Esame di Controlli Automatici 31 Gennaio 2019

Q1 (3) Si discuta la differenza tra un movimento ed una orbita di un sistema dinamico, e si faccia almeno un esempio di entrambe i casi;

Q2 (3) Si dia la definizione di movimento attrattivo e si discuta la differenza con quella di movimento stabile;

Q3 (4) Si discutano i possibili effetti di una retroazione statica dello stato o delle uscite sulle proprietà di raggiungibilità e osservabilità di un sistema.

A3 - Traccia La retroazione degli stati non altera la raggiungibilità di un sistema, e la iniezione delle uscite non ne altera la osservabilità.

D'altro canto, la retroazione degli stati può alterare la osservabilità, mentre la retroazione delle uscite può alterare la raggiungibilità del sistema. Partendo dall'analisi della forma minima di raggiungibilità o di osservabilità nei due casi, entrambe queste operazioni possono portare un polo a coincidere con uno zero della funzione di trasferimento, portando ad una cancellazione e ad una forma non più minima della stessa. Questo porta dunque ad una perdita di osservabilità o di raggiungibilità nei due casi.

Una retroazione statica delle uscite può essere vista sia come una particolare retroazione degli stati, che come una particolare iniezione delle uscite, e pertanto non altera né raggiungibilità né osservabilità del sistema.

Q4 (5) Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2 + as + b}{s(s^2 - 1)}$$

si trovi una realizzazione minima del sistema dinamico associato. Si progetti un regolatore in modo tale che sia garantito un errore nullo per riferimenti a gradino, e che il sistema in anello chiuso abbia poli a parte reale negativa minore di -3. Si discuta inoltre la proprietà di minimo sfasamento del sistema in anello chiuso al variare dei parametri del sistema e del controllore.

A4 - Traccia Una realizzazione minima si ottiene ponendo il sistema in forma canonica di controllo, vale a dire:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} b & a & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Si noti la presenza di un polo nell'origine nella funzione di trasferimento $G(s)$. Si può progettare un regolatore semplicemente retroazionando gli stati con la legge

$$u = K_c x$$

con $K_c = [k_0 \, k_1 \, k_2]$ scelta opportunamente sulla base di uno degli algoritmi di allocazione dei poli, ad esempio quello di Ackermann. Il polinomio caratteristico desiderato deve avere autovalori a parte reale minore di -3, dunque sarà sufficiente scegliere un polinomio caratteristico della forma $\pi(s) = (s + p_0)(s + p_1)(s + p_2)$, con parte reale di $p_i > 3$, $i = 0 \ldots 2$.

Affinchè il sistema retroazionato abbia sfasamento minimo è necessario e sufficiente che gli zeri siano a parte reale negativa. Questo avviene per $a, b > 0$, e non cambia per retroazione.

Q5 (4) Si considerino i due sistemi rappresentati dalle f.d.t

$$G_1 = \frac{s+1}{(s+5)}, G_2 = \frac{s+5}{(s+3)(s+7)}$$

e se ne scriva una realizzazione minima nello spazio di stato.

A5 - Traccia Una rappresentazione minima si ottiene scrivendo la forma canonica di controllo. Per il sistema G_1 essa corrisponde a

$$A_1 = [-5] \ , \ B_1 = [1] \ , \ C_1 = [-4] \ , \ D_1 = [1] \ .$$

Notare che D_1 differisce da zero dato che il sistema non è strettamente proprio, e che $C_1 = b_0 - a_0 b_n = 1 - 5 = -4$.

Per quanto riguarda il sistema $G_2(s)$, procediamo prima a riscriverlo come:

$$G_2 = \frac{s+5}{s^2 + 10s + 21} \ .$$

A questo la forma canonica di controllo risulta essere:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -21 & -10 \end{bmatrix} \ , \ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ C_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \ , \ D_2 = [0] \ .$$

Q5.1 Si colleghi il sistema G_2 in serie al sistema G_1, e si costruisca una realizzazione nello spazio di stato del sistema serie. Si discuta la raggiungibilità, l'osservabilità e la minimalità della realizzazione. Si consideri poi il collegamento di G_1 in serie a G_2, e si ripetano le considerazioni fatte.

A5.1 - Traccia Il sistema serie $G_1 G_2$ ha una realizzazione data da

$$A_{12} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} ; \ B_{12} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} ;$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} ; D_{12} = 0.$$

La realizzazione è non minima, in quanto la f.d.t. $G_1 G_2$ ha una cancellazione polo-zero. La proprietà persa è quella di osservabilità, in quanto è il polo del primo sistema che si è cancellato con uno zero del secondo.

Nel caso $G_2 G_1$, le considerazioni sono del tutto analoghe ma in questo caso la proprietà persa è la raggiungibilità.

Q6 (7) Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a^2 \cos(x_2) + x_1^2 + u \\ \dot{x}_2 &= -b x_2^2 \end{aligned}$$

Si ricavino i punti di equilibrio del sistema ad ingresso nullo e si linearizzi attorno ad essi.

Si studi la stabilità del sistema linearizzato al variare dei parametri (b ed a) e si concluda sulla stabilità del sistema originale dove possibile.

A6-Traccia I punti di equilibrio del sistema non lineare con $u = 0$ si ottengono imponendo

$$\begin{aligned} -a^2 \cos(\bar{x}_2) + \bar{x}_1^2 = 0 \\ -b \bar{x}_2^2 = 0 \end{aligned}$$

da cui si hanno, se $b \neq 0$, due equilibri in $\bar{x}_1 = +a$, $\bar{x}_2 = 0$ e $\bar{x}_1 = -a$, $\bar{x}_2 = 0$. Nel caso in cui $b = 0$ allora gli equilibri sono dati da $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}$ ed $\bar{x}_1 = \pm a \sqrt{\cos(\bar{x}_2)}$.

La matrice dinamica del sistema linearizzato è ottenuta come

$$A = \begin{bmatrix} 2\bar{x}_1 & a^2 \sin(\bar{x}_2) \\ 0 & -2b\bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

CASO $b \neq 0$ Gli autovalori della matrice sono dati da $\lambda_1 = 2a$ ed $\lambda_2 = 0$ per il primo equilibrio e $\lambda_1 = -2a$ ed $\lambda_2 = 0$ per il secondo.

Per l'equilibrio con $\bar{x}_1 = a$ il sistema linearizzato è marginalmente stabile se $a < 0$, è instabile se $a > 0$. Se $a = 0$, il sistema linearizzato è marginalmente stabile. Per il sistema non lineare, possiamo solo concludere che è instabile nel caso $a < 0$.

Nel secondo equilibrio in $\bar{x}_1 = -a$ valgono considerazioni analoghe.

CASO $b = 0$ Gli autovalori della matrice sono dati da $\lambda_1 = 0$ ed $\lambda_2 = \pm 2a\sqrt{\cos(\bar{x}_2)}$. E' necessario studiarne il segno di λ_2.

Nei casi in cui λ_2 risulta di segno negativo, allora il sistema linearizzato è marginalmente stabile, e nulla si può dire sul sistema originale. Nel caso in cui $\lambda_2 > 0$ si può concludere sull'instabilità del sistema non lineare. Diversamente, se $\lambda_2 = 0$ possiamo essere nel caso in cui $a = 0$ (matrice A tutta nulla), quindi il sistema linearizzato è marginalmente stabile e non possiamo concludere sul non lineare, o nel caso in cui $\cos(\bar{x}_2) = 0$ per cui

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che porta a concludere sull'instabilità del sistema non lineare per tutti i valori di $a \neq 0$ (il sistema è polinomialmente instabile).

Q7 (4) Si consideri l'equilibrio nell'origine per i tre sistemi $\dot{x} = A_i x$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

si discuta se è possibile trovare una funzione di Lyapunov, la si calcoli esplicitamente se possibile o si indichi un metodo per farlo.

A7 - Traccia La matrice A_1, in forma compagna verticale destra, ha tutti gli autovalori a parte reale negativa. Il sistema corrispondente è quindi asintoticamente stabile, e l'equazione di Lyapunov ha una soluzione P unica e positiva definita per qualsiasi Q p.d. Un metodo per calcolarla è risolvendo l'equazione di Lyapunov, in questo caso equivalente ad un sistema lineare di 6 equazioni in sei incognite.

La matrice A_2, in forma di Jordan, ha un autovalore a parte reale negativa di molteplicità algebrica due ma un autovalore nullo, dunque il sistema è marginalmente stabile. Non esiste quindi una soluzione per nessuna Q p.d., e possono esistere soluzioni per Q p.s.d. particolari. Ad esempio, considerando le matrici a blocchi corrispondentemente alla struttura di A_2 che è già in forma di Jordan, si può porre

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & J_n \end{array}\right]^T \left[\begin{array}{c|c} P_0 & P_d \\ \hline P_d & P_n \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} P_0 & P_d \\ \hline P_d & P_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & J_n \end{array}\right] = -\left[\begin{array}{c|c} Q_0 & Q_d \\ \hline Q_d & Q_n \end{array}\right]$$

Ponendo Q diagonale a blocchi, ovvero $Q_d = 0$, una soluzione si può trovare solo se anche $Q_0 = 0$. Una soluzione è data da $P_d = 0$, P_0 qualsiasi e P_n ottenuto risolvendo $J_n^T P_n + P_n J_n = -Q_n$ con Q_n identità, ovvero

$$P_n = \left[\begin{array}{c|c} p_1 & p_2 \\ \hline p_3 & p_4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/16 \\ 1/16 & 9/32 \end{bmatrix}$$

Infine la matrice A_3, ha un autovalore a parte reale negativa di molteplicità algebrica due ed un autovalore positivo. Il sistema è quindi instabile, e non può dunque esistere una soluzione P p.d. qualsiasi sia Q p.s.d..

Q8 (3) Si consideri un sistema tempo discreto con matrice dinamica

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

e si trovi se possibile una funzione di Lyapunov.

A8 - Traccia A tempo discreto il sistema associato a questa matrice risulta stabile poichè tutti gli autovalori sono interni al cerchio unitario, dunque una soluzione P p.d. della equazione di Lyapunov $A^T PA - P = -Q$ esiste ed è unica per qualsiasi Q p.d.. Posto Q uguale alla identità, e risolvendo un sistema di 6 equazioni in 6 incognite, si ottiene ad esempio

$$P = \begin{bmatrix} 25/9 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & -8/9 \\ 0 & -8/9 & 116/27 \end{bmatrix}$$