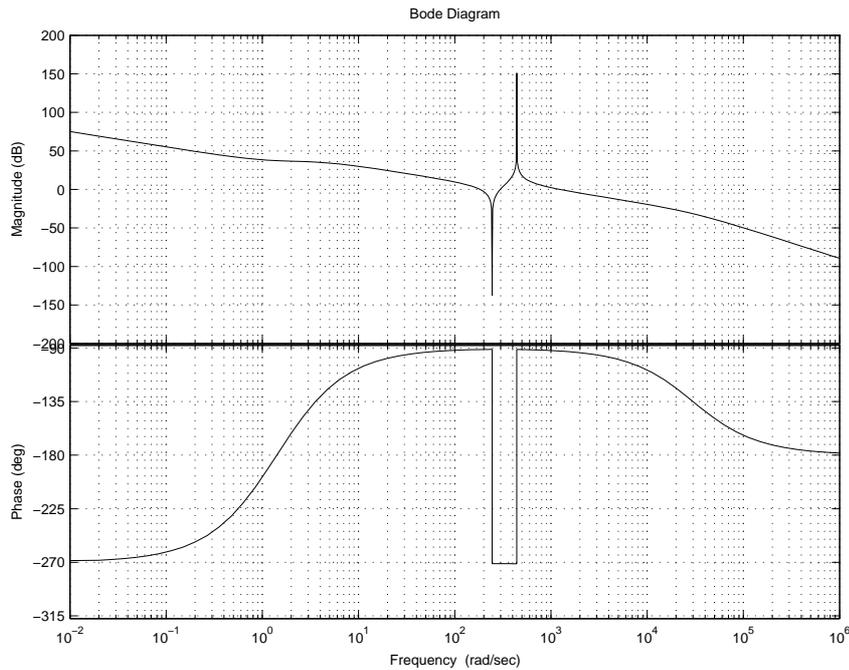


Figure 5: Diagramma di Bode del guadagno di anello del sistema controllato con la tecnica del luogo delle radici.

avrà gli autovalori nelle locazioni scelte in precedenza (si veda il punto **D**). Per il sistema linearizzato, si può agevolmente trovare una funzione di Lyapunov del tipo $V_Q = \mathbf{z}^T \mathbf{P}_Q \mathbf{z}$, con \mathbf{P}_Q soluzione della equazione di Lyapunov $\mathbf{P}_Q \mathbf{A}_f + \mathbf{A}_f^T \mathbf{P}_Q = -\mathbf{Q}$ (ad esempio col comando `Pq=lyap(Af',Q)`), per qualche \mathbf{Q} simmetrica positiva definita.

Per stimare (per difetto) la regione di asintotica stabilità del sistema nonlineare stabilizzato, si deve quindi valutare la regione in cui vale la disequazione $\dot{V}_Q = -\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + 2\mathbf{z}^T \mathbf{P}_Q \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) < 0$, e trovare la più grande curva di livello di V_Q interamente contenuta in quella regione. La disequazione può essere studiata numericamente generando numeri casualmente distribuiti sulla curva $V_Q = R$ e guardando al segno di \dot{V}_Q al variare di R , ad esempio con la semplice procedura

```
function evalvdot(P,Q,R)
M=inv(sqrtm(P));
for i=1:1:500000          % Numero di tentativi casuali
x = (rand(8,1)-0.5);
y=sqrt(R)*x/norm(x);    % Vettore di direzione random e lunghezza sqrt(R)
z=M*y;                  % Punto random sulla curva di livello
vdot=-z'*Q*z+2*z'*P*f(z);
if vdot > 0
disp('Punto forse esterno alla R.A.S.!'),
break;
end
end
end
```

Una volta ottenuta la prima stima è possibile andare a scegliere una nuova funzione di Lyapunov modificando opportunamente la matrice Q , ad esempio con

```
m = 10;
Q = zeros(m);
for j = 1:m
x = 100*(rand(m,1) - 0.5);
Q(j:m,j) = x(j:m);
end
```

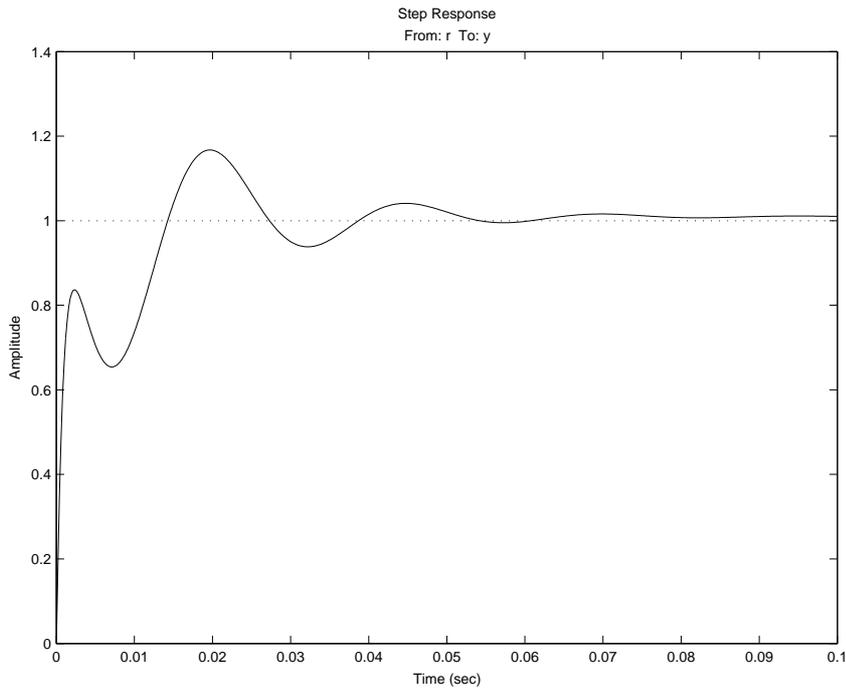


Figure 6: Risposta al gradino del sistema controllato con C_1 , ottenuto con il metodo del luogo delle radici.

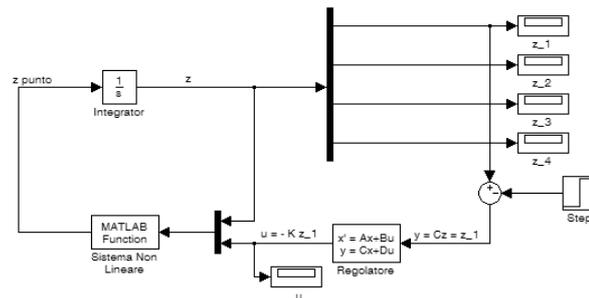


Figure 7: Schema a blocchi per la simulazione

$$Q = (Q*Q')/2;$$

$$Pq = \text{lyap}(Af', Q);$$

e ripetendo la procedura riportata precedentemente. Una stima della regione di asintotica stabilità per il sistema in esame è riportata in figura 8.

G Dato che il sistema regolato è asintoticamente stabile, è possibile applicare il *Teorema della Risposta Armonica*. Ponendo dunque in ingresso al sistema una oscillazione $A \sin(\bar{\omega}t)$, in uscita si otterrà $B \sin(\bar{\omega} + \phi)$ alla stessa frequenza del segnale in ingresso, ma con fase pari alla fase del sistema alla frequenza $\bar{\omega}$ e con una ampiezza $B = A \|G(j\bar{\omega})\|$.

La frequenza della sinusoide in ingresso al sistema regolato, è esattamente pari alla frequenza di oscillazione dei due zeri immaginari puri presenti nella funzione di trasferimento a ciclo chiuso del sistema. Si veda a tal proposito la figura 2 raffigurante i digrammi di Bode del sistema co-locato di partenza, coincidenti con gli zeri presenti a ciclo chiuso, dato che il regolatore modifica i poli del sistema ma lascia invariata la posizione degli zeri. Pertanto, una oscillazione a tale frequenza non è osservabile sulla uscita del sistema. In figura 9 è riportata l'uscita del sistema una volta che si sia posta in ingresso una oscillazione a frequenza $\bar{\omega} = \sqrt{60000}[\text{rad/s}]$ di ampiezza $A = 100[\text{rad}]$.

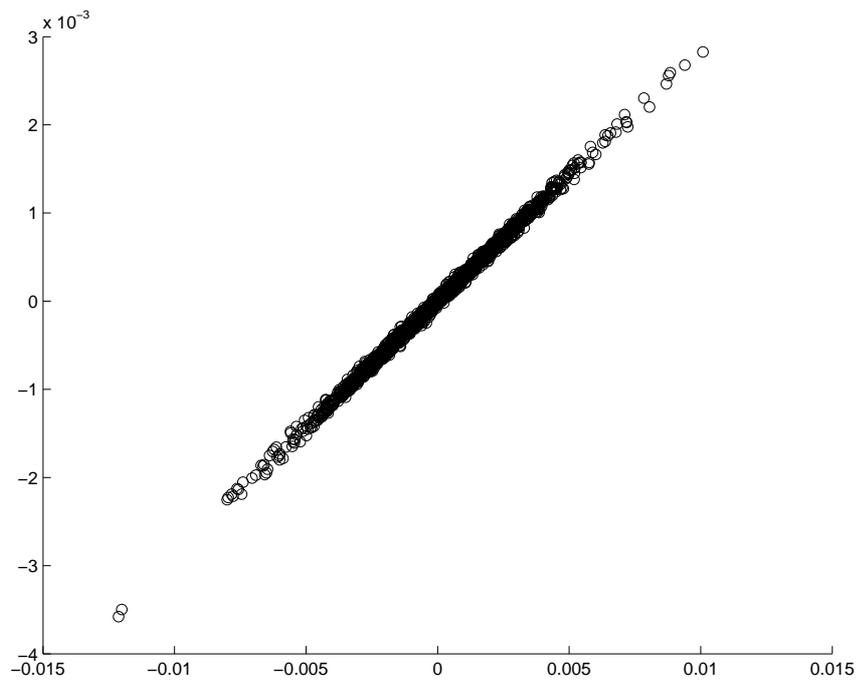


Figure 8: Stima, per difetto, della regione di asintotica stabilità del sistema in esame.

H Rendere inosservabile una oscillazione sul sistema dinamico di partenza, rendere cioè inosservabili due modi del sistema di partenza è possibile se e solo se, per opportuni valori dei parametri, esiste una cancellazione polo/zero. Modificando i parametri del sistema co-locato in modo che rimangano comunque coerenti (escludendo, ad esempio, masse o momenti di inerzia negativi), non è possibile cancellare 2 modi del sistema andando a modificare il piazzamento degli zeri della funzione di trasferimento.

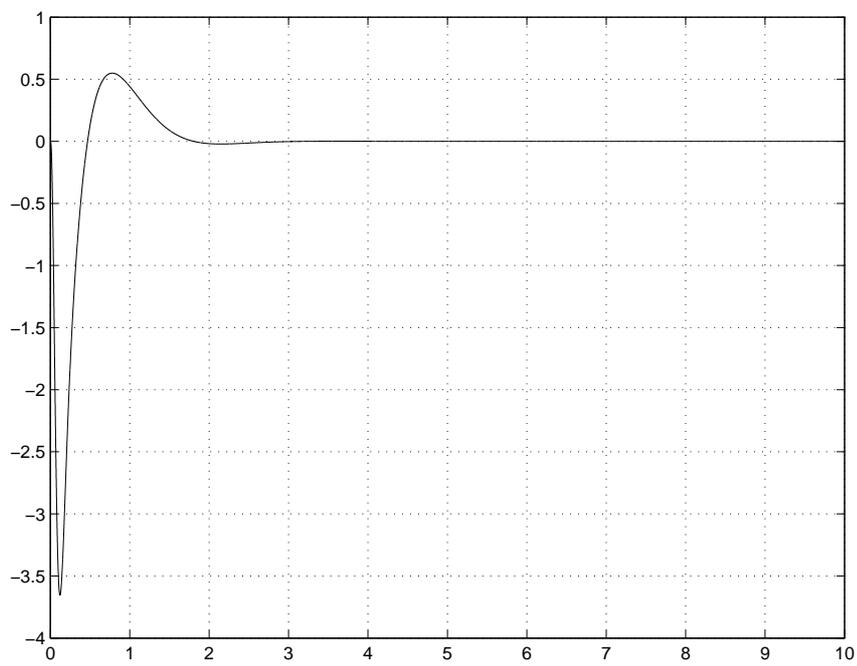


Figure 9: Risposta del sistema regolato ad una sinusoide di frequenza $\bar{\omega} = \sqrt{60000}[rad/s]$ ed ampiezza $A = 100[rad]$.