Esame di Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici –20– 2–2002

Nome e Cognome:						
Anno di frequenza:						
Numero di matricola						
	–	–	$= \alpha - 1$	$= \beta - 1$	$= \gamma - 1$	$= \delta - 1$

A (pt. 3) Tracciare i diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols relativi al sistema:

$$G(s) = \frac{10^5 (s+\alpha)}{(s+100)(\beta s^2 + 50s + 2000)}$$

indicando i valori nei punti salienti del primo.

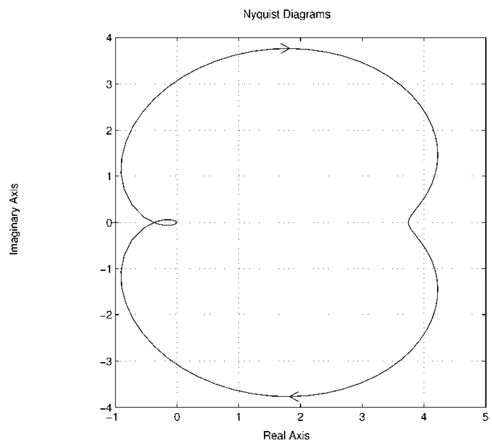
B (pt. 8) Per il sistema di cui al punto **A**, progettare un controllore che realizzi in prima approssimazione le seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino nullo;
- errore a regime alla rampa ≤ 1 %;
- margine di fase $\geq \pi/4$;
- banda passante in anello chiuso compresa tra 300 e 900 rad/sec.

- Data la f.d.t.

$$G(s) = \frac{10(s+15)(s+1)}{(s^2+2s+2)(s+10)^3}$$

la quale ha il diagramma di Nyquist riportato nella figura sottostante.



C (pt. 4) Analizzare se e con quali margini il sistema è stabile in anello chiuso.

D (pt. 4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici nel caso di retroazione unitaria sia negativa che positiva e per guadagni K variabili fra 0 e $+\infty$.

E (pt. 3) Indicare sul primo luogo delle radici ottenuto la zona del piano corrispondente ad una specifica di tempo di assestamento $T_a < 2\gamma$ e di sovraelongazione $S < 5\delta\%$.

- Con riferimento al sistema

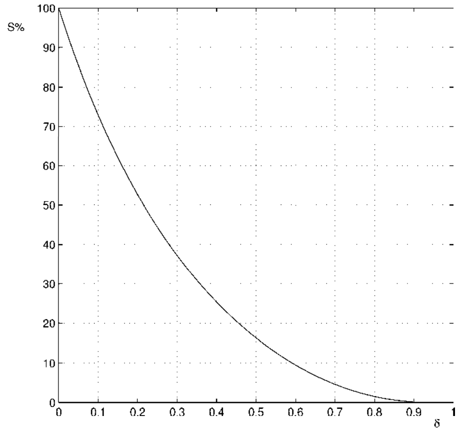
$$\ddot{x} - e^{\gamma \dot{x}} + x = 2u$$

G (pt. 2) Scrivere una realizzazione del sistema nello spazio degli stati.

H (pt. 3) Trovare i punti di equilibrio con ingresso nullo, scrivere le matrici **A** e **B** del modello linearizzato attorno ad essi e studiare la stabilità dell'equilibrio in tali punti.

I (pt. 3) Trovare un ingresso u che renda l'origine unico punto di equlibrio globalmente asintoticamente stabile.

Per la soluzione dell'esercizio **E** puó essere utile la figura seguente:



Soluzione

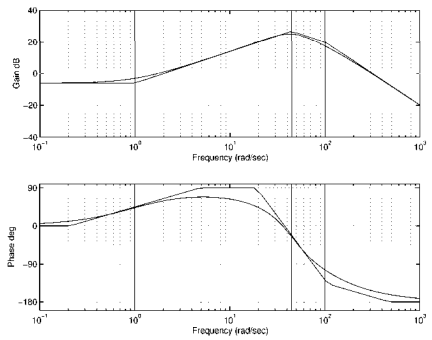
A) Il sistema non è descritto in forma di Bode: per portarlo nella forma di Bode occorre raccogliere un fattore α al numeratore ed i fattori 100 e 2000 rispettivamente nei termini di primo e secondo grado a denominatore, ottenendo:

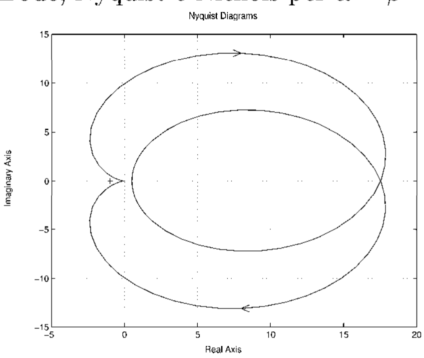
$$G(s) = \frac{\alpha}{2}\frac{(\frac{s}{\alpha}+1)}{(0.01s+1)(\frac{\beta}{2000}s^2+0.025s+1)}$$

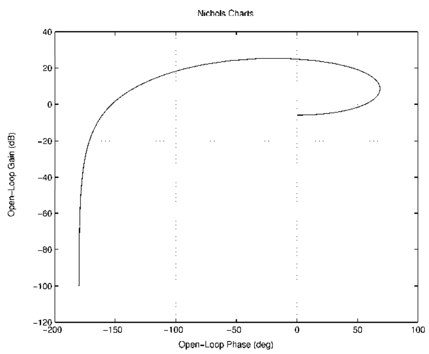
La costante di guadagno statico è $\frac{\alpha}{2}$. Procedendo per pulsazioni crescenti, si trovano i contributi dello zero a pulsazione α rad/sec, della coppia di poli complessi coniugati con pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{\frac{2000}{\beta}}$ rad/sec ($14.14 \leq \omega_n \leq 44.72$ rad/sec) e coefficiente di smorzamento $\zeta = \frac{\omega_n}{80}$ e del polo reale a pulsazione 100 rad/sec. Il sistema è a fase minima, quindi il diagramma delle fasi potrebbe essere interamente dedotto a partire dalla conoscenza del diagramma delle ampiezze mediante la Formula di Bode. In corrispondenza della pulsazione naturale della coppia di poli complessi coniugati, il modulo della risposta armonica é pari a $20\,\mathsf{Log}\,(\frac{\alpha}{2}) + 20(\,\mathsf{Log}\sqrt{\frac{2000}{\beta}} - \,\mathsf{Log}\,\alpha) = 10\,\mathsf{Log}\,\frac{500}{\beta}$ dB. In corrispondenza del polo reale, il modulo della risposta armonica é pari a $10\,\mathsf{Log}\,\frac{500}{\beta} - 20(\,\mathsf{Log}\,100 - \,\mathsf{Log}\sqrt{\frac{2000}{\beta}} = 20\,\mathsf{Log}\,\frac{10}{\beta}$.

Dunque la pulsazione di taglio coincide con la pulsazione del polo reale per $\beta = 10$, mentre per i restanti valori di beta si ottiene risolvendo $40(\,\mathsf{Log}\,\omega_T - \,\mathsf{Log}\,100) = 20\,\mathsf{Log}\,\frac{10}{\beta}$, cioè $\omega_T = 100\sqrt{\frac{10}{\beta}}$ rad/sec.

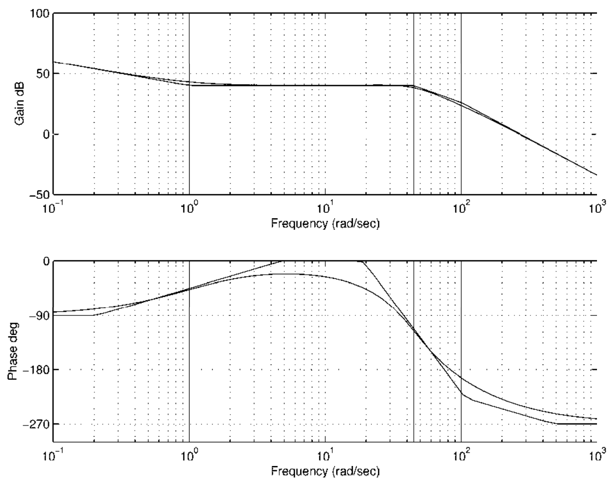
I diagrammi di Nyquist e Nichols sono ottenuti da quello di Bode senza alcuna difficoltà. Le figure seguenti riportano esempi di diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols per $\alpha = \beta = 1$.







B) Poiché il sistema é a fase minima, si può procedere semplicemente con la sintesi sui diagrammi di Bode. Fissiamo un controllore $C(s) = \frac{K}{s^t}C_0(s)$, con $C_0(0) = 1$. Per soddisfare le specifiche statiche è necessario un polo nell'origine, quindi poniamo $t = 1$. La costante K viene determinata in base al requisito sull'errore a regime sulla rampa: tale errore è pari a $\frac{2}{K\alpha}$, quindi occorre che sia $K \geq \frac{200}{\alpha}$. Se scegliamo $K = \frac{200}{\alpha}$, il sistema (dopo la compensazione statica) ha un diagramma di Bode rappresentato nella figura seguente.



In corrispondenza della pulsazione relativa allo zero, il modulo della risposta armonica vale $40 - 20\,\mathsf{Log}\,\alpha$dB e rimane tale fino alla pulsazione naturale dei poli complessi coniugati, pari a $\omega_n = \sqrt{\frac{2000}{\beta}}$ rad/sec. Dopo di che, il diagramma asintotico di ampiezza comincia a scendere con una pendenza pari a -40 dB/dec. Dunque la pulsazione di taglio dista meno di una decade dalla pulsazione naturale dei poli complessi coniugati, in quanto il modulo della risposta armonica in corrispondenza dello zero vale al piú 40 dB e lo zero reale dista meno di una decade da ω_n. In particolare alla pulsazione di 100 rad/sec il modulo della risposta armonica vale $40 - 20\,\mathsf{Log}\,\alpha - 40(\,\mathsf{Log}\,100 - \,\mathsf{Log}\sqrt{\frac{2000}{\beta}}) = 20\,\mathsf{Log}\,\frac{20}{\alpha\beta}$. Dunque si possono fare le seguenti considerazioni circa la pulsazione di taglio ω_T:

- per $\alpha\beta > 20$, $\omega_n < \omega_T < 100$ rad/sec; in particolare, ω_T si ricava risolvendo l'equazione $40 - 20\,\mathsf{Log}\,\alpha = 40(\,\mathsf{Log}\,\omega_T - \,\mathsf{Log}\sqrt{\frac{2000}{\beta}})$, che fornisce $\omega_T = 100\sqrt{\frac{20}{\alpha\beta}}$ rad/sec.
- per $\alpha\beta = 20$ si ha $\omega_T = 100$ rad/sec.
- per $\alpha\beta < 20$, $\omega_T > 100$ rad/sec; in particolare, ω_T si ricava risolvendo l'equazione $20\,\mathsf{Log}\,\frac{20}{\alpha\beta} = 60(\,\mathsf{Log}\,\omega_T - \,\mathsf{Log}\,100)$, che fornisce $\omega_T = 100\left(\frac{20}{\alpha\beta}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Dunque il valore massimo di ω_T si osserva per $\alpha = \beta = 1$ e vale circa 271 rad/sec. Dunque la specifica sulla banda passante non viene comunque rispettata.

Una possibile soluzione consiste nel porre una coppia di zeri complessi coniugati a cancellare la coppia di poli complessi coniugati. Tuttavia questo non é sufficiente, poiché la pulsazione di taglio risulterebbe pari a $\frac{10^4}{\alpha}$, valore che non rientra comunque nei limiti specificati. Occorre dunque introdurre un ulteriore zero a cancellare il polo in -100 rad/sec. Volendo inoltre fare cascare la pulsazione di taglio in 500 rad/sec, conviene porre un polo in 5 rad/sec ed un ulteriore polo in corrispondenza della pulsazione di taglio stessa, cosi' da rispettare anche il requisito sul margine di fase. Avendo tre poli e tre zeri, il controllore é giá causale. Il controllore avrá dunque funzione di trasferimento pari a:

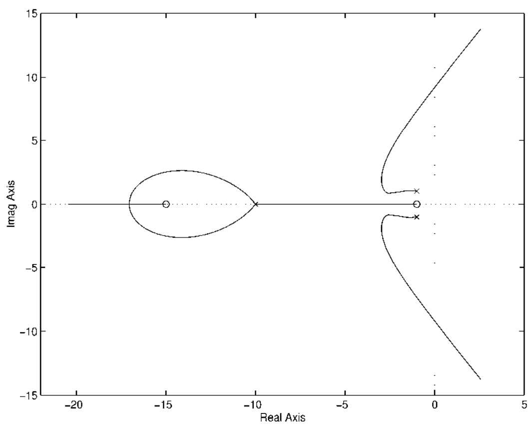
$$C(s) = \frac{200}{\alpha}\frac{(\frac{\beta}{2000}s^2 + 0.025s + 1)(0.01s + 1)}{s(0.2s + 1)(0.002s + 1)}$$

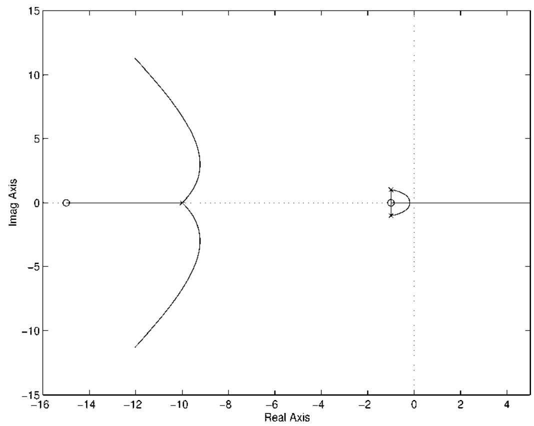
La funzione di trasferimento del sistema compensato é pari a:

$$G(s)C(s) = 100\frac{(\frac{s}{\alpha} + 1)}{s(0.2s + 1)(0.002s + 1)}$$

C) Per il criterio di Nyquist, poichè il sistema in anello aperto è asintoticamente stabile ed il luogo non circonda il punto -1, il sistema è stabile anche in anello chiuso. Poiché il luogo interseca l'asse reale negativo all'incirca nel valore -0.4, il margine di ampiezza è pari a $\frac{1}{0.4} = 2.5$ ossia circa 3 dB. Inoltre il luogo interseca il cerchio di raggio unitario a circa $-145°$, quindi il margine di fase è pari a circa $35°$.

D) L'eccesso poli–zeri é pari a 3, per cui il luogo presenta 3 asintoti. Nel caso di retroazione negativa tali asintoti sono inclinati rispetto al semiasse reale positivo di angoli pari a $\frac{\pi}{3}$, π e $-\frac{\pi}{3}$ radianti rispettivamente; nel caso di retroazione positiva sono inclinati di angoli pari a 0, $\frac{2\pi}{3}$ e $-\frac{2\pi}{3}$. Gli asintoti si intersecano nel punto dell'asse reale di ascissa pari a 16/3. Nelle figure seguenti sono riportati i luoghi richiesti.





E) Per rispettare la specifica sul tempo di assestamento, occorre che i poli giacciano a sinistra della retta $x = -\frac{3}{2\gamma}$. Inoltre se deve essere $S < 5\delta$, dall'ispezione visiva della curva che esprime la relazione fra il coefficiente di smorzamento e la massima sovraelongazione si ottiene un valore limite ζ_{min} del coefficiente di smorzamento dei poli. Sia $\theta = \arccos \zeta_{min}$, la specifica sulla massima sovrelongazione percentuale si ottiene imponendo che tutti i poli giacciano nella porzione del semipiano a parte reale negativa compreso fra due semirette che partono dall'origine e sono inclinate rispetto al semiasse reale negativo di angoli pari a $\pm\theta$.

G) Ponendo $z_1 = x$ e $z_2 = \dot{x}$ si ottiene la rappresentazione nello spazio degli stati

$$\begin{aligned} \dot{z_1} &= z_2 \\ \dot{z_2} &= -z_1 + e^{\gamma z_2} + 2u \end{aligned}$$

H) Esiste un unico punto di equilibrio per $z_1 = 1$ e $z_2 = 0$. Per studiare la stabilitá di tale equilibrio si puó utilizzare il metodo indiretto di Lyapunov. Le matrici del modello linearizzato sono:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \gamma \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nel punto di equilibrio, la matrice $\mathbf{A}$ ha autovalori dati dalla relazione $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4}\right)$. Per $\gamma \leq 2$, tali autovalori risultano reali e positivi, altrimenti sono complessi coniugati con parte reale positiva; quindi, in ogni caso, l'equilibrio risulta instabile.

I) L'origine non é punto di equilibrio del sistema; l'ingresso richiesto puó essere scomposto nella somma di sue termini $u = u_1 + u_2$, il primo dei quali serve a rendere l'origine punto di equilibrio, mentre il secondo serve a rendere l'equilibrio globalmente asintoticamente stabile. Ponendo $u_1 = -e^{\gamma z_2}$ si ottiene che l'origine diventa unico punto di equilibrio ed inoltre il sistema risulta lineare. Per rendere l'equilibrio asintoticamente stabile occorre allocarne i poli nel semipiano a parte reale negativa, e ció puó essere fatto tramite un secondo termine dell'ingresso nella forma $u_2 = az_1 + bz_2$, con le costanti a e b scelte in maniera opportuna.