Esame di Controlli Automatici 22 Febbraio 2019

Soluzioni a cura di:
George Pollayil (`gpollayil@gmail.com`), PhD
Riccardo Mengacci (`riccardo.mengacci@ing.unipi.it`), PhD

Q1 (-) Si descriva, motivando la risposta, come cambiano gli zeri di un sistema descritto da matrici $(A,\ B,\ C,\ D)$ quando retroazionato con un controllore statico K.

A1 La F.d.T. di un sistema $(A,\ B,\ C,\ D)$ retroazionato con una matrice K dipende solo dal suo sottosistema raggiungibile e osservabile. Scritto questo in forma canonica di controllabilità con matrici A_c, B_c, C_c, D_c, i coefficienti del polinomio degli zeri sono gli elementi della matrice delle uscite. Poichè la retroazione degli stati non altera la forma compagna orizzontale inferiore della matrice dinamica $A_c + B_c K_c$, anche dopo la retroazione il sistema è in forma canonica e, quindi, restando C_c invariato, il polinomio degli zeri della F.d.T. non cambia per retroazione. Ad ogni modo, si noti la possibilità che la retroazione porti un polo a cancellare uno degli zeri.

Q2 (-) Si descriva l'applicazione del teorema dell'Insieme Invariante Massimo alla stima della R.A.S. di un sistema. Tale stima è per eccesso o per difetto? Motivare, dando le opportune ipotesi. Si riporti una possibile procedura implementativa di questo metodo.

A2 - Traccia Si consideri un sistema $\dot{x} = f(x)$ con un equilibrio A.S. nell'origine (scelto opportunamente il sistema di coordinate). Sia $V(x)$ una funzione di Lyapunov, quindi p.d., tale per cui $L_f V(x)$ sia n.d. (è possibile estendere al caso di negativa semi-definita utilizzando Krasovski).
Si consideri inoltre la curva di livello della funzione di Lyapunov $V(x) = l$, e l'insieme $\Omega_l = \{x|V(x) \leq l\}$. Se in tale regione si ha ovunque (eccetto l'origine) $L_f V(x) < 0$, allora si può affermare che Ω_l è contenuta nella R.A.S. dell'origine.
Cercando la più ampia curva di livello di $V(x) = \text{cost} > 0$ che soddisfi tali condizioni, ed eventualmente utilizzando più volte questa strategia con diverse funzioni di Lyapunov, è possibile ottenere una stima *per difetto*, e quindi cautelativa, della R.A.S., nell'ipotesi di riuscire a svolgere esattamente i calcoli sopra esposti.
In generale, questo non è facile per la maggior parte dei sistemi, e si procede invece solitamente ad una stima numerica che si basa su questo metodo: devono essere fatte una serie di valutazioni *casuali* in numero *abbastanza elevato* di punti su ciascuna curva di livello di $V(x)$, a valori *discretizzati*, verificando che per *l'intera* curva di livello non ci siano punti per cui la derivata direzionale della funzione di Lyapunov sia non negativa. Se anche un solo punto sulla curva di livello non soddisfacesse tale requisito, la procedura dovrebbe arrestarsi e tutta la curva di livello essere scartata dalla stima della R.A.S., fermo restando che le curve a valori inferiori (che hanno interamente verificato i criteri) rimangano, e che sia possibile testare nuove funzioni di Lyapunov per raffinare la stima.

Q3 (-) Si dia la definizione di equilibrio attrattivo. È possibile che un equilibrio attrattivo sia instabile? Se sì, come deve essere fatta la matrice A relativa al suo linearizzato approssimato? Se ne fornisca un esempio a TD.

A3 - Traccia Uno stato di equilibrio $\bar{x}$ si definisce attrattivo se, per tempi sufficientemente lunghi ed a partire da condizioni iniziali vicine ad esso x', lo stato raggiunto (a partire da x') coincide con lo stato di equilibirio. In formula,

$$\exists \delta > 0 : ||x' - \bar{x}|| < \delta \to \lim_{t \to \infty} ||x(x', t) - \bar{x}|| = 0$$

Si. Deve avere almeno un autovalore nel semipiano destro chiuso ed uno nel semipiano sinistro chiuso se TC (se tutti fossero strettamente a destra sarebbe divergente da qualunque condizione iniziale, mentre se tutti fossero strettamente a sinistra sarebbe stabile). Analogamente con il cerchio unitario per il TD.

Un esempio di sistema che fornisce un equilibrio attrattivo ma instabile è dato dal seguente sistema non lineare

$$x(k+1) = \begin{cases} 5x(k) & ,||x|| \leq 1 \\ 0 & ,||x|| > 1 \end{cases}$$

Q4 (-) Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - 2x_2 + x_1 x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= 0.5x_1 + 0.5x_2 + 2x_1^2 \\ y &= -0.5x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Si linearizzi il sistema attorno all'origine e si trovi la funzione di trasferimento del linearizzato.

Si progetti un controllore in grado di rendere il sistema in anello chiuso stabile e con tutti i poli coincidenti.

A4 - Traccia Il sistema linearizzato nell'origine presenta le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui la funzione di trasferimento ricavata come

$$C(sI - A)^{-1}B = G_1(s) = \frac{-s + 3/2}{2s^2 - 3s + 3}$$

Per progettare il controllore scriviamo il sistema in forma canonica di controllo, ovvero

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.5 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

per il quale un controllo del tipo $u = [k_0\ k_1]x$ porta al sistema retroazionato seguente

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.5 + k_0 & 1.5 + k_1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico, posti i poli coincidenti in α, è dato da $p(s) = (s + \alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2$. Quindi abbiamo che i guadagni del controllore sono $k_0 = -\alpha^2 + 1.5$ e $k_1 = -2\alpha - 1.5$.

Q5 (-) Partendo dalla realizzazione minima del sistema precedente, si discuta sulla combinazione in serie (G_1G_2 e G_2G_1) ed in parallelo del sistema con la seguente funzione

$$G_2(s) = \frac{s + 2}{(-s + 3/2)(s^2 + 1)}$$

Cosa si può dire sulle proprietà dei sistemi risultanti?

A5 - Traccia Nel caso in cui si combini G_2 in serie a G_1, ha luogo una cancellazione zero-polo $(-s+3/2)$, dunque il sistema risultante perde la proprietà di raggiungibilità. Nel caso opposto, con G_1 in serie a G_2, si ha una cancellazione polo-zero, quindi viene a mancare l'osservabilità.

Differentemente, nel caso di composizione in parallelo, non essendoci modi comuni tra le due funzioni di trasferimento, non vi è perdita di nessuna proprietà.

Fare attenzione al fatto che la composizione in serie comporta una cancellazione polo-zero (o zero-polo) instabile. Dunque questo produce una funzione di trasferimento instabile, anche se non è chiaramente mostrato dalla F.d.T. risultante.

Q6 (-) Sia dato il modello di un sistema meccanico

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u$$

in cui $B(q)$ è la matrice di inerzia del sistema, $C(q,\dot{q})$ il termine di forze centrifughe e di Coriolis, e $g(q)$ esprime il contributo alla dinamica derivante da un campo gravitazionale $U(q)$, per cui $g(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q}$. Sia data la seguente legge di controllo

$$u = P(\bar{q} - q) - D\dot{q} + g(q)$$

in cui P e D sono matrici positive definite.

Si dimostri che tale legge di controllo rende il sistema asintoticamente stabile in una configurazione desiderata $\bar{q}$.

A6 - Traccia La legge di controllo u fornita è definita legge di Arimoto o "PD con compensazione di gravità", ed è data dalla somma di un termine proporzionale all'errore, uno alla derivata delle coordinate di giunto q, e del termine gravitazionale $g(q)$.

Si definisca $e := \bar{q} - q$ l'errore di tracking e si prenda la funzione di Lyapunov $V(e,q,\dot{q}) = \frac{1}{2}e^T P e + \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q}$.

La sua derivata direzionale è data da:

$$\begin{aligned}
L_f V(q,\dot{q}) &= e^T P\dot{e} + \dot{q}^T B(q)\ddot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \dot{B}(q)\dot{q} = \\
&= e^T P\dot{e} + \dot{q}^T\left[-C(q,\dot{q})\dot{q} - g(q) + Pe - D\dot{q} + g(q)\right] + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T\dot{B}(q)\dot{q} = \\
&= -e^T P\dot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T\left[\dot{B}(q) - 2C(q,\dot{q})\right]\dot{q} + \dot{q}^T Pe - \dot{q}^T De \\
&= -\dot{q}^T D\dot{q} \leq 0
\end{aligned}$$

Sostituendo la legge di controllo u, l'unico equilibrio possibile per il sistema è dato da

$$P(\bar{q} - q) = 0$$

che, per la positiva definitività di P, ha come unica soluzione $q = \bar{q}$, che è dunque l'insieme invariante massimo per il sistema.