

Esame di Controlli Automatici 9 Giugno 2016: svolgimento

1. (2) Si discutano i possibili effetti di una retroazione statica dello stato o delle uscite sulle proprietà di raggiungibilità e osservabilità di un sistema.

Svolgimento

La retroazione degli stati non altera la raggiungibilità di un sistema, e la iniezione delle uscite non ne altera la osservabilità. Di conseguenza, una retroazione statica delle uscite può essere vista come una composizione di queste due operazioni e non ne altera né raggiungibilità né osservabilità.

D'altro canto, la retroazione degli stati può alterare la osservabilità, mentre la retroazione delle uscite può alterare la raggiungibilità del sistema. Partendo dall'analisi della forma minima di raggiungibilità (osservabilità), entrambe queste operazioni possono portare un polo a coincidere con uno zero della funzione di trasferimento, portando ad una cancellazione e ad una forma non più minima della stessa. Questo porta dunque ad una perdita di osservabilità (raggiungibilità).

2. (4) Si discutano i possibili effetti di una retroazione dinamica delle uscite su raggiungibilità e osservabilità.

Svolgimento

Una retroazione dinamica delle uscite può in generale portare ad una cancellazione polo-zero. In questo caso, si ha la perdita contemporanea di raggiungibilità e di osservabilità, come è possibile osservare studiando due sistemi, $\Sigma_1 = \frac{n_1(s)}{d_1(s)}$ e $\Sigma_2 = \frac{n_2(s)}{d_2(s)}$, di cui il primo in catena diretta ed il secondo in catena di retroazione. Se vengono a coincidere singolarità di $n_1(s)$ (zeri di Σ_1) con singolarità di $d_2(s)$ (poli di Σ_2), si ha una perdita contemporanea di entrambe le proprietà strutturali.

3. (8) Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\dot{x} = 1 - \ln(e + x) + \alpha \left(\frac{2}{\alpha e} x + u(x, \alpha) \right).$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine per $\alpha = 0$. Per $\alpha \neq 0$, si progetti una legge di controllo $u(x, \alpha)$ che renda stabile l'origine. Si valuti la regione di asintotica stabilità ottenuta da questo controllore.

Svolgimento

Per $\alpha = 0$ il sistema dinamico lineare tangente al sistema non lineare nell'intorno dell'origine è dato da $\dot{x} = -\frac{1}{e}x$. Con un autovalore negativo, il sistema lineare è asintoticamente stabile e l'equilibrio del sistema non lineare associato è (localmente) asintoticamente stabile (metodo indiretto di Lyapunov). Per $\alpha \neq 0$ la dinamica del sistema linearizzato è: $\dot{x} = \frac{1}{e}x + \alpha u$, da cui è possibile scegliere una legge di controllo del tipo $u = -\frac{k}{\alpha e}x$, con $k > 2$, per rendere il sistema lineare asintoticamente stabile. Quanto alla regione di asintotica stabilità si ricorre all'uso della funzione di Lyapunov $V = \frac{x^2}{2}$. Derivando, e sostituendo la legge di controllo progettata, si ottiene:

$$\dot{V} = (1 - \ln(e + x))x + \frac{2 - k}{e}x^2.$$

Il secondo addendo è sempre negativo. Quanto al primo addendo, esso è negativo (e definito in \mathbb{R}), per $e + x > 0$. La regione di asintotica stabilità è dunque $x > -e$.

4. (5) Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2 + as + b}{s(s^2 - 1)}$$

si trovi una realizzazione minima del sistema dinamico associato. Si progetti un regolatore in modo tale che sia garantito un errore nullo per riferimenti a gradino, e che il sistema in anello chiuso abbia poli del sistema in anello chiuso a parte reale negativa minore di -3 . Si discuta la proprietà di minimo sfasamento del sistema in anello chiuso al variare dei parametri del sistema e del controllore.

Svolgimento (traccia)

Una realizzazione minima si ottiene ponendo il sistema in forma canonica di controllo, vale a dire:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [b \quad a \quad 1] \quad D = 0$$

Si noti la presenza di un polo nell'origine nella funzione di trasferimento $G(s)$. Si può progettare un regolatore per allocazione dei poli semplicemente retroazionando gli stati con la legge:

$$u = K_c x$$

con $K_c = [k_0 \ k_1 \ k_2]$ scelta opportunamente. Il polinomio caratteristico desiderato deve avere autovalori a parte reale minore di -3 , dunque si sceglie un polinomio caratteristico della forma $\pi(s) = (s + k_0)(s + k_1)(s + k_2)$, $k_i > 0$, $i = 0 \dots 2$.

Affinchè il sistema retroazionato abbia sfasamento minimo è necessario e sufficiente che gli zeri siano a parte reale negativa. Questo avviene certamente per $a, b > 0$.

5. (5) Dato il sistema a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0] x \end{cases}$$

si scriva un sistema lineare tempo discreto $z^+ = A_d z + B_d u$ capace di riprodurre esattamente le soluzioni del primo per tutti gli istanti multipli di un dato periodo T , quando l'ingresso applicato sia costante a tratti sugli intervalli. Si ricavi la matrice di raggiungibilità e quella di osservabilità del sistema a tempo discreto. Può la discretizzazione alterare le proprietà di raggiungibilità e osservabilità?

Svolgimento (traccia)

Il metodo di discretizzazione che garantisce le proprietà richieste è lo Zero Order Hold. Utilizzando questo metodo è possibile ottenere le matrici del sistema discretizzato in funzione di T , così come le matrici di matrici di raggiungibilità e osservabilità.

La discretizzazione può alterare sia la raggiungibilità che la osservabilità del sistema. Si osservi come le matrici R ed O si modificano quando si sostituisce ad A, B, C l'equivalente discreto A_d, B_d, C_d .

6. (6) Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0] x \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, lo si vuole stabilizzare in un intorno dell'origine usando un regolatore Proporzionale-integrale (PI) del tipo

$$R_{PI}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_d \frac{s}{\tau s + 1}$$

- (a) Si calcolino valori opportuni dei parametri del controllore;
- (b) si scriva una funzione MATLAB che implementi il regolatore.

Soluzione (traccia) Il sistema è asintoticamente stabile per $\alpha < 0$. Per $\alpha \geq 0$ si può procedere come illustrato in seguito.

Anzitutto si trova una realizzazione nello spazio di stato del regolatore proposto, la cui funzione di trasferimento è, raccogliendo i termini, pari a

$$R(s) = \frac{(K_P \tau + K_d) s^2 + (K_P + K_I \tau) s + K_I}{\tau s^2 + s} = \frac{(K_P + \frac{K_d}{\tau}) s^2 + (\frac{K_P}{\tau} + K_I) s + \frac{K_I}{\tau}}{s^2 + \frac{1}{\tau} s}$$

Rinominando i termini in modo che si abbia

$$R(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^2 + d}$$

una realizzazione in spazio di stato del regolato è data da

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c + D_c y\end{aligned}$$

con

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = [c - a \quad b] \quad [D_c = a]$$

Inserendo il regolatore, il sistema si troverà ad avere come ingresso la legge di controllo:

$$u = C_c x_c + D_c y$$

e la dinamica in anello chiuso del sistema complessivo sarà dunque

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$

Sostituendo le espressioni di u ed y si ottiene (si ricordi che il sistema ha $D = 0$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$$

La matrice dinamica del sistema retroazionato è dunque data da:

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a + \alpha & -2 & c - a & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -d & 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto è possibile porre questa matrice in forma canonica di controllo e calcolare i valori dei coefficienti necessari a stabilizzare il sistema. Un modo è quello di valutare il polinomio caratteristico del sistema, pari a:

$$\phi(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + (d - a - \alpha)\lambda^2 + (b + 2d)\lambda + (c - 2a - \alpha)$$

Utilizzando il criterio di Routh-Hurwitz si ricavano le condizioni necessarie e sufficienti alla stabilità del sistema complessivo.

$$d - a - \alpha > 0 \quad b + 2d > 0 \quad c - 2a - \alpha > 0$$

Curato da: Danilo Caporale, PhD