**Sistemi Automatici — 23 Settembre 2003**

| Numero di matricola | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | – | – | $= 10\alpha - 1$ | $= 10\beta - 1$ | $= 10\gamma - 1$ | – |

Date le equazioni dinamiche

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{x}y + 1 - x + \sin\dot{y} + \tau \\ \ddot{y} = -y + \dot{y}^2 - \dot{y} \end{cases}$$

**A** Si determini il punto di equilibrio del sistema per $\tau = 0$ e si linearizzino le equazioni dinamiche intorno alla condizione di equilibrio trovata.

**B** Si studino la raggiungibilità e la osservabilità del sistema linearizzato con ingresso $\tau$ e con uscita la variabile $x - 1$.

**C** Si progetti un regolatore sul sottosistema raggiungibile e osservabile che usando la misura del valore di uscita $x$, regoli l'ingresso $\tau$ in modo da rendere asintoticamente stabile il sistema linearizzato.

**D** Si descriva in dettaglio una procedura per analizzare la stabilità del sistema ottenuto connettendo il controllore progettato nel punto precedente con il modello nonlineare del sistema, al fine di valutare quali configurazioni iniziali del veicolo possono essere ricondotte al moto specificato dal controllore progettato (stima della regione di asintotica stabilità).

**F** Si effettui una simulazione del sistema ottenuto connettendo il controllore progettato nel punto precedente con il modello nonlineare del sistema, e si cerchi di valutare sperimentalmente la regione di asintotica stabilità.

**Soluzione**

**A** Si considerino le variabili di stato $z_1 = x$, $z_2 = \dot{x}$, $z_3 = y$, $z_4 = \dot{y}$, si ottiene il sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_2 z_3 + 1 - z_1 + \sin z_4 + \tau \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = -z_3 + z_4^2 - z_4 \end{cases}$$

Per trovare il punto di equilibrio deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} 0 = z_2 \\ 0 = z_2 z_3 + 1 - z_1 + \sin z_4 + \tau \\ 0 = z_4 \\ 0 = -z_3 + z_4^2 - z_4 \end{cases}$$

da cui segue che per $\tau = 0$, il punto di equilibrio risulta il punto $(1, 0, 0, 0)$. Si trasli quindi il sistema in modo da portare l'equilibrio nell'origine tramite la trasformazione $x_1 = z_1 - 1$, $x_2 = z_2$, $x_3 = z_3$, $x_4 = z_4$. Il sistema traslato risulta

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 x_3 - x_1 + \sin x_4 + \tau \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -x_3 + x_4^2 - x_4 \end{cases}$$

Linearizzando la dinamica si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & x_3 & x_2 & \cos(x_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

Il linearizzato nel punto di equilibrio risulta

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda l'ingresso si ha

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**B** L'uscita risulta $y = z_1 - 1 = x_1$ e quindi, dato il vettore delle uscite

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la matrice di osservebilità risulta

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Avendo $O$ rango massimo, il sistema risulta completamente osservabile. Il sistema è in forma standard di raggiungibilità, il sottosistema raggiungibile è dato dal sistema con variabili di stato $(x_1, x_2)$. Infatti la matrice di raggiungibilità risulta:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**C** Si noti che gli autovalori non raggiungibili ($-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$) sono a parte reale negativa e quindi asintoticamente stabili. Il regolatore si può quindi progettare sul sottosistema raggiungibile e osservabile rappresentato dalle matrici

$$A_{ro} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_{ro} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$C_{ro} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Il progetto di un controllore stabilizzante può essere fatto usando le tecniche classiche (su Bode o sul luogo delle radici), ovvero con facilità mediante la tecnica del regolatore.

Scegliamo ad esempio di porre gli autovalori in anello chiuso in $p = [-1, \; -1]$, in modo da avere una risposta con piccola sovraelongazione per ingressi a gradino. La retroazione che alloca i poli di $\mathbf{A}_{ro} - \mathbf{B}_{ro}\mathbf{K}_{ro}$ nelle posizioni desiderate è data da $\mathbf{K}_{ro} = [0 \; 2]$, come si trova facilmente col comando `K=acker(Aro,Bro,p)` di `Matlab`.

I poli dell'osservatore possono essere posti ad esempio in $q = [-1, \; -1]$. Il valore della matrice $\mathbf{L}_{ro}$ di iniezione delle uscite sugli stati che pone gli autovalori di $\mathbf{A}_{ro} - \mathbf{L}_{ro}\mathbf{C}_{ro}$ in $q$ calcolato mediante il comando `L=transpose(acker(Aro',Cro',q))` è dato da $\mathbf{L}_{ro} = [2 \; 0]'$.

È fondamentale lavorare con l'intero sistema linearizzato in quanto nelle non linearità della dinamica dei primi due stati rientrano anche gli altri due stati interni al sottospazio non raggiungibile. Si considerino quindi $\mathbf{K} = [0 \; 2 \; 0 \; 0]$ e $\mathbf{L} = [2 \; 0 \; 0 \; 0]'$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato si costruisce col comando `rsys=reg(sys,K,L)` dove `sys=ss(A,B,C,0)`. Nel caso numerico in considerazione, il compensatore risulta dato dalla f.d.t.

$$C(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 5}$$

(si faccia attenzione al fatto che il regolatore costruito con il comando `reg` presuppone retroazione positiva).

**D)** Dalla sintesi del controllore per il sistema linearizzato, sappiamo che il sistema costituito dalla connessione in retroazione del regolatore $C(s)$ con il sistema linearizzato, è asintoticamente stabile.

Possiamo descrivere l'intero sistema con le equazioni

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 x_3 + \sin x_4 - x_4 \\ 0 \\ x_4^2 \end{bmatrix} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}_{reg}; \\ \dot{\mathbf{x}}_{reg} &= \mathbf{A}_{reg}\mathbf{x}_{reg} + \mathbf{B}_{reg}\mathbf{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ovvero, indicando con $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^6$ lo stato complessivo, $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_f\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z})$, con

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{B}_{reg}\mathbf{C} & \mathbf{A}_{reg} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 0 \\ z(2)z(3) + \sin z(4) - z(4) \\ 0 \\ z(4)^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si osservi che questo sistema coincide, per $\tilde{\mathbf{f}}(\cdot) = 0$, col sistema linearizzato stabilizzato. Il sistema linearizzato può essere anche rapidamente ottenuto con il comando
`fsys=feedback(series(rsys,sys),1,+1)`. La matrice dinamica $\mathbf{A}_f \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ di questo sistema (che si può ottenere con il comando `[Af,Bf,Cf,Df]=ssdata(fsys)`) avrà gli autovalori nelle locazioni scelte in precedenza. Per il sistema linearizzato, si può agevolmente trovare una funzione di Lyapunov del tipo $V_Q = \mathbf{z}^T\mathbf{P}_Q\mathbf{z}$, con $\mathbf{P}_Q$ soluzione della equazione di Lyapunov $\mathbf{P}_Q\mathbf{A}_f + \mathbf{A}_f^T\mathbf{P}_Q = -\mathbf{Q}$ (ad esempio col comando `Pq=lyap(Af',Q)`), per qualche $\mathbf{Q}$ simmetrica positiva definita.

Per stimare (per difetto) la regione di asintotica stabilità del sistema nonlineare stabilizzato, si deve quindi valutare la regione in cui vale la disequazione $\dot{V}_Q = -\mathbf{z}^T\mathbf{Q}\mathbf{z} + 2\mathbf{z}^T\mathbf{P}_Q\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) < 0$, e trovare la più

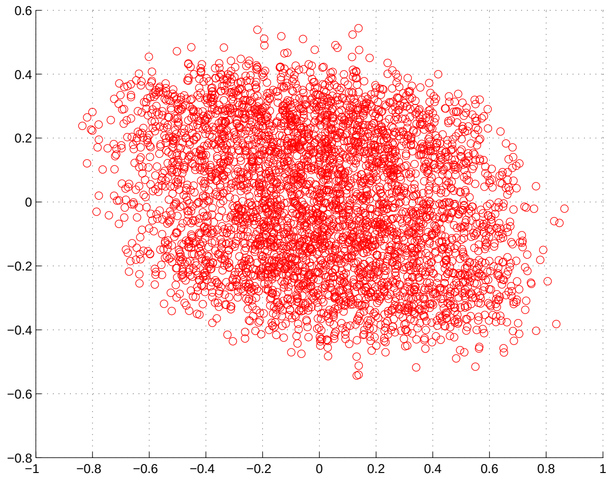


Figure 1: Sezione nel piano $z_2, z_4$ della stima della RAS ottenuta con $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_8$.

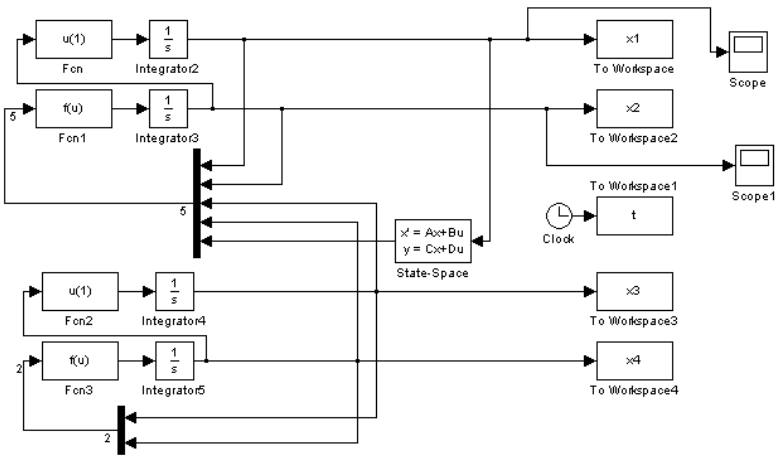


Figure 2: Schema a blocchi per la simulazione

grande curva di livello di $V_Q$ interamente contenuta in quella regione. La disequazione può essere studiata numericamente generando numeri casualmente distribuiti sulla curva $V_Q = R$ e guardando al segno di $\dot{V}_Q$ al variare di $R$, ad esempio con la semplice procedura

```
function evalvdot(P,Q,R)
  M=inv(sqrtm(P));
  for i=1:1:500000          % Numero di tentativi casuali
  x = (rand(8,1)-0.5);
  y=sqrt(R)*x/norm(x);      % Vettore di direzione random e lunghezza sqrt(R)
  z=M*y;                    % Punto random sulla curva di livello
  vdot=-z'*Q*z+2*z'*P*[
 0 z(2)z(3)+sin z(4)-z(4) 0 z(4)^2 0 0 0 0]';
if vdot > 0 disp('Punto forse esterno alla R.A.S.!'), break; end
  end
```

Il risultato della applicazione di questa procedura, con $\mathbf{Q}$ matrice identica e per vari $R$ indica che, con buona probabilità, la regione $\mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} \leq 0.512$ è interna alla regione di asintotica stabilità (si veda il diagramma dei punti trovati fig.**??**). Altre stime possono poi essere trovate unendo alla stima presente altre regioni che si possono ottenere variando $\mathbf{Q}$ e ripetendo la procedura ora descritta.

**F** Uno schema simulink del sistema stabilizzato è riportata in fig.**??**.