Esame di Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici – 7–2–2001

Nome e Cognome:						
Anno di frequenza:						
Numero di matricola						
	–	–	$=\alpha-1$	$=\beta-1$	$=\gamma-1$	$=\delta-1$

- Data la f.d.t.:

$$G(z)=\frac{z+0.5}{(z+0.1)(z+0.09\alpha)(z+0.15\beta)}$$

A (pt. 3) Scrivere le matrici **A**, **B**, **C**, **D** di una realizzazione nello spazio degli stati in forma canonica di controllo;

B-N (pt. 4) Discutere la stabilità, la raggiungibilitá e la osservabilitá del sistema.

B-V (pt.4) Descrivere come variano i poli della f.d.t. in anello chiuso $G(z)=\frac{kG(z)}{1+kG(z)}$ al variare del numero reale positivo k, e discutere la stabilità del sistema.

- Con riferimento al sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -(x_1+\alpha)^3+(x_2+\gamma)\\ \dot{x}_2 &= -(x_2+\gamma)+\delta u\end{aligned}$$

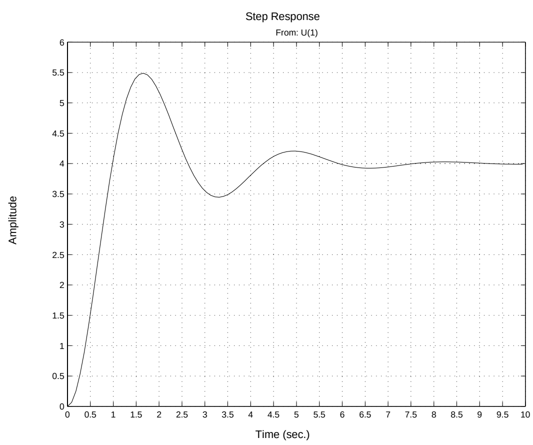
C (pt. 3) Trovare i punti di equilibrio con ingresso nullo e scrivere il sistema linearizzato attorno ad essi;

D (pt. 4) Supponendo di poter misurare i valori istantanei degli stati, determinare una retroazione che renda questi equilibri asintoticamente stabili.

E (pt. 2) Tracciare sul piano di Nichols il diagramma della risposta armonica in anello aperto di un sistema compatibile con le seguenti caratteristiche in anello chiuso (motivando le scelte adottate):

- errore a regime della risposta al gradino unitario nullo;
- errore a regime della risposta alla rampa $\leq 1\%$;
- margine di fase $\geq \pi/4$;
- margine di ampiezza ≥ 5dB;
- picco di risonanza ≤ 6dB;

F (pt. 3) Ricavare empiricamente le caratteristiche della funzione di trasferimento del sistema TC più semplice compatibile con la risposta al gradino raffigurata di seguito.



- Con riferimento al sistema

$$G(s)=\frac{\delta}{(0.25s+1)(0.001\gamma s+1)}$$

G (pt. 3) Tracciare i diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols;

H (pt. 6) Progettare un controllore che realizzi in prima approssimazione le seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino nullo
- margine di fase $\geq \pi/4$;
- banda passante in anello chiuso compresa tra 10 e 20 (rad/sec);

Soluzione

A) Ponendo $a = -0.1$, $b = 0.09\alpha$, e $c = 0.15\beta$, la funzione di trasferimento può essere riscritta nella forma:

$$G(z) = \frac{z + 0.5}{z^3 + (a+b+c)z^2 + (ab+ac+bc)z + abc}.$$

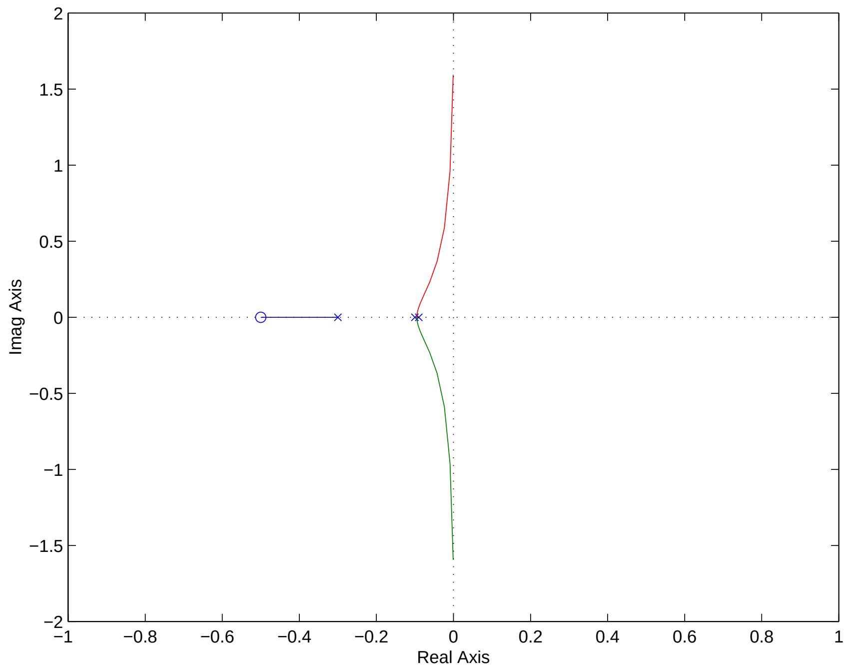
La rappresentazione di stato nella forma canonica di controllo risulta immediatamente

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -abc & -(ab+ac+bc) & -(a+b+c) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = 0$$

B-N) Il sistema ha tre poli reali. I poli in 0.1 e -0.09α hanno modulo sicuramente < 1 e quindi non creano problemi di stabilitá, mentre -0.15β puó avere modulo < 1, nel qual caso il sistema é asintoticamente stabile, oppure > 1, nel qual caso il sistema é instabile. Il sistema sopra descritto é, per definizione, completamente raggiungibile. Essendo inoltre la $G(z)$ ridotta ai minimi termini (non vi sono infatti cancellazioni possibili) ed essendo il suo ordine pari a quello della realizzazione data, anche la osservabilità consegue.

B-V) Il luogo delle radici ha tre rami e due asintoti, che sono paralleli all'asse immaginario e hanno centro in $\frac{-(a+b+c)+0.5}{2}$. Il luogo per $\alpha = 1$, $\beta = 2$ è riportato in figura



Il sistema è stabile per un dato valore di k se i corrispondenti valori sul luogo sono interni al cerchio di raggio unitario. Si ha che per $k = 0$ il sistema è stabile se $\beta < 7$, instabile altrimenti. In ogni caso, per k sufficientemente alti, il sistema divene sempre instabile.

C) Il sistema ha equilibrio unico per $u = 0$ in $x_1 = -\alpha$, $x_2 = -\gamma$. Il sistema linearizzato in questo punto vale

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \end{bmatrix} u$$

dove $z_1 = x_1 + \alpha$, $z_2 = x_2 + \gamma$.

D) Il sistema linearizzato è raggiungibile, anzi esso è già in forma canonica di controllo. È sufficiente fare una retroazione del tipo $u = k_1 z_1 + k_2 z_2$, con k_1, k_2 tali che il polinomio $s^2 + (\delta k_2 - 1)s + \delta k_1$ abbia radici a parte reale negativa. Basterà quindi scegliere $k_1 > 0$, $k_2 > 1/\delta$. Alternativamente a questo metodo che usa lo spazio di stato, si poteva scrivere la f.d.t. corrispondente al linearizzato (con una funziuone di uscita fissata a piacere, dato che conosciamo lo stato), e poi trovare una retroazione delle uscite che la stabilizzi.

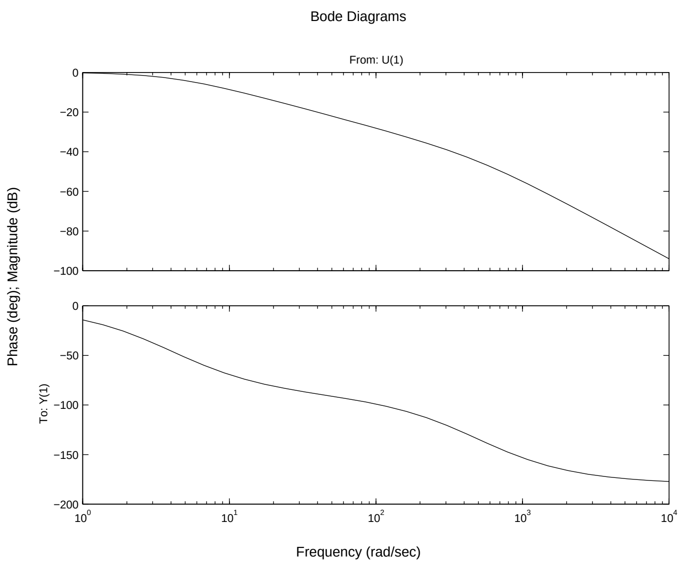
E) Dalle prime due specifiche si evince che il sistema deve presentare un polo semplice nell'origine, quindi per $\omega \to 0$ $|G(j\omega)| \to +\infty$ e $\angle G(j\omega) \to -\frac{\pi}{2}$, ovvero il diagramma di Nichols presenta un asintoto verticale in corrispondenza del valore della fase pari a $-\frac{\pi}{2}$. Il requisito sul margine di fase inpone che la retta orizzontale a 0 dB sia intersecata per un valore della fase che giace a destra del valore $-\pi$ per almeno $\frac{\pi}{4}$, mentre il requisito sul margine di ampiezza richiede che la retta verticale a $-\pi$ sia intesecata al di sotto dell'asse orizzontale a 0 dB di una quantitá pari almeno a 5 dB. L'ultimo requisito richiede che il diagramma di Nichols sia al piú tangente al luogo a 6 dB, oppure non lo intersechi affatto.

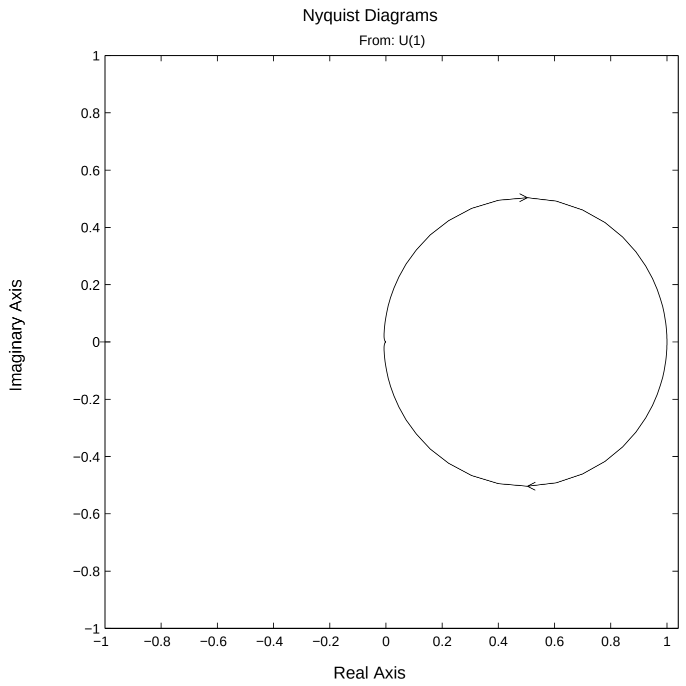
E) Dal comportamento in prossimità di $t = 0$ si evince che la differenza poli–zeri è pari a 2. Inoltre non vi sono oscillazioni in senso opposto a quello di regime, quindi il sistema più semplice compatibile con questa risposta al gradino è un sistema del secondo ordine senza zeri e con due poli complessi coniugati a parte reale negativa, corrispondente ad una funzione di trasferimento del tipo:

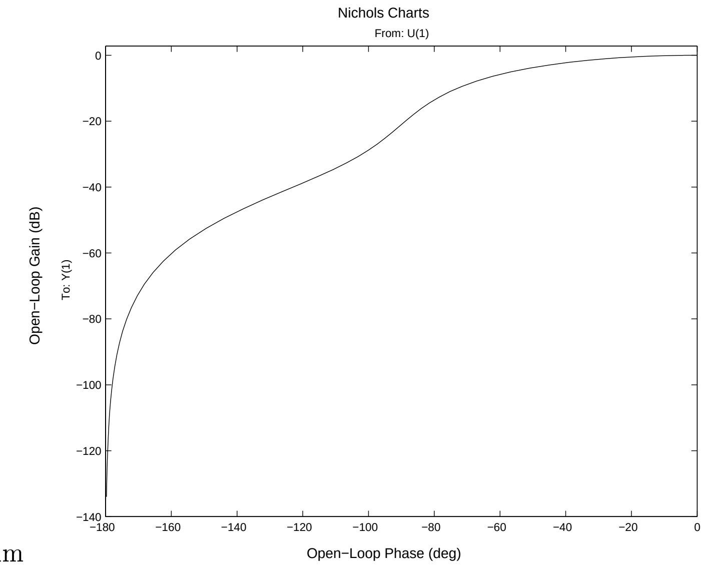
$$G(s) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2j\delta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

ove $\delta > 0$. Il valore di K si deduce direttamente dal valore di regime della risposta al gradino, cioè $K = 4$. Il valore di δ é legato alla sovraelongazione relativa, in quanto quest'ultima dipende esclusivamente da esso. Dal grafico si evince che la sovraelongazione percentuale é pari al 37% circa; sul grafico della curva che esprime la sovraelongazione percentuale come funzione del coefficiente di smorzamento per sistemi del secondo ordine si trova che tale valore corrisponde a $\delta = 0.3$. Per determinare la costante ω_n occorre preliminarmente ricavare in maniera approssimativa il valore del modulo della parte immaginaria dei poli, nel seguito indicata con β: tale valore si ricava misurando lo pseudo–periodo T delle oscillazioni della risposta al gradino; infatti si ha $\beta = \frac{2\pi}{T}$. Dalla figura si ottiene $T \simeq 3.3$, da cui $\beta \simeq 1.9$ e $\omega_n = \frac{\beta}{\sqrt{1-\delta^2}} \simeq 2$.

F) I diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols per $\gamma = 2$ e $\delta = 1$ sono riportati sotto.







mm

G) Fissiamo un controllore $C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s)$, con $C(0) = 1$. Le specifiche statiche richiedono un integratore ($t = 1$), mentre la costante K rimane ancora da determinare. Il diagramma di Bode del sistema $\frac{K}{s} G(s)$ ha un contributo costante, un polo nell'origine e due poli reali negativi corrispondenti alle pulsazioni 4 rad/sec e $1000/\gamma$ rad/sec. Il sistema è a fase minima, quindi per garantire un margine di fase adeguato, occorre che la pulsazione di taglio venga attraversata dal diagramma di Bode di ampiezza con pendenza -20 dB/dec, perciò si può imporre che $C_0(s)$ presenti uno zero negativo in corrispondenza del polo della $G(s)$, cioè alla pulsazione 4 rad/sec. Cosi facendo, la pulsazione di taglio viene a dipendere da K: per $K = 1$ la pulsazione di taglio sarebbe δ, e quindi la banda passante non soddisfa le specifiche. Bisogna dunque agire sul K assegnando a tale parametro un opportuno valore > 1. La pulsazione del polo reale in $1000/\gamma$ rad/sec è sicuramente > 100 rad/sec, quindi non ha effetto sul margine di fase se la pulsazione di taglio viene posta < 20 rad/sec. Il polo del controllore deve essere tale che la corrispondente pulsazione si collochi a destra della pulsazione di taglio ed in maniera da garantire comunque la specifica sul margine di fase: ad esempio un valore della pulsazione pari a 100 rad/sec dovrebbe essere adeguato per qualunque valore di γ.