Esame di Controlli Automatici 30 Giugno 2016

1. (8) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1^2x_2 - f_1(x_1)(x_1^2+2x_2^2-4) \\ \dot{x}_2 = -2x_1^3 - f_2(x_2)(x_1^2+2x_2^2-4) \end{cases}$$

in cui le funzioni continue f_1 e f_2 hanno lo stesso segno dei loro argomenti, vale a dire $x_i f(x_i) > 0$ se $x_i \neq 0$ e $f_i(0) = 0$.

- Si trovino i punti di equilibrio del sistema.
- Si verifichi che l'insieme $M = \{x | x_1^2 + 2x_2^2 = 4\}$ è un invariante per il sistema. Qual è la dinamica del sistema nell'insieme invariante?
- Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio. Si mostri che quasi tutte le traiettorie del sistema evolvono verso l'invariante M.
- L'insieme M è un ciclo limite?

2. (6) Sia dato il sistema:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} u \quad , \quad y = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 \end{pmatrix} x$$

È possibile costruire un osservatore che converga alla stima esatta dello stato di questo sistema?

3. (6) Per il sistema seguente, si studi e si scriva un algoritmo iterativo in linguaggio Matlab per il calcolo degli zeri del sistema.

$$x^2 - 2y^2 - 4 = 0$$
$$xy - xy^2 = 0$$

Se ne discuta la stabilità in relazione alla velocità di convergenza.

4. (7) Si consideri l'impianto in Fig. 1, i cui sottosistemi P1 P2 e P3 sono sistemi lineari caratterizzati dalle rispettive funzioni di trasferimento

$$P_1(s) = \frac{25(s+1)}{(s+5)^2}; \quad P_2(s) = \frac{20(s+5)}{(s-10)}; \quad P_3(s) = \frac{10}{(s+5)(s+2)}.$$

Si supponga che ciascun sottosistema sia rappresentato da un modello nello spazio di stato, che sarebbe comple-

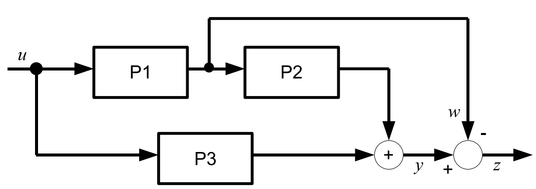

Figura 1: Schema a blocchi del sistema

tamente raggiungibile a partire dal proprio ingresso e osservabile dalla propria uscita. Per il sistema complessivo, si dispone però solo della possibilità di misurare alcuni segnali composti.

Si determini se è possibile ricostruire completamente lo stato iniziale del sistema conoscendo gli ingressi e disponendo

– della sola misura di y;

– della sola misura di $z = y - w$;

– di entrambe le misure y e w.

Si stabilisca se il sistema complessivo è stabilizzabile (nota: non è richiesto il calcolo della matrice di raggiungibilità).

5. (3) Dato il sistema LTITD $x(k+1) = (I + \epsilon A)x(k)$, con I la matrice identità di dimensioni opportune e $\epsilon \in R$ un parametro. Nei casi seguenti:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}$$

con $a, b > 0$, si trovi, se esiste, una funzione di Lyapunov positiva definita per il sistema e si discuta la stabilità del sistema a tempo discreto al variare del parametro $\epsilon > 0$, utilizzando l'equazione di Lyapunov.

Svolgimento

1. Per il primo esercizio si procede anzitutto al calcolo dei punti di equilibrio, che risultano essere $(0,0)$ e $(0,\pm\sqrt{2})$. L'insieme M è un invariante in quanto, detto $C(x) = x_1^2+2x_2^2-4$, si osserva che $\dot{C}(x) = 0$, $\forall x \in M$. Nell'invariante il sistema evolve con una dinamica data da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 4x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1^3 \end{cases}$$

Si osserva facilmente che traiettorie del sistema lungo l'invariante evolvono in senso orario. In Figura 2 e 3 sono riportati, a titolo di esempio, i punti di equilibrio e alcune soluzioni a partire da diversi punti dello spazio di stato per il caso $f_1(x_1) = x_1$ e $f_2(x_2) = x_2$.

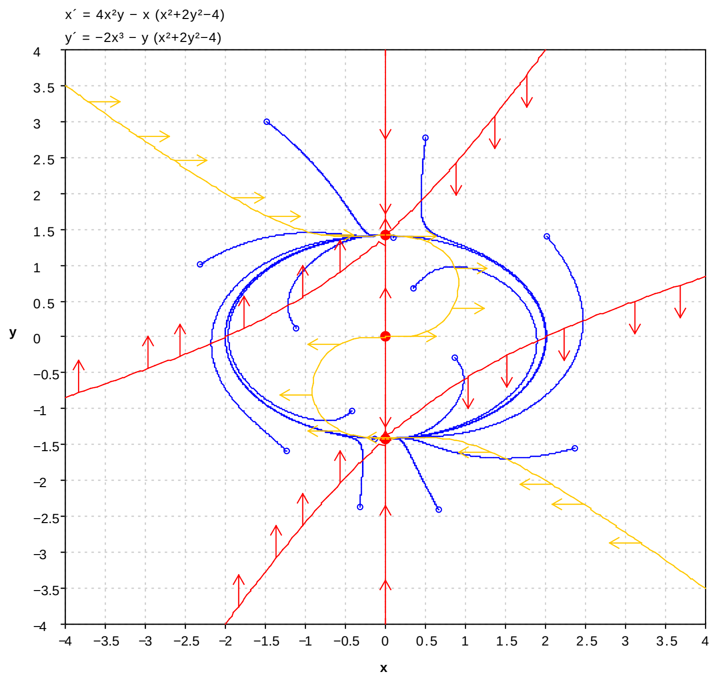

Figura 2: Isocline e soluzioni per il sistema con $f_1(x_1) = x_1$ e $f_2(x_2) = x_2$.

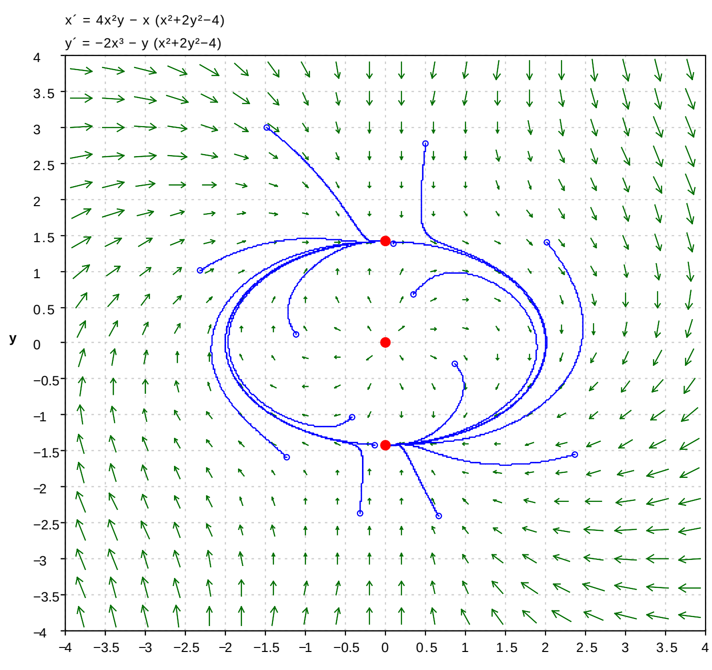

Figura 3: Campo vettoriale nel piano delle fasi con $f_1(x_1) = x_1$ e $f_2(x_2) = x_2$

Calcolando la derivata direzionale della funzione $C(x)$ lungo le traiettorie del sistema si verifica che $\dot{V}(x) < 0$ ovunque tranne che in M e in $x = 0$. Dunque tutte le traiettorie convergono ad M, eccezion fatta per quelle che partono dall'origine.

L'insieme M non è un ciclo limite in quanto i due punti di equilibrio $(0, \pm\sqrt{2})$ appartengono ad esso. Dunque le traiettorie che partono da M tendono ad uno di questi due punti.

I punti di equilibrio $(0, \pm\sqrt{2})$ sono punti di sella per il sistema.

2. Il sistema è già in forma canonica di Kalman. È immediato vedere che il sottospazio di dimensione uno che ha come base il vettore $(0, 0, 1)^T$ è non osservabile. L'autovalore associato al sottospazio di non osservabilità è a. È possibile quindi costruire un osservatore che converge a tutto lo stato (ovvero, il sistema è detettabile) se e solo se $a < 0$.

3. (Traccia) Si può utilizzare un algoritmo per la ricerca degli zeri tra quelli visti a lezione: metodo del gradiente o metodo di Newton-Raphson. Si valuta l'andamento della differenza $V\big(x(k+1)\big) - V\big(x(k)\big)$. Considerando ad esempio il metodo del gradiente, la velocità di convergenza dipende dalla invertibilità del gradiente $\frac{\partial h}{\partial x}$.

4. Si osserva dallo schema che i due rami in parallelo che concorrono a formare l'uscita y hanno un polo in comune in -5 che ne impedisce la osservabilità. Inoltre, si ha la cancellazione di un polo in -5 di $P_1(s)$ con uno zero del sottosistema in serie $P_2(s)$, il che implica una ulteriore perdita di osservabilità. L'uscita w non può ovviamente osservare i poli in 10 di $P_2(s)$ e quelli in -5 e -2 di $P_3(s)$, propri di sottosistemi che non sono collegati a quella uscita. Sono invece completamente osservabili da w i due poli in -5 del sottosistema $P_1(s)$. Nel terzo caso, in cui si ha a disposizione l'informazione portata dalla y e quella da w, ci si attende quindi che il sistema sia completamente osservabile.

   Resta da studiare la osservabilità dalla uscita $z = y - w$. Si osservi che il calcolo della funzione di trasferimento tra u e z,

$$P_{u,z} = P_3(s) + P_1(s)(P_2(s) - 1) = \frac{475(s + 0.8353)(s + 2.171)(s + 5.804)}{(s + 5)^2(s + 2)(s - 10)}$$

   non porterebbe a conclusioni certe. Infatti la cancellazione di un polo in -5 che si verifica può corrispondere alla perdita di raggiungibilità dell'autovalore corrispondente, oppure alla sua perdita di osservabilità, ovvero ad entrambe.

   Si può osservare che, rispetto alla uscita z, il sistema consiste di due rami in parallelo, con funzioni di trasferimento rispettivamente pari a $P_3(s)$ e

$$P_1(s)(P_2(s) - 1) = \frac{475(s + 1)(s + 5.789)}{(s - 10)(s + 5)^2},$$

   che hanno un polo in -5 a comune, quindi il sistema ha un sottosistema inosservabile di dimensione uno.

   Per una verifica più diretta e dettagliata, si può ricorrere ad una analisi direttamente nello spazio di stato composito. Indicando con il pedice i le grandezze relative al sottosistema i-esimo $\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i$, $y_i = C_i x_i + D_i u$, si considerino le tre realizzazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \\ y_1 &= \begin{bmatrix} -100 \; 25 \end{bmatrix} x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u_2 \\ y_2 &= \begin{bmatrix} 30 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_3 \\ y_3 &= \begin{bmatrix} 10/3 & -10/3 \end{bmatrix} x_3 \end{aligned}$$

   Andiamo quindi a considerare le relazioni di connessione dello schema, che sono

$$u_2 = y_1 \ , \ u_1 = u_3 = u$$

   quindi possibile scrivere per quanto riguarda l'evoluzione dello stato (notando che D_1 e D_3 sono nulle)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} A_1 & 0 & 0 \\ \hline B_2 C_1 & A_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline 0 \\ \hline B_3 \end{array}\right] u.$$

Per quanto riguarda le 3 uscite proposte, è poi possibile scrivere

$$C_y = [D_2C_1 \,|\, C_2 \,|\, C_3]$$

$$C_w = [C_1 \,|\, 0 \,|\, 0]$$

$$C_z = C_y - C_w = [(D_2 - I)C_1 \,|\, C_2 \,|\, C_3]$$

$$C_{yw} = \left[\begin{array}{c} C_y \\ \hline C_w \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} D_2C_1 & C_2 & C_3 \\ \hline C_1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Calcolando le tre matrici di osservabilit associate a C_y, C_z e C_{yw} ed i rispettivi ranghi, si ottiene

$$\operatorname{rank}(\mathcal{O}_y) = 3\ ,\quad \operatorname{rank}(\mathcal{O}_z) = 4\ ,\quad \operatorname{rank}(\mathcal{O}_{yw}) = 5\ .$$

Le informazioni ricavate sono quindi congruenti con quanto precdentemente osservato, e confermano che l'unica uscita che permette di osservare completamente il sistema quindi la terza.

Si osserva dallo schema che i due sistemi che ricevono l'ingresso u in parallelo hanno un polo in comune, che risulterà non raggiungibile (l'altra cancellazione che si ha nella serie di P1 con P2 non altera la raggiungibilità). Questo polo in -5 è peraltro a parte reale negativa, quindi la stabilizzabilità rimane garantita.

5. Si chiede di trovare una matrice P che soddisfi le equazioni di Lyapunov

$$(I + \epsilon A_i)' P_i (I + \epsilon A_i) - P_i = -Q_i, \quad i = 1, 2.$$

Nel caso di A_1, essendo diagonale, si sceglie $P = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

L'equazione di Lyapunov a tempo discreto in questo caso si riduce al semplice sistema

$$\begin{cases} p & = & -\dfrac{1}{(1 - a\epsilon)^2 - 1} \\[2ex] s & = & -\dfrac{1}{(1 - b\epsilon)^2 - 1} \end{cases}$$

Per avere una P definita positiva è sufficiente dunque studiare il segno delle espressioni a denominatore di p e s. Si trova che $P > 0$ se e solo se $\epsilon > \dfrac{a}{2}$ e $\epsilon > \dfrac{b}{2}$.

Una possibile soluzione, noto il valore di ϵ e detta $\tilde{A}_i = (I + \epsilon A_i)$, è quella di utilizzare il comando MATLAB `dlyap(A',Q)`.

Per A_2 si osserva che il sistema a tempo continuo $\dot{x} = A_2 x$ è marginalmente stabile, dunque sarà possibile associarvi una funzione di Lyapunov con derivata solo semidefinita positiva.

Un metodo semplice per verificare l'esistenza di una funzione definita positiva a tempo discreto è mediante il calcolo diretto degli autovalori della matrice $I + \epsilon A_2$, che ha il seguente polinomio caratteristico:

$$\phi(\lambda) = (\lambda - 1 + \epsilon a)\left((\lambda - 1)^2 - \epsilon^2 b^2\right)$$

Gli autovalori del sistema (già in forma di Jordan) sono dati da $\lambda_1 = 1 - \epsilon a$ e $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\epsilon^2 b^2 - \frac{3}{4}}$. Da qui, imponendo $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, 3$, si ricavano le condizioni su ϵ in funzione di a e b.

Si trova che non vi sono valori di ϵ che rendano entrambi gli autovalori dipendenti da b minori di 1 in modulo, dunque non potrà esistere una funzione di Lyapunov definita positiva.

Curato da: Danilo Caporale, PhD