Esame di Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici – 27–6–2001

Nome e Cognome:						
Anno di frequenza:						
Numero di matricola						
	–	–	$= \alpha - 1$	$= \beta - 1$	$= \gamma - 1$	$= \delta - 1$

A (pt. 3) Tracciare i diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols relativi al sistema:

$$G(s) = \frac{10}{(2\alpha s + 1)^2(0.001\beta s + 1)}$$

indicando il valore della pulsazione di taglio della approssimazione asintotica del primo.

B (pt. 8) Per il sistema di cui al punto **A**, progettare un controllore che realizzi in prima approssimazione le seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino nullo;
- errore a regime alla rampa ≤ 1;
- margine di fase $\geq \pi/4$;
- banda passante in anello chiuso compresa tra 200 e 2000 rad/sec.

- Dato il sistema tempo-discreto caratterizzato dalla seguente f.d.t.:

$$G(z) = \frac{z + \gamma}{(z^2 + z + 1)(z - 0.05\delta)}$$

C (pt. 3) Scrivere le matrici **A**, **B**, **C**, **D** di una realizzazione nello spazio degli stati, e discuterne la stabilità;

D (pt. 4) Descrivere graficamente l'evoluzione temporale dei modi del sistema e della risposta al gradino.

E-V (pt. 4) Trovare la risposta a regime del sistema

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 0.1s + 1}$$

sottoposto ad un ingresso permanente $u = \sin(t) + 2\cos(3t)$, $t > 0$.

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= \sin^2(x_1 + \alpha) + x_2 + u \\ \dot{x_2} &= (x_1 + \alpha) - x_2^3 \end{cases}$$

F (pt. 4) Trovare i punti di equilibrio con ingresso nullo discutendone la stabilità;

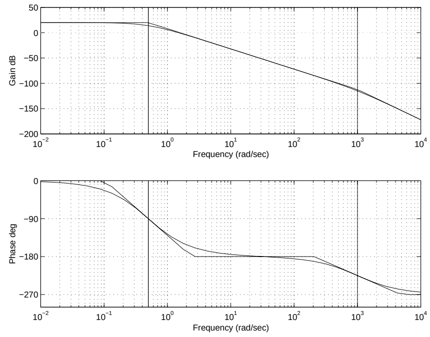
G-N (pt. 4) Trovare una legge di retroazione $u = u(x)$ tale che il sistema dato risulti globalmente asintoticamente stabile;

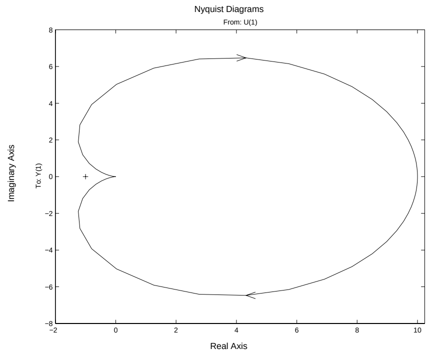
H (pt. 5) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici per il sistema $G(s) = \frac{Ks}{(s+\beta)^2(s^2+s+10)}$ per guadagni K variabili fra 0 e $+\infty$ nel caso di retroazione unitaria sia negativa che positiva.

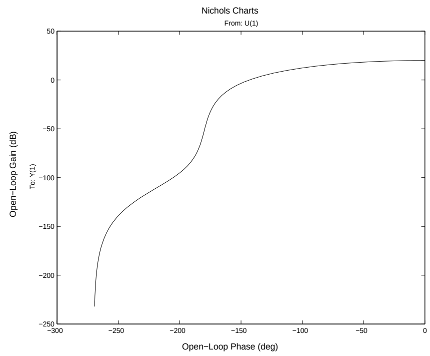
Soluzione

A) Il sistema è già descritto in forma di Bode. La costante di guadagno statico è 10 (quindi il contributo in ampiezza è di $20db$. Procedendo per pulsazioni crescenti, si trovano i contributi di uno polo doppio in $-1/2\alpha$, e di un polo in $-1000/\beta$. Il sistema è a fase minima, per cui il diagramma delle fasi potrebbe essere interamente dedotto a partire dalla conoscenza del diagramma delle ampiezze mediante la Formula di Bode. La pulsazione di taglio si ottiene risolvendo $20 = 40(\mathsf{Log}\,\omega_T - \mathsf{Log}\,\frac{1000}{\beta})$, cioè $\omega_T = \sqrt(10)\frac{1}{2\alpha}$.

I diagrammi di Nyquist e Nichols sono ottenuti da quello di Bode senza alcuna difficoltà. Le figure seguenti riportano esempi di diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols per $\alpha = \beta = 1$.

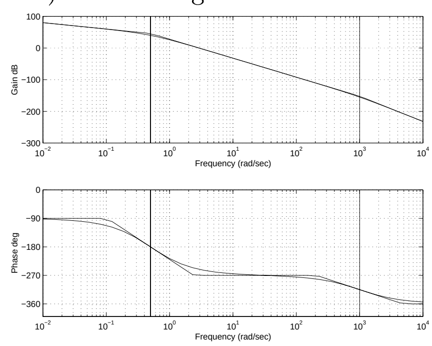






B) Poiché il sistema é a fase minima, si puo' procedere semplicemente con la sintesi sui diagrammi di Bode. Fissiamo un controllore $C(s) = \frac{K}{s^t}C_0(s)$, con $C_0(0) = 1$. Per le specifiche statiche è richiesto un polo semplice nell'origine, quindi poniamo $t = 1$. La costante K viene determinata in base al requisito sull'errore a regime sulla rampa: tale errore è pari a $\frac{1}{10K}$, quindi occorre che sia $K \geq 10$. Scegliamo $K = 10$.

Il sistema (dopo la compensazione statica) ha un diagramma di Bode rappresentato nella figura seguente.



La pulsazione di taglio ω'_T si trova perció adesso sempre nel tratto a pendenza -3. Se il controllore ha due zeri in corrispondenza del polo $-\frac{1}{2\alpha}$, la pendenza in corrispondenza della pulsazione di taglio diventa -1, ed é quindi compatibile con il margine di fase, ma la pulsazione di taglio risulta pari a 100 rad/sec. Occorre dunque un azione anticipatrice, ottenuta tramite l'introduzione di una coppia zero–polo che sposti a destra la frequenza di taglio. Per $\beta < 5$ si puó scegliere come frequenza di taglio proprio quella corrispondente al polo preesistente $-\frac{1000}{\beta}$ e dunque porre lo zero in -10 ed il polo in $-\frac{100}{\beta}$, ottenendo in corrispondenza della pulsazione di taglio il caratteristico "ginocchio," ovvero il passaggio dalla pendenza -1 alla pendenza -2, cui corrisponde il margine di fase richiesto. Se $\beta \geq 5$, $100 \leq \frac{1000}{\beta} \leq 200$; introducendo comunque uno zero in -10, si ha che la frequenza di taglio si sposta in $1000 \leq \frac{10000}{\beta} \leq 2000$ ed in tale pulsazione si puó collocare un polo in modo da formare comunque il "ginocchio." In entrambe le soluzioni, per rendere fisicamente realizzabile il controllore, manca un ulteriore polo, che puó essere collocato in alta frequenza, per esempio in -50000. Il controllore avrá dunque per $\beta < 5$ funzione di trasferimento pari a

$$C(s) = 10\frac{(2\alpha s + 1)^2(0.1s + 1)}{s(0.01\beta s + 1)(0.00002s + 1)}$$

mentre per $\beta \geq 5$ si ha:

$$C(s) = 10\frac{(2\alpha s + 1)^2(0.1s + 1)}{s(0.0001\beta s + 1)(0.00002s + 1)}$$

C) Non essendovi alcuna cancellazione nella f.d.t., la realizzazione minima avra' dimensione 3. Esprimendo la funzione di trasferimento nella forma

$$G(z) = \frac{z + \gamma}{z^3 + (1 - 0.05\delta)z^2 + (1 - 0.05\delta)z - 0.05\delta}$$

si puó scrivere una rappresentazione di stato in forma canonica di controllo, ossia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.05\delta & 0.05\delta - 1 & 0.05\delta - 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

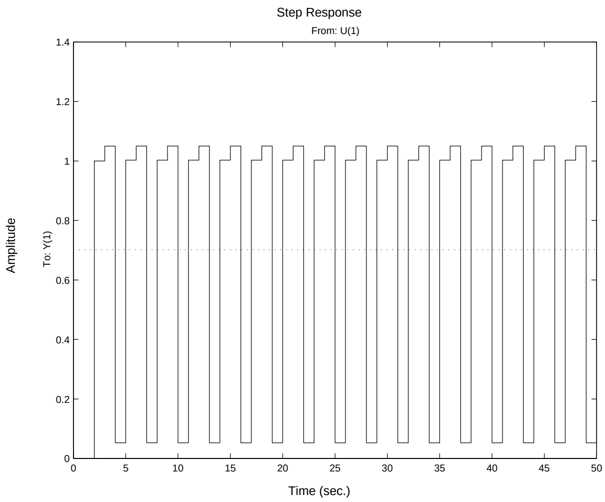
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = 0$$

che ovviamente risulterà sia raggiungibile che osservabile. Il sistema presenta un polo reale negativo in -0.05δ ed una coppia di poli complessi coniugati in $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i2\pi/3}$. Il primo polo ha modulo minore di 1, mentre i poli complessi coniugati hanno modulo unitario. Pertanto il sistema é marginalmente stabile.

D) I modi del sistema sono $(-0.05\delta)^t$, che corrisponde al polo reale, $\sin(\frac{2\pi}{3}t)$ e $\cos(\frac{2\pi}{3}t)$, che corrispondono ai poli complessi coniugati. Per la risposta al gradino, essendo l'eccesso poli–zeri pari a 2, i primi 2 campioni $y(0)$ e $y(1)$ della risposta al gradino sono nulli. Inoltre la risposta al gradino presenta un termine costante pari a $G(1) \simeq 0.7$. Vi compare inoltre un termine esponenziale decrescente dovuto al polo reale ed un oscillazione non smorzata dovuta ai poli complessi coniugati. Applicando lo sviluppo di Heaviside per l'antitrasformazione di $Y(z) = \frac{G(z)z}{z-1}$ si ottiene, nel caso $\gamma = \delta = 1$, la seguente espressione:

$$y(t) = 0.701 + 1.012 * (0.05)^t + 0.323\cos(\frac{2\pi}{3}t + 0.291)$$

cui corrisponde il grafico riportato nella figura seguente:



E-V Si tratta semplicemente di trovare la risposta armonica per le pulsazioni coinvolte. Calcolando $G(\jmath 1) = 20 - \jmath 10$, e $G(\jmath 3) = -0.1 - \jmath 0.75$, si trova $y_r(t) = 22.37\sin(t - 0.46) + 0.76\cos(3t - 1.70)$.

F) Esiste un unico punto di equilibrio nel punto $(x_1, x_2) = (-\alpha, 0)$. Per studiare la stabilità di tale equilibrio, conviene porre $z_1 = x_1 + \alpha$ e $z_2 = x_2$ e studiare la stabilità nell'origine con ingresso nullo del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{z_1} &= \sin^2(z_1) + z_2 + u \\ \dot{z_2} &= z_1 - z_2^3 \end{cases}$$

Per studiare la stabilità dell'equilibrio utilizziamo il metodo indiretto di Lyapunov. Linearizzando il sistema intono all'origine si ottiene

$$\begin{pmatrix} \dot{z_1} \\ \dot{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Inoltre si pone $u = 0$. Gli autovalori della matrice di stato sono $+1$ e -1: il sistema ha un modo esponenzialmente divergente, dunque l'equilibrio è instabile.

G) Scegliamo una funzione candidata ad essere funzione di Lyapunov per il sistema controllato, $V(z) = z_1^2 + z_2^2$, e valutiamo

$$\dot{V} = 2z_1(\sin^2 z_1 + 2z_2 + u) - 2z^4$$

Si osserva facilmente che ponendo $u = -z_1 - \sin^2 z_1 - 2z_2$ si ottiene $\dot{V} = -2z_1^2 - 2z_2^4$, che è negativa definita ovunque. Essendo V radialmente illimitata, si deduce infine la globale asintotica stabilita'. Si noti che era anche possibile stabilizzare il sistema usando una retroazione lineare degli stati (ad esempio, quella che poteva essere calcolata per allocare i poli del sistema linearizzato approssimato, che è raggiungibile), ma questo approccio avrebbe solo garantito la locale asintotica stabilita' del sistema risultante.

H) Il sistema presenta uno zero nell'origine, un polo doppio reale negativo in $-\beta$ ed una coppia di poli complessi coniugati in $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{39}}{2}$. L'eccesso poli–zeri è pari a 3, per cui il luogo presenta 3 asintoti in entrambe i casi. Per retroazione negativa il semiasse reale negativo fa parte del luogo delle radici, mentre per retroazione positiva il semiasse reale positivo fa parte del luogo. Gli altri due asintoti sono inclinati, nei due casi, di $\pm\frac{\pi}{3}$ e $\pm\frac{2\pi}{3}$ rispettivamente. Gli asintoti si intersecano nel punto dell'asse reale di ascissa pari a $-1-2\beta$. Nelle figure seguenti sono riportati i luoghi richiesti nel caso $\beta = 1$.