

## Esame di Controlli Automatici 4 Febbraio 2016

1. (7) Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha x_2^3(1 + x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= \beta x_1^3(1 + x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}\tag{1}$$

e si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$ , per  $\alpha\beta > 0$ , applicando i teoremi opportuni.

2. (3) Dato il sistema  $G(s) = \frac{s-a}{s^2+3s-1}$  si determini una sua realizzazione minima. Si trovi una retroazione degli stati che allochi gli autovalori del sistema in anello chiuso in  $-1, -2 \pm j3$ . Si ricavi inoltre il valore degli eventuali zeri del sistema in anello chiuso e si discuta questo risultato al variare del parametro  $a$ .
3. (2) Posto  $a = -1$  nel sistema precedente, si progetti un regolatore che utilizzando solo la retroazione delle uscite stabilizzi il sistema rendendo al contempo nullo l'errore di inseguimento per riferimenti a gradino.
4. (6) Si consideri un sistema LTITC con matrice dinamica  $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$  e matrice di ingresso  $B = [0 \ 1]^T$ . Si trovino i corrispondenti sistemi campionati con Eulero in avanti e con ZOH e se ne discuta la stabilità al variare del tempo di campionamento  $T$ . Si consideri ora il sistema campionato con ZOH. Si trovi l'andamento ottimo del controllo che porti il sistema da  $x(0) = [0, 0]^T$  a  $x(t_f) = [1, 0]^T$  con  $t_f = 1$  in  $p = 3$  passi. Si scriva il codice MATLAB necessario per risolvere lo stesso problema nel caso in cui la variabile di controllo sia limitata come  $u(k) \in [-1, 1], \forall k \geq 0$ .
5. (5) Si dia la definizione di orbita e di stabilità di un'orbita. Si enunci il teorema dell'invariante massimo. Si riportino degli esempi di applicazione.
6. (5) Dato un sistema LTITC  $\dot{x} = Ax + Bu$ , con equazione di uscita  $y = Cx + Du$ , dire sotto quali condizioni è possibile rendere il sistema stabile, assegnando a piacere gli autovalori del sistema in anello chiuso, mediante un regolatore proporzionale e quando invece è necessario ricorrere ad un regolatore dinamico.
7. (5) Si considerino le seguenti funzioni di trasferimento

$$G_1(s) = \frac{s+\beta}{s+\alpha}; \quad G_2(s) = \frac{s+\alpha}{(s+\beta)(s+1)};$$

si discuta circa le proprietà strutturali di raggiungibilità e osservabilità del sistema nel caso in cui i due sistemi siano collegati in serie ( $G_1(s)G_2(s)$  e  $G_2(s)G_1(s)$ ) e in retroazione, con  $G_1(s)$  sulla linea di andata e  $G_2(s)$  sulla linea di retroazione, al variare dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$ .

## 8. Esercizio 2.

Si considerino le seguenti funzioni di trasferimento

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}; \quad G_2(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}; \quad G_3(s) = \frac{s+4}{(s+5)(s+2)},$$

ed il sistema a blocchi di figura 1.

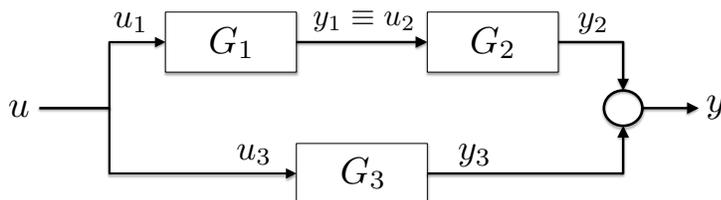


Figura 1: Interconnessione di sistemi.

**A.2** Si costruisca una rappresentazione del sistema complessivo nello spazio di stato ottenuto componendo i tre spazi di stato dei sottosistemi (dunque in dimensione complessiva 5) e la si ponga in forma di Kalman.

**B.2** Si determini una realizzazione minima del rapporto I/O complessivo.

9. (3) Si definisca il concetto di stabilità di un equilibrio, di un moto e di un'orbita, illustrandone le differenze con esempi;
10. (4) È vero che se l'approssimazione lineare di un sistema  $\dot{x} = f(x)$  intorno ad un equilibrio è convergente, allora l'equilibrio è stabile per il sistema stesso? Cosa si può dire nel caso in cui invece non sia stabile? Si facciano esempi per illustrare le risposte.
11. (8) Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha x_1^2 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= -\beta x_2^2 + x_2^3 \end{aligned}$$

e si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$ , applicando i teoremi opportuni.

12. Si considerino le equazioni che descrivono la postura (posizione e orientazione) dell'organo terminale di un braccio robotico RRR planare:

$$\begin{aligned} x &= L_1 \cos(q_1) + L_2 \cos(q_1 + q_2) + L_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ y &= L_1 \sin(q_1) + L_2 \sin(q_1 + q_2) + L_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\ \theta &= q_1 + q_2 + q_3 \end{aligned}$$

Si desidera trovare una posizione dei giunti  $(q_1, q_2, q_3)$  tale che l'end-effector si porti nella posizione assegnata  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta})$ .

- (a) (4) Si scriva un algoritmo iterativo di cinematica inversa sotto forma di sistema dinamico tempo continuo che converga alla soluzione desiderata almeno a partire da valori iniziali sufficientemente vicini alla soluzione;
  - (b) (5) Si scriva un algoritmo iterativo in linguaggio Matlab (o altro equivalente) che approssimi il sistema dinamico del punto precedente e converga alla soluzione desiderata. Se ne discuta la velocità di convergenza.
13. (3) Si consideri il sistema  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $y = h(x)$ , ed un controllore lineare rappresentato dalla f.d.t.  $u(s) = C(s)y(s)$  che rende l'origine un equilibrio asintoticamente stabile. Si descriva nel dettaglio un metodo per valutare la regione di asintotica stabilità, scrivendo l'algoritmo in linguaggio Matlab (o equivalente).

14. (3) Dato un sistema lineare tempo continuo  $\dot{x} = Ax + Bu$ , con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

si scriva un sistema lineare tempo discreto  $z^+ = A_d z + B_d u$  capace di riprodurre esattamente le soluzioni del primo per tutti gli istanti multipli di un dato periodo  $T$ , quando l'ingresso applicato sia costante a tratti sugli intervalli.

15. (3) Dato un sistema LTITC  $(A, B, C, D)$ , se ne consideri una retroazione della uscita sull'ingresso.

- (a) Può questa reazione spostare gli autovalori del sistema? Se sì, quali? Perché?
- (b) Può questa reazione spostare gli zeri del sistema? Perché?
- (c) Può questa reazione alterare la dimensione della realizzazione minima del sistema? Perché?

### Esercizio 2.

**A.2** Per ottenere una rappresentazione del sistema complessivo in dimensione 5, si può procedere come segue:

- espressione in forma di stato dei 3 sottosistemi caratterizzati dalle funzioni di trasferimento  $G_1, G_2$  e  $G_3$ :

$$A_1 = [-1] \quad B_1 = [1] \quad C_1 = [1] \quad D_1 = 0 \quad (2)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = [1 \quad 1] \quad D_2 = 0 \quad (3)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_3 = [4 \quad 1] \quad D_3 = 0 \quad (4)$$

- connessione dei sistemi caratterizzati da  $G_1$  e  $G_2$  in serie e successiva connessione del risultato, la cui f.d.t. verrà indicata con  $G_{1,2}$ , in parallelo con  $G_3$  ottenendo  $G_{1,2,3}$ :

– Serie tra  $G_1$  e  $G_2$

$$A_{1,2} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & -5 \end{bmatrix} \quad B_{1,2} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$C_{1,2} = [D_2 C_1 \quad C_2] = [0 \quad 1 \quad 1]$$

– Parallelo tra  $G_{1,2}$  e  $G_3$

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,2} & 0 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,2} \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$C = [C_{1,2} \quad C_3] = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1]$$

Per ottenere poi la scomposizione canonica di Kalman si procede determinando le matrici di raggiungibilità  $R$  e di osservabilità del sistema  $O$

$$R = [B \quad AB \quad A^2 B \quad A^3 B \quad A^4 B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 25 \\ 0 & 1 & -6 & 25 & -90 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -6 & -4 & 0 & 2 \\ -5 & 24 & 14 & 0 & -4 \\ 19 & -84 & -46 & 0 & 8 \\ -65 & 276 & 146 & 0 & -16 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Si determina una matrice di base del sottospazio raggiungibile  $T_R$  con il comando **orth(R)** di MATLAB. Tale matrice di base avrà 4 colonne e non cinque perchè nella connessione in parallelo è presente un polo in comune tra le due f.d.t..

Si determina una matrice di base del sottospazio non osservabile  $T_{\bar{O}}$  con il comando **null(O)** di MATLAB. Tale matrice di base avrà 2 colonne e non cinque perchè nelle connessioni in serie un polo di  $G_1$  è anche uno zero di  $G_2$  e nella connessione in parallelo è presente un polo in comune tra le due f.d.t..

Una base  $T_{R\bar{O}}$  per il sottospazio intersezione tra il sottospazio raggiungibile e quello non osservabile si trova risolvendo l'equazione  $T_R \xi_1 = T_{\bar{O}} \xi_2$ . Se

$$N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

è una base di  $\ker[T_R \ T_{\bar{O}}]$ , allora  $T_{R\bar{O}} = T_R N_1 = T_{\bar{O}} N_2$  è una base del sottospazio cercato.

Una base del sottospazio intersezione tra il sottospazio raggiungibile e quello osservabile,  $T_{RO}$ , si può trovare con il seguente codice

```
function [T_RO] = base_compl(T_R, T_RNO)
% T_RO : base di range(T_R) complementare a T_RNO
[ra, ca] = size(T_R);
[rb, cb] = size(T_RNO);
T_RO = orth([T_RNO T_R]);
[rd, cd] = size(T_RO);
T_RO = T_RO(:, cb+1:cd);
```

Una base del sottospazio intersezione tra il sottospazio raggiungibile e quello osservabile,  $T_{R\bar{O}}$ , si può trovare con il seguente codice

```
function [T_NRNO] = base_compl(T_NO, T_RNO)
% T_NRNO : base di range(T_NO) complementare a T_RNO
[ra, ca] = size(T_NO);
[rb, cb] = size(T_RNO);
T_NRNO = orth([T_RNO T_NO]);
[rd, cd] = size(T_NRNO);
T_NRNO = T_NRNO(:, cb+1:cd);
```

Infine, avendo  $T_{R\bar{O}}$ ,  $T_{\bar{O}}$  e  $T_{RO}$ , si può calcolare  $T_{\bar{R}O}$  completando lo spazio in  $\mathbb{R}^n$ . Si costruisce la matrice  $T = [T_{RO} \ T_{\bar{O}} \ T_{R\bar{O}} \ T_{\bar{R}O}]$  e si esegue il cambio di coordinate  $x = T\xi$  ottenendo il sistema nella forma voluta

$$A_k = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2.7969 & 0.7695 & -0.3418 & -0.0312 & -0.0195 \\ 0.7891 & 0.0286 & 0.2643 & 0.0015 & 0.0007 \\ -0.7812 & -2.9297 & -2.2344 & 0 & -0.0039 \\ 1.6777 & -0.2456 & 1.0860 & -2.0658 & 0.3751 \\ 0.7812 & 3.0938 & 1.4062 & -0.2500 & -0.9688 \end{bmatrix} \quad B_k = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.9609 \\ 0.2710 \\ -0.6719 \\ 0.5946 \\ -0.0938 \end{bmatrix}$$

$$C_k = CT = [-0.2670 \quad 4.0986 \quad -0.2156 \quad -0.0000 \quad -0.0000] \quad (10)$$

**B.2** Si procede dapprima alla valutazione della funzione di trasferimento della connessione in serie tra  $G_1$  e  $G_2$ ,

$$G_{1,2} = G_1 G_2 = \frac{1}{(s+2)(s+3)}. \quad (11)$$

Infine, si determina la funzione di trasferimento globale risolvendo il parallelo tra  $G_{1,2}$  appena valutata e  $G_3$ , ottenendo

$$G_{1,2,3} = G_{1,2} + G_3 = \frac{s + (s + 3)(s + 4)}{s(s + 2)(s + 3)}. \quad (12)$$

**Esercizio su stabilità**